

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه گیلان

انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، شماره ۳۷۵

# مبانی بهینه سازی سازه ها

تألیف:

آر. تی. هفتکه و زد. گوردال

استادان دانشکده های مهندسی هوافضا و علوم دریایی - علوم مهندسی و مکانیک  
مؤسسه پلی تکنیک و دانشگاه ایالتی ویرجینیای آمریکا

ترجمه

دکتر محمدحسین ابوالبشری

عضو هیات علمی دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

## فهرست

۱۱	..... سخن مترجم
۱۳	..... پیش گفتار
۱۷	..... فصل ۱. مقدمه
۱۸	..... ۱. ۱ بهینه سازی تابع و بهینه سازی پارامتر
۲۰	..... ۱. ۲ مبانی رابطه سازی مسأله
۲۰	..... ۱. ۲. ۱ متغیرهای طراحی
۲۲	..... ۱. ۲. ۲ تابع هدف
۲۷	..... ۱. ۲. ۳ قیود
۲۷	..... ۱. ۲. ۴ رابطه سازی استاندارد
۳۱	..... ۱. ۳ فرآیند حل
۳۳	..... ۱. ۴ رابطه سازی تحلیل و طراحی
۳۵	..... ۱. ۵ روشهای کلی و ویژه
۳۶	..... ۱. ۶ تمرینها
۴۰	..... ۱. ۷ مراجع
۴۳	..... فصل ۲. ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها
۴۴	..... ۲. ۱ بهینه سازی با استفاده از حساب دیفرانسیل

۵۰	۲.۲	بهینه سازی با استفاده از حساب تغییراتی
۵۰	۲.۲.۱	مقدمه ای بر حساب تغییراتی
۵۵	۲.۳	روشهای کلاسیک برای مسائل مقید
۵۶	۲.۳.۱	روش ضربگرهای لاگرانژ
۶۰	۲.۳.۲	تابع مشروط به یک قید انتگرالی
۶۳	۲.۳.۳	شرایط اضافی دیگر
۶۸	۲.۴	قیدهای موضعی و رویکرد مین ماکز (Minmax)
۷۵	۲.۵	شرایط لازم و کافی بهینگی
۷۶	۲.۵.۱	سازه های ارتجاعی با سختی ماکزیمم
۷۸	۲.۵.۲	طراحی بهین ستونهای اولر- برنولی
۸۶	۲.۵.۳	تیرهای اولر- برنولی ارتعاشی بهین
۹۰	۲.۶	کاربرد جوابهای سری در بهینه سازی سازه ها
۹۳	۲.۷	تمرینها
۹۶	۲.۸	مراجع
۱۰۱	فصل ۳	برنامه ریزی خطی
۱۰۳	۳.۱	تحلیل حد و طراحی سازه هایی که به صورت مسائل LP رابطه سازی می شوند
۱۱۴	۳.۲	طراحی بتن پیش تنیده به کمک برنامه ریزی خطی
۱۱۶	۳.۳	طراحی خراباهای از نظر ایستایی معین، با کمترین وزن
۱۲۰	۳.۴	حل ترسیمی مسائل LP ساده
۱۲۳	۳.۵	یک برنامه خطی به شکل استاندارد
۱۲۴	۳.۵.۱	جواب اصلی
۱۲۵	۳.۶	روش سیمپلکس
۱۲۶	۳.۶.۱	تغییر متغیرهای اصلی
۱۲۹	۳.۶.۲	بهبود بخشیدن تابع هدف
۱۳۱	۳.۶.۳	تولید یک جواب قابل قبول اصلی - استفاده از متغیرهای مصنوعی
۱۳۴	۳.۷	دوگانگی در برنامه ریزی خطی
۱۳۹	۳.۸	روش داخلی - الگوریتم کارمارکار
۱۴۰	۳.۸.۱	جهت حرکت
۱۴۲	۳.۸.۲	تبدیل مختصات
۱۴۴	۳.۸.۳	فاصله حرکت
۱۴۴	۳.۹	برنامه ریزی خطی عدد صحیح

## فهرست ۵

۱۴۷	۳. ۹. ۱ الگوریتم شاخه و کران
۱۵۲	۳. ۱۰ تمرینها
۱۵۵	۳. ۱۱ مراجع

## فصل ۴. بهینه سازی نامقید ۱۵۷

۱۵۷	۴. ۱ مینیم سازی توابع یک متغیره
۱۵۹	۴. ۱. ۱ روشهای مرتبه صفر
۱۶۵	۴. ۱. ۲ روشهای مرتبه اول
۱۶۷	۴. ۱. ۳ روشهای مرتبه دوم
۱۶۸	۴. ۱. ۴ درون یابی چند جمله ای حفاظت شده
۱۶۸	۴. ۲ مینیم سازی توابع چند متغیره
۱۶۸	۴. ۲. ۱ روشهای مرتبه صفر
۱۷۸	۴. ۲. ۲ روشهای مرتبه اول
۱۸۶	۴. ۲. ۳ روشهای مرتبه دوم
۱۹۳	۴. ۲. ۴ کاربردهایی در تحلیل
۱۹۴	۴. ۳ روشهای شبه نیوتن تخصصی
۱۹۴	۴. ۳. ۱ بهره برداری از لاغری ماتریسها
۱۹۷	۴. ۳. ۲ متناسب کردن هسیانها برای روشهای شبه نیوتن
۱۹۸	۴. ۳. ۳ همگرایی فراگیر ساختن روشهای شبه نیوتن
۱۹۸	۴. ۴ الگوریتمهای جست و جوی احتمالاتی
۱۹۹	۴. ۴. ۱ سرد شدن تدریجی شیشه سازی شده
۲۰۴	۴. ۴. ۲ الگوریتمهای ژنتیکی
۲۰۸	۴. ۵ تمرینها
۲۱۰	۴. ۶ مراجع

## فصل ۵. بهینه سازی مقید ۲۱۵

۲۱۸	۵. ۱ شرایط کان-تاکر
۲۱۸	۵. ۱. ۱ حالت کلی
۲۲۴	۵. ۱. ۲ مسائل محدب
۲۲۷	۵. ۲ مسائل برنامه ریزی درجه دوم
۲۲۹	۵. ۳ محاسبه ضربگرهای لاگرانژ
۲۳۳	۵. ۴ حساسیت جواب بهین به پارامترهای مسئله

۶ مبانی بهینه سازی سازه ها

۲۳۶	..... روشهای تصویر گردادیان و گردادیان کاهش یافته	۵. ۵
۲۴۶	..... روش جهت های قابل قبول	۵. ۶
۲۵۰	..... روشهای تابع جریمه	۵. ۷
۲۵۱	..... ۵. ۷. ۱ تابع جریمه خارجی	
۲۵۵	..... ۵. ۷. ۲ توابع جریمه داخلی و داخلی گسترش یافته	
۲۵۹	..... ۵. ۷. ۳ مینیمم سازی نامقید با توابع جریمه	
۲۶۱	..... ۵. ۷. ۴ برنامه ریزی عدد صحیح با توابع جریمه	
۲۶۶	..... روشهای ضرایب	۵. ۸
۲۶۹	..... روشهای لاگرازی تصویر شده (برنامه ریزی درجه دوم دنباله ای)	۵. ۹
۲۷۴	..... تمرینها	۵. ۱۰
۲۷۵	..... مراجع	۵. ۱۱

فصل ۶. سیمای بهینه سازی در عمل ..... ۲۷۷

۲۸۰	..... تقریبهای عام	۶. ۱
۲۸۰	..... ۶. ۱. ۱ تقریبهای محلی	
۲۹۰	..... ۶. ۱. ۲ تقریبهای فراگیر و میانه	
۲۹۴	..... فنون باز تحلیل سریع	۶. ۲
۲۹۴	..... ۶. ۲. ۱ پاسخ ایستایی خطی	
۲۹۹	..... ۶. ۲. ۲ مسائل مقدار ویژه	
۳۰۳	..... برنامه ریزی خطی دنباله ای	۶. ۳
۳۱۳	..... بهینه سازی تقریبی غیر خطی دنباله ای	۶. ۴
۳۱۶	..... مسائل ویژه در ارتباط با بهینه سازی شکل	۶. ۵
۳۱۹	..... بسته های نرم افزاری بهینه سازی	۶. ۶
۳۲۲	..... مسائل آزمایشی	۶. ۷
۳۲۲	..... ۶. ۷. ۱ خرابای ده میله ای	
۳۲۴	..... ۶. ۷. ۲ خرابای بیست و پنج میله ای	
۳۲۵	..... ۶. ۷. ۳ خرابای هفتاد و دو میله ای	
۳۲۷	..... تمرینها	۶. ۸
۳۲۸	..... مراجع	۶. ۹

فصل ۷. حساسیت سیستم های گسسته ..... ۳۳۵

۳۳۶	..... تقریبهای تفاضل محدود	۷. ۱
-----	----------------------------	------

## فهرست ۷

۳۳۶	۷. ۱. ۱ دقت و انتخاب اندازه گام
۳۴۰	۷. ۱. ۲ روشهای تکراری
۳۴۳	۷. ۱. ۳ تأثیر بزرگی مشتق بر روی دقت
۳۴۶	۷. ۲ مشتقات حساسیت تغییر مکان ایستایی و قیود تنش
۳۴۶	۷. ۲. ۱ مشتقات اول تحلیلی
۳۵۲	۷. ۲. ۲ مشتقات دوم
۳۵۳	۷. ۲. ۳ روش نیمه تحلیلی
۳۵۸	۷. ۲. ۴ تحلیل غیر خطی
۳۵۹	۷. ۲. ۵ حساسیت بارهای حدی
۳۶۱	۷. ۳ محاسبات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه
۳۶۱	۷. ۳. ۱ مشتقات حساسیت قیود کمانشی و ارتعاشی
۳۷۱	۷. ۳. ۲ مشتقات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه غیر هرمیتی
۳۸۰	۷. ۳. ۳ مشتقات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه غیر خطی
۳۸۲	۷. ۴ حساسیت قیود پامخ گذرا
۳۸۲	۷. ۴. ۱ قیود معادل
۳۸۵	۷. ۴. ۲ مشتقات قیود
۳۹۱	۷. ۴. ۳ دینامیک سازه های خطی
۳۹۵	۷. ۵ تمرینها
۳۹۸	۷. ۶ مراجع

## فصل ۸. مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر ۴۰۱

۴۰۳	۸. ۱ تحلیل ایستایی خطی
۴۰۵	۸. ۱. ۱ روش مستقیم
۴۱۰	۸. ۱. ۲ روش مجاورتی
۴۱۸	۸. ۱. ۳ نکته هایی در پیاده سازی روش
۴۱۹	۸. ۲ تحلیل ایستایی غیر خطی و بارهای حدی
۴۱۹	۸. ۲. ۱ تحلیل ایستایی
۴۲۶	۸. ۲. ۲ بارهای حدی
۴۳۱	۸. ۲. ۳ نکات پیاده سازی و اجرا
۴۳۲	۸. ۳ ارتعاش و کمانش
۴۳۳	۸. ۳. ۱ روش مستقیم
۴۳۷	۸. ۳. ۲ روش مجاورتی

## ۸ مبانی بهینه سازی سازه ها

۴۴۱	..... حساسیت شکل ایستایی	۸.۴
۴۴۲	..... ۸.۴.۱ مشتق مادی	
۴۴۵	..... ۸.۴.۲ پارامتر سازی دامنه	
۴۴۸	..... ۸.۴.۳ روش مستقیم	
۴۵۴	..... ۸.۴.۴ روش مجاورتی	
۴۵۷	..... تمرینها	۸.۵
۴۵۸	..... مراجع	۸.۶

## فصل ۹. روشهای معیار بهینگی و دوگان ۴۵۹

۴۶۰	..... روشهای معیار بهینگی شهودی	۹.۱
۴۶۰	..... ۹.۱.۱ طراحی تمام تنیده	
۴۶۶	..... ۹.۱.۲ سایر روشهای شهودی	
۴۶۷	..... روشهای دوگان	۹.۲
۴۶۸	..... ۹.۲.۱ رابطه سازی عمومی	
۴۷۰	..... ۹.۲.۲ کاربرد در مسائل جدایی پذیر	
۴۷۲	..... ۹.۲.۳ متغیرهای طراحی گسسته	
۴۷۸	..... ۹.۲.۴ کاربرد در تقریبهایی مرتبه اول	
۴۸۳	..... روشهای معیار بهینگی برای یک قید	۹.۳
۴۸۴	..... ۹.۳.۱ تقریب وارون برای یک قید تغییر مکان	
۴۸۶	..... ۹.۳.۲ یک قید تغییر مکان	
۴۹۰	..... ۹.۳.۳ عمومیت دادن برای قیدهای نوع دیگر	
۴۹۲	..... ۹.۳.۴ تغییر اندازه مقیاس مبنا	
۴۹۵	..... قیدهای متعدد	۹.۴
۴۹۵	..... ۹.۴.۱ روش مبتنی بر تقریب وارون	
۵۰۱	..... ۹.۴.۲ روش مقیاس - مبنا	
۵۰۴	..... ۹.۴.۳ رابطه سازیهای دیگر	
۵۰۶	..... تمرینها	۹.۵
۵۰۸	..... مراجع	۹.۶

## فصل ۱۰. بهینه سازی تجزیه ای و چند سطحی ۵۱۱

۵۱۱	..... رابطه بین رابطه سازی تجزیه ای و چند سطحی	۱۰.۱
۵۱۳	..... تجزیه	۱۰.۲

فهرست ۹

۵۲۶	..... جهت دهی و بهینه سازی چند سطحی	۱۰.۳
۵۲۹	..... رهیافتهای تابع جریمه و پوش	۱۰.۴
۵۳۳	..... مسائل چند سطحی درخت باریک	۱۰.۵
۵۳۳	..... ۱. ۵. ۱ تحلیل و طراحی همزمان	
۵۳۶	..... ۲. ۵. ۱ کاربردهای دیگر	
۵۳۶	..... تجزیه در محاسبات پاسخ و حساسیت	۱۰.۶
۵۴۳	..... تمرینها	۱۰.۷
۵۴۴	..... مراجع	۱۰.۸

فصل ۱۱. طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه ..... ۵۴۷

۵۴۸	..... ۱۱.۱ پاسخ مکانیکی یک لایه	
۵۴۸	..... ۱. ۱. ۱ لایه های اورتوترایپک	
۵۵۱	..... ۲. ۱. ۱ نظریه کلاسیک صفحه لایه ای	
۵۵۳	..... ۳. ۱. ۱ همبستگی خمشی، کششی و برشی	
۵۵۵	..... ۲. ۱۱ طراحی چند لایه	
۵۵۶	..... ۱. ۲. ۱ طراحی لایه ها برای پاسخ صفحه ای (غشایی) داخل صفحه	
۵۶۵	..... ۲. ۲. ۱ طراحی مواد مرکب لایه ای برای پاسخ خمشی	
۵۷۵	..... ۳. ۱۱ طراحی ترتیب چیدمان	
۵۷۶	..... ۱. ۳. ۱ طراحی ترتیب چیدمان به روش ترسیمی	
۵۷۷	..... ۲. ۳. ۱ رابطه سازی تابع جریمه	
۵۸۱	..... ۳. ۳. ۱ رابطه سازی برنامه ریزی خطی عدد صحیح	
۵۹۰	..... ۴. ۳. ۱ روشهای جست و جوی احتمالاتی	
۵۹۱	..... ۴. ۱۱ کاربردهای طراحی	
۵۹۱	..... ۱. ۴. ۱ طراحی صفحه های سخت	
۶۰۱	..... ۲. ۴. ۱ متناسب سازی آکروالاستیکی	
۶۰۴	..... ۵. ۱۱ عدم اطمینان های طراحی	
۶۰۶	..... ۶. ۱۱ تمرینها	
۶۰۸	..... ۷. ۱۱ مراجع	
۶۱۳	..... واژه نامه فارسی - انگلیسی	
۶۱۹	..... واژه نامه انگلیسی - فارسی	
۶۲۵	..... نمایه	





## سخن مترجم

توجه روزافزون مهندسان کشور به کاربرد بهینه سازی در طراحی به ویژه در سازه ها و نیاز آموزشی دانشجویان مهندسی مترجم را بر آن داشت تا اثر حاضر را تقدیم دانش پژوهان و مهندسان نماید.

چاپ کتاب «مقدمه ای بر طراحی بهین» در دو جلد از همین مترجم در سال ۱۳۷۸ توسط انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد و بازخوری که از طرف اساتید محترم دانشگاههای مختلف و دانشجویان دوره های کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری می رسید همه نشانگر این واقعیت بود که کتاب مزبور جایگاه خود را در بین آنان یافته و توانسته است بخشی از نیازهای آنان را که درک مفاهیم اساسی و روشهای مختلف بهینه سازی است پاسخگو باشد. مترجم همچنان معتقد است که برای فراگیری مقدماتی اصول طراحی بهین و جهت تدریس در دوره های کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی، کتاب «مقدمه ای بر طراحی بهین» مناسب ترین متن درسی است.

از طرف دیگر برای کارهای عملی و ارائه درس در سطوح پیشرفته تر به ویژه برای دانشجویان کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک و عمران در گرایش سازه و همچنین دسترسی به کتابی که روشهای جدیدتری را بیان کرده باشد لزوم ترجمه کتاب حاضر احساس می شد. این کتاب که ترجمه ای از :

Elements of Structural optimization, Third revised and expanded edition, R.T. Haftka

and Z. Gurdal, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1993

است پس از یکسال از چاپ اول آن در سال 1992، دو بار تجدید چاپ و مطالب آن افزوده گردیده که ویرایش سوم آن مبنای ترجمه این اثر است.

این کتاب دارای ویژگیهای برجسته ای است که به پاره ای از آنها به اجمال اشاره می شود. اولاً در آن تلاش شده جدیدترین روشهای تحلیلی و عددی بهینه سازی طراحی سازه ها از مراجع مختلف جمع آوری و در قالب نظام مندی ارائه شود. ثانیاً سابقه طولانی تدریس و پژوهش مؤلف سبب شده که با یک تسلط علمی نسبتاً جامع روشها و کاربردهای مختلف آنها را با بیانی ساده و در یک مجموعه هماهنگ در اختیار خوانندگان قرار دهد. ثالثاً درج مراجع در پایان هر فصل و به روز بودن آنها، که نشانگر تلاش مؤلف در گردآوری آخرین دستاوردهای علمی در این زمینه است، گستره وسیعی از مطالب را برای خوانندگان علاقمند به مطالعه بیشتر در دسترس قرار می دهد.

براساس توصیه مؤلف در پیش گفتار، بخشهایی از این اثر می تواند به عنوان یک درس سه واحدی «طراحی بهینه» برای دوره های کارشناسی و کارشناسی ارشد ارائه شود.

در ترجمه انتقال صحیح مفاهیم مورد نظر بوده و از ترجمه لغت به لغت پرهیز شده است. ضمناً بیش از ۴۵ غلط چاپی و مفهومی کتاب در ترجمه تصحیح شده است. امید است این اثر نیز مورد استقبال اساتید محترم و دانشجویان عزیز قرار گیرد و پژوهشگران نیز از آن بهره مند گردند.

در انتها از ویراستاران محترم علمی و ادبی آقایان دکتر علی وحیدیان کامیاب و علی سالیانی که با دقت نظر و حوصله مطالب این اثر را بازبینی و پیشنهادات ارزنده ای ارائه نمودند تشکر و قدردانی می نماید. همچنین از آقای ساسان بهرامی و مسؤولین محترم چاپخانه دانشگاه فردوسی مشهد که کار حروفچینی، صفحه آرایی و چاپ را به عهده داشتند سپاسگزاری می شود.

محمدحسین ابوالبشری

شهریور ماه ۱۳۸۲

## پیش گفتار

رشته بهینه سازی سازه ها، هنوز هم رشته نسبتاً جدیدی است و پیوسته از نظر روشها و رویکردها در معرض تغییرات سریع قرار دارد. تاکنون بین تعداد زیاد نوشته ها، مقالات و تعداد کم کاربرد در مسائل طراحی عملی عدم تعادل جدی وجود داشته است. این عدم تعادل به تدریج جبران می شود. هم اکنون در زمینه مطالب منتشر شده جدید، کمبودی وجود ندارد و کاربردهایی از روشهای بهینه سازی سازه ها در مهندسی خودرو، هوا فضا، عمران، طراحی ماشین و دیگر زمینه های مهندسی نیز موجود است. در نتیجه رشد فزاینده کاربردها، جهت گیری پژوهش در روشهای بهینه سازی سازه ها، با مسائل واقعی روز همسوست.

بیشتر مهندسانی که سازه ها را طراحی می کنند، برای تحلیل سازه، بسته های نرم افزاری عمومی پیچیده ای را به کار می گیرند. اغلب آنان به کدهای اصلی برنامه دسترسی ندارند و حتی گاهی از جزئیات الگوریتمهای تحلیل سازه ای که در این نرم افزارها به کار می رود تنها آگاهی مختصری دارند. بنابراین چالش اصلی که پژوهشگران بهینه کننده سازه ها با آن مواجه هستند، تدوین روشهایی است که برای استفاده از چنین بسته های نرم افزاری مناسب باشند. چالش اصلی دیگر هزینه بالای محاسباتی تحلیل بسیاری از مسائل پیچیده واقعی روزمره است. در بسیاری از حالتها مهندسان طراح سازه، توانایی تحلیل

جز در مواردی که به دقت کمی نیاز داشته باشد را ندارند.

چنین واقعیهایی، انگیزه اقبال به روشهای بهینه سازی که نیاز کمتری به تعامل با نرم افزار تحلیل سازه را دارند و تنها به تعداد محدودی از اجرای تحلیل سازه نیازمندند را شکل می دهد. دسته ای از این نوع روشها، توسط لوسین اشمیت<sup>۱</sup> تدوین و به طور گسترده ای به کار گرفته می شوند که در این کتاب به عنوان روشهای بهینه سازی تقریبی دنباله ای مطرح می شوند. این روشها، به منظور ساختن یک شکل تقریبی از مسأله طراحی سازه از نرم افزار تحلیل استفاده می کنند و آنگاه روشهای بهینه سازی ریاضی مختلف را برای حل مسأله تقریبی به کار می برند. سپس طرح بهین مسأله تقریبی، به عنوان مبنایی برای انجام یک یا چند تحلیل سازه، به منظور به روز کردن یا پالایش مسأله طراحی تقریبی به کار می رود. بیشتر مسائل طراحی تقریبی، بر اساس مشتقات پاسخ سازه نسبت به پارامترهای طراحی می باشند.

در این موقعیت جدید، طراحان سازه معمولاً به فراهم کردن تعاملی بین یک برنامه تحلیل تجاری در دسترس و یک بسته نرم افزاری بهینه سازی تجاری در دسترس فراخوانده می شوند. سه جزء از مهمترین اجزای این تعامل عبارتند از: محاسبه مشتق حساسیت، ساختن یک مسأله تقریبی و ارزیابی نتیجه ها به منظور تنظیم دقیق مسأله تقریبی یا روش بهینه سازی برای بازدهی بالاتر و قابلیت اعتماد بیشتر.

این کتاب به شکلی تدوین شده که قسمت میانی (فصلهای ۶، ۷ و ۸) درباره دو مسأله ساختن مسأله تقریبی و بدست آوردن مشتق حساسیت بحث می کند. ارزیابی نتیجه های بهینه سازی، نیاز به فهم اساسی شرایط بهینگی و روشهای بهینه سازی دارد. فصلهای ۱ تا ۵ به بحث در این باره می پردازد. سه فصل آخر اختصاص به مباحث ویژه ای چون روشهای معیار بهینگی، بهینه سازی چند سطحی، و کاربرد آنها در مواد مرکب دارد.

مطالب کتاب می تواند به روشهای گوناگونی برای تدریس یک درس کارشناسی ارشد در بهینه سازی سازه ها به کار گرفته شود. این روشها، به زمان در نظر گرفته شده و به آگاهی قبلی دانشجویان در زمینه روشهای بهینه سازی بستگی دارد.

بدون آمادگی قبلی در زمینه روشهای بهینه سازی، حداقل زمان لازم یک نیمسال پیش بینی می شود. پیشنهاد می شود که فصل ۱ و بخشهای ۲.۱، ۲.۲ و ۲.۳ از فصل ۲ و بخشهای ۳.۱ و ۳.۴ از فصل ۳،

1) Lucien Schmit

بسته به علاقه استاد به روشهای بهینه سازی و مطالبی از فصلهای ۴ و ۵ و قسمت اعظم فصل ۶ و دو بخش اول فصل ۷ در این نیمسال ارائه شود. در دوربع سال متوالی، ارائه فصلهای ۱ و ۲، و عنوانهای برگزیده ای از فصلهای ۳ تا ۵ و فصل ۶ در ربع اول و فصلهای ۷، ۹، ۱۱ و فصل ۸ یا ۱۰ در ربع دوم پیشنهاد می شود. بالاخره برای دو نیمسال متوالی، فصلهای ۱ تا ۶ برای نیمسال اول و فصلهای ۷ تا ۱۱ برای نیمسال دوم پیشنهاد می شود.

با یک درس مقدماتی در بهینه سازی ریاضی، می توان یک درس ربع سالی یا نیمسالی ارائه نمود. برای درس ربع سالی فصلهای ۱ و ۲ و بخشهای ۳.۱، ۳.۲، ۳.۳ و ۳.۷ از فصل ۳، و فصل ۶، دو بخش اول فصل ۷، و فصلهای ۹ یا ۱۱ پیشنهاد می شود. برای یک درس یک نیمسالی، بخشهای مشابهی از فصلهای ۱ تا ۷، و فصلهای ۹ تا ۱۱ برای ارائه مناسب خواهد بود.

نویسندگان، از همکاریهای دکتر اچ آدلمان<sup>۱</sup>، بی بارتلمی<sup>۲</sup>، جی-اف بارتلمی<sup>۳</sup>، ال برک<sup>۴</sup>، آر گرندی<sup>۵</sup>، دی گریسون<sup>۶</sup>، ای هاگ<sup>۷</sup>، آر پلات<sup>۸</sup>، جی سایسکی<sup>۹</sup> و جی استارنس<sup>۱۰</sup> در مطالعه متن اولیه و ارائه پیشنهادهای مهم، صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایند.



بهینه سازی عبارت است از: رسیدن به بهترین نتیجه، در مورد یک عملیات، در حالی که محدودیتهای مشخصی برآورده شده باشند. انسان محصور در طبیعت، ذاتاً تمام فعالیتهايش را به شکلی انجام می دهد که در انرژی صرفه جویی شود یا ناراحتی و دردش به حداقل برسد. این تمایل و اراده به خاطر استفاده از منابع محدود موجود، به منظور ماکزیم کردن خروجی یا سود است. اختراعات اولیه اهرمها یا مکانیزم قرقره، به روشنی تمایل بشر را به افزایش بازدهی مکانیکی می نمایاند. مثالهای بی شماری از این دست در تاریخ بشر یافت می شود. کتابهای دوگلاس و ایلد<sup>1</sup> [1] مجموعه جالبی در مورد ریشه کلمه بهینه و تعریف طراحی بهین ارائه می دهد. ما تعریف و ایلد را نقل به مضمون کرده و طراحی بهین را به شکل «بهترین طراحی قابل قبول بر اساس یک معیار کیفی شایستگی از پیش تعیین شده» تعریف می کنیم.

از آن جا که پی گیری تاریخچه تدوین و توسعه بهینه سازی، فراتر از هدف این کتاب است، تنها تعدادی از جدیدترین مراجع در زمینه بهینه سازی سازه ها را فهرست می کنیم. این مراجع [19-2] سابقه تدوین و توسعه شاخه بهینه سازی سازه ها را از قرن هجدهم میلادی دنبال می کنند. اهمیت طراحی سازه های با وزن مینیمم، اولین بار توسط صنایع هوا- فضا مورد توجه قرار گرفت که در آنها طراحی سازه های هواپیما بیشتر با وزن آن کنترل می شد تا با هزینه آن. در دیگر صنایع مربوط به سیستمهای مهندسی ساختمان، مکانیک و خودرو، ممکن است هزینه در درجه اول اهمیت باشد، هر چند که وزن سیستم، هزینه و عملکرد آن را تحت تأثیر قرار می دهد. توجه فزاینده به کمبود مواد خام و نقصان شدید منابع انرژی شناخته شده، موجب تمایل به داشتن سازه هایی سبک، کارا و ارزان قیمت شده

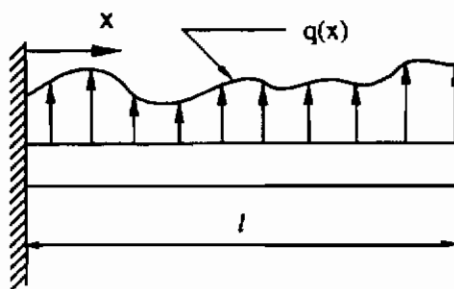
1) Douglas Wilde



است. این خواست به نوبه خود بر ضرورت آگاهی یافتن مهندسان از فنون بهینه سازی وزن و هزینه سازه ها تأکید می کند. هدف این کتاب آگاه ساختن دانشجویان و مهندسان حرفه ای با این فنون است.

### ۱.۱ بهینه سازی تابع و بهینه سازی پارامتر

پیش از ظهور محاسبات سریع، بیشتر جوابهای مسائل تحلیل سازه بر اساس رابطه سازی به کمک معادلات دیفرانسیل صورت می گرفت. این معادلات دیفرانسیل به صورت تحلیلی (به عنوان مثال به کمک سریهای نامحدود) و در بعضی از مواقع با استفاده از روشهای عددی در آخرین مراحل، حل می شدند. مجهولات توابعی بودند (مانند تغییر مکانها، تنشها و غیره) که روی یک محیط پیوسته تعریف می شدند.



شکل ۱.۱.۱ مثال تیر

شروع اولیه بهینه سازی سازه ها نیز روش مشابهی را پیموده که در آن مجهولات توابعی بودند که خواص سازه بهینه را تعریف می کردند. به عنوان مثال تیر نشان داده شده در شکل ۱.۱.۱ را در نظر بگیرید. تحلیل سازه ای درباره یافتن تغییر مکان  $w(x)$  تیر از حل معادله معروف زیر بحث می کند.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q(x). \quad (1.1.1)$$

طراح سازه ممکن است بخواهد توزیع بهین گشتاور مانند  $I(x)$  در امتداد طول تیر را بیابد. البته ماهیت بهینگی، نیاز به داشتن یک تابع هدف دارد که می خواهیم آن را ماکزیمم یا مینیمم کنیم. به عنوان مثال تابع هدف ممکن است جرم تیر باشد. برای بیشتر تیرهای با سطح مقطع معمولی، جرم  $m$  برابر است با:

بخش ۱.۱: بهینه سازی تابع و بهینه سازی پارامتر ۱۴

$$m = c \int_0^l IP(x) dx, \quad (۱.۱.۲)$$

که در آن نمای  $p$  معمولاً بین ۰.۴ تا ۰.۵ و  $c$  یک عدد ثابت معلوم است. یک مسأله 'بهینه سازی معمولاً تعدادی قید دارد. بدون در نظر گرفتن قید، تیر بهین گشتاور ماند و جرم صفر خواهد داشت. در طراحی یک تیر، یک قید نمونه، می تواند محدود کردن تغییر مکان ماکزیمم تیر به یک حد مجاز از پیش تعیین شده  $w_0$  باشد.

$$w_{max} = \max_{0 \leq x \leq l} w(x) \leq w_0. \quad (۱.۱.۳)$$

بدست آوردن شرایط لازم بهینگی به شکل یک معادله 'دیفرانسیل بر حسب  $I(x)$  و  $w(x)$  امکان پذیر است. قواعد ریاضی که با این نوع مسأله سروکار دارد حساب تغییراتی نامیده می شود که در فصل ۲ به اختصار مطرح می شود. آن دسته از مسائل بهینه سازی سازه ها که به دنبال یافتن یک تابع سازه ای بهین هستند بهینه سازی سازه ای، تابع یا پارامتر توزیع شده نامیده می شوند.

در اواخر دهه پنجاه و اوایل دهه شصت، رایانه های الکترونیکی با سرعت بالا بر روشهای حل تحلیل سازه ها، اثر بسزایی گذاشتند. فئونی که برای پیاده سازی توسط رایانه بسیار متناسب بودند- به ویژه روش اجزای محدود (FEM) - غالب شدند. روش اجزای محدود در ابتدای تحلیل، سازه را به اجزای کوچکی تقسیم می کند، به شکلی که مجهولات تحلیل، به جای تابع، مقادیر گسسته تغییر مکانها و تنشها در گره های مدل اجزای محدود است. معامله 'دیفرانسیلی که توسط تحلیل گران حل می شد، با دستگاه معادلات جبری بر حسب متغیرهایی که سیستم تقسیم شده به اجزا را مشخص می کند جایگزین می گردد. در اوایل دهه شصت انتقال مشابهی در زمینه 'بهینه سازی سازه ها، اتفاق افتاد. به هنگام بهینه سازی، سازه ای که توسط اجزای محدود جزء جزء شده، طبیعی است که خواصی از سازه که قرار است بهینه شود، نیز به اجزای کوچکتری تقسیم گردد. دوباره مثال تیر شکل ۱.۱.۱ را در نظر بگیرید. کاربرد روش اجزای محدود برای بدست آوردن تغییر مکانها، با تقسیم تیر به قسمتهایی که دارای خواص ثابت هستند یا اجزای محدود شروع می شود. بهینه سازی تیر به طور طبیعی گشتاور ماند قطعات را به عنوان متغیرهای طراحی به کار می برد. بنابراین، به جای جست و جو برای یک تابع بهین، دنبال مقادیر بهین تعدادی پارامتر خواهیم بود. راهکارهای ریاضی که درباره 'بهینه سازی پارامتر بحث می کنند برنامه

ریزی ریاضی نامیده می شوند. بنابراین بیشتر این کتاب (فصلهای ۷-۳، ۱۱-۹) به بحث در مورد فنون برنامه ریزی ریاضی و کاربردشان در مسائل بهینه سازی سازه ها که توسط مدل‌های تقسیم شده به اجزا تعریف می شوند، اختصاص دارد. به ویژه، اغلب صراحتاً فرض می شود که تحلیل سازه براساس روش اجزای محدود است.

## ۱.۲ مبانی رابطه سازی مساله

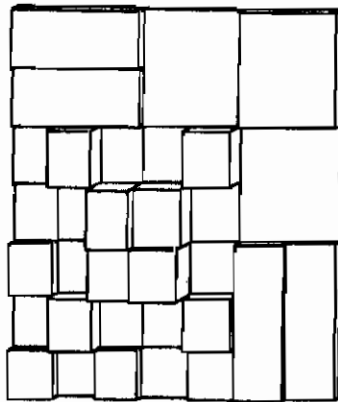
### ۱.۲.۱ متغیرهای طراحی

در بهینه سازی یا بهبود بخشیدن به یک سازه، به طور ضمنی اختیار تغییر سازه یک پیش فرض است. پتانسیل تغییر به طور معمول بر اساس محدوده ای از تغییرات در تعدادی از پارامترها بیان می شود. چنین پارامترهایی در اصطلاح بهینه سازی معمولاً متغیرهای طراحی نامیده می شوند و در این کتاب با یک بردار  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  نشان داده می شوند. متغیرهای طراحی می توانند ابعاد سطح مقطع یا اندازه اعضا، پارامترهای کنترل هندسه سازه، خواص مصالح آن و غیره باشند. متغیرهای طراحی ممکن است مقادیر پیوسته یا گسسته داشته باشند. متغیرهای طراحی پیوسته یک محدوده تغییرات دارند و می توانند هر مقدار در آن محدوده را بگیرند، به عنوان مثال، در مساله طراحی شکل ۱.۱.۱ گشتاور مانند هر قطعه از تیر یک متغیر طراحی پیوسته است. متغیرهای طراحی گسسته تنها می توانند مقادیر خاصی داشته باشند که معمولاً از بین یک سری از مقادیر مجاز خواهد بود. متغیرهای طراحی مصالح اغلب گسسته اند. اگر در طراحی تیر پنج نوع مصالح در نظر بگیریم، آن گاه می توانیم یک متغیر طراحی که می تواند هر مقدار صحیح از یک تا پنج را بگیرد تعریف کنیم که نشان دهنده نوع مصالح باشد. آن دسته از متغیرهای طراحی که عموماً به عنوان پیوسته در نظر گرفته می شوند اغلب به خاطر ملاحظات تولید گسسته می شوند. به عنوان مثال، اگر تیر شکل ۱.۱.۱ برای مینیمم شدن هزینه طراحی شود، ممکن است مجبور شویم خود را به سطح مقطع هایی از تیر که در بازار موجود است محدود کنیم. آن گاه گشتاور مانند، دیگر متغیر طراحی پیوسته نخواهد بود و گسسته است.

در بیشتر مسائل طراحی سازه ها، در حل مساله بهینه سازی، از طبیعت گسسته متغیرهای طراحی چشم پوشی می شود. وقتی متغیر بهین بدست آمد، آن گاه مقدار متغیر طراحی را به نزدیکترین مقدار

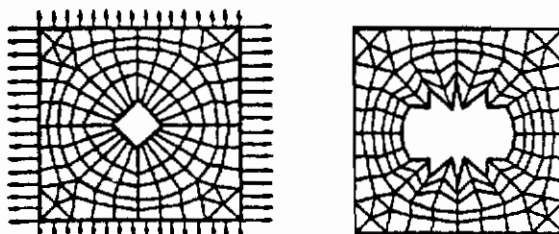
## بخش ۱.۲: مبانی رابطه سازی مسأله ۲۱

گسسته در دسترس تغییر می دهیم. این برخورد به خاطر این است که حل یک مسأله بهینه سازی با متغیرهای طرّاحی گسسته معمولاً بسیار دشوارتر از حل مسأله مشابه ولی با متغیرهای طرّاحی پیوسته است. گرد کردن طرّاحی به نزدیکترین جواب صحیح، وقتی مقادیر متغیرهای طرّاحی با فاصله های نزدیک به هم در دسترس باشند، خوب کار می کند و تغییر متغیرهای طرّاحی به نزدیکترین مقدار صحیح پاسخ سازه را به طور چشمگیری تغییر نمی دهد. در بعضی از حالتها، مقادیر گسسته متغیرهای طرّاحی از هم خیلی فاصله دارند، و باید مسأله را با متغیرهای طرّاحی گسسته حل کنیم. این کار با به کارگیری شاخه ای از برنامه ریزی ریاضی که برنامه ریزی با اعداد صحیح نامیده می شود، انجام می شود. در این کتاب فرض می شود که متغیرهای طرّاحی، پیوسته باشند، مگر غیر آن بیان شود.



شکل ۱.۲.۱ توزیع ضخامت بهینه یک صفحه

انتخاب متغیرهای طرّاحی می تواند در موفقیت فرآیند بهینه سازی بسیار مؤثر باشد. به ویژه باید مطمئن شد که انتخاب متغیرهای طرّاحی با مدل تحلیل هماهنگ است. به عنوان مثال، فرآیند تقسیم بندی یک سازه با یک مدل اجزای محدود را در نظر بگیرید و روش بهینه سازی را روی مدل اعمال کنید. اگر توزیع متغیر طرّاحی یک رابطه یک به یک با مدل اجزای محدود داشته باشد، آن گاه ممکن است از دقت مسأله کاسته شود. به عنوان مثال، صفحه نشان داده شده در شکل ۱.۲.۱ با یک شبکه اجزای محدود  $7 \times 7$  تحلیل شده [20] و بیشتر متغیرهای طرّاحی ضخامت اجزای منفردند، در حالی که مدل  $7 \times 7$  برای طرّاحی اولیه با ضخامت یکنواخت مناسب بود، برای طرّاحی نهایی که در شکل نشان داده



شکل ۱.۲.۲ شکل بهین یک سوراخ در یک صفحه، (a) طراحی اولیه، (b) طراحی نهایی

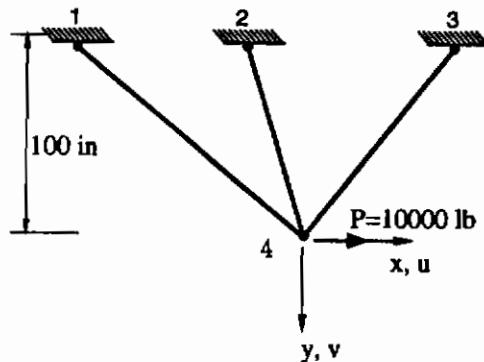
شده، مناسب نیست.

مسأله مشابه برای حالتی که مختصات گره های مدل اجزای محدود، به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شده باشند نیز اتفاق می افتد. به عنوان مثال، شکل سوراخ صفحه نشان داده شده در شکل ۱.۲.۲ برای کاهش تمرکز تنش اطراف سوراخ بهینه شده [21] و در آن مختصات گره های مرزی به عنوان پارامترهای طراحی در نظر گرفته شده است. در این جا نیز، مدل اجزای محدود، برای تحلیل شکل دایره ای اولیه سوراخ مناسب بود، ولی برای «شکل بهین» مناسب نیست. به طور کلی، توزیع متغیرهای طراحی باید بسیار بازتر از توزیع اجزای محدود باشد (به جز برای سازه های اسکلتی و نازک که اغلب هر جزء به یک عضو فیزیکی سازه اختصاص دارد)

## ۱.۲.۲ تابع هدف

مفهوم بهینه سازی ایجاب می کند که تابع شایستگی  $f(x)$  یا توابع شایستگی  $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)]$  وجود داشته باشد که بتواند بهبود یابد و از آن به عنوان معیار مؤثر بودن طراحی استفاده شود. اصطلاح معمول برای چنین توابعی توابع هدف است. بهینه سازی با بیشتر از یک تابع هدف را بطور کلی بهینه سازی چند معیاری می گویند. برای مسائل بهینه سازی سازه ها، وزن، تغییر مکانها، تنشها، بسامدهای ارتعاشی، بارهای کماتش، و هزینه یا هر ترکیبی از اینها را می توان به عنوان توابع هدف به کار برد. به عنوان مثال خرابی سه میله ای شکل ۱.۲.۳ را در نظر بگیرید. مسأله طراحی ممکن است به شکل تغییر موقعیت افقی سه نقطه تکیه گاهی به منظور مینیمم کردن جرم خرپا و تنشها در اعضایش باشد. چهار تابع هدف داریم: جرم و سه تنش.

بخش ۱.۲: مبانی رابطه سازی مسأله ۲۳



شکل ۱.۲.۳ مثال خرابی سه میله ای

کار کردن با توابع هدف چند گانه پیچیده است و معمولاً از آن پرهیز می شود. در روش شهودی عمومی برای کاهش تعداد توابع هدف به یک تابع وجود دارد: روش اول این است که یک تابع هدف مرکب که جایگزین همه توابع هدف شود درست کنیم. به عنوان مثال، اگر جرم سازه با  $m$  و تنشهای سه میله با  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  و نشان داده شوند، آن گاه یک تابع هدف مرکب  $f$  را می توان به شکل زیر بیان کرد.

$$F = \alpha_0 m + \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3, \quad (1.2.1)$$

در حالی که  $\alpha_i$  ضرایب وزنی انتخاب شده برای انعکاس اهمیت نسبی هر یک از چهار توابع هدف می باشد.

روش شهودی دوم در کاهش تعداد توابع هدف عبارت از انتخاب مهمترین آنها به عنوان تنها تابع هدف و اعمال محدودیت به جای سایر توابع هدف می باشد. بنابراین می توانیم مسأله طراحی خرابی سه میله ای را به عنوان مینیمم سازی جرم با شرط قیدهای کران بالا بر روی مقدار سه تنش رابطه سازی کنیم.

وقتی چگونگی وزن دادن و انتخاب تابع هدف مهم در میان توابع هدف شهوداً روشن نباشد، یک راهبرد سیستماتیک برای مسأله استفاده از شاخه ای از برنامه ریزی ریاضی که بهینه سازی ادج ورت - پارتو<sup>۱</sup> نامیده می شود و درباره توابع هدف چندگانه بحث می کند [22-24] می باشد. استدلر<sup>۲</sup> [25-26] شاید اولین کسی بود که بهینگی ادج ورت - پارتو را در طراحی سازه ها به کار برد. کاربردهای جدیدتری

1) Edgeworth- Pareto

2) Stadler

را می توان در مراجع 27-31 یافت.

بردار متغیرهای طراحی  $x^*$  را بهین ادج ورت-پارتومی گویند اگر برای هر بردار  $x$  دیگر یا مقادیر تمام توابع هدف یکسان باشند، یا حداقل یکی از آنها نسبت به مقدارش در  $x^*$  بدتر باشد. وقتی مشخص کردن اهمیت نسبی توابع هدف شهوداً و با درك مستقیم امکان پذیر نباشد و نتوان آن را به صورت یک تابع مانند (۱.۲.۱) بیان کرد، مقادیر وزنه‌های  $\sigma_i, i=0, 1, 2, 3$  در معادله (۱.۲.۱) را می توان با مطالعه طراحی های بهین ادج ورت-پارتو مختلف انتخاب کرد. بنابراین، فرآیند طراحی یک فرآیند تعاملی است، و اعمال قیود تا بدست آمدن رفتار بهین از مطالعه طراحی های بهین ادج ورت-پارتو به تعویق می افتد.

یکی از رویکردها، برای ساختن یک جواب بهین پارتو، جهت مسائل بهینه سازی با توابع هدف چند گانه بر اساس مینیم سازی، انحراف تک تک توابع هدف از مقدار مینیم شان است. اگر مینیم سازی مستقل هر یک از توابع هدف به مقدار توابع  $f_1^*, f_2^*, \dots, f_p^*$  در نقطه طراحی  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*$  بینجامد، آن گاه برای هر مقدار اختیاری از بردار متغیر طراحی  $x$  فاصله نرمال شده هر یک از توابع هدف از مقدار بهینه اش برابر است با

$$d_i(x) = \frac{f_i(x) - f_i^*}{f_i^*} \quad i = 1, \dots, p. \quad (1.2.2)$$

آن گاه مسأله را می شود به عنوان مینیم سازی بزرگترین انحراف توابع هدف از مقدار مینیم شان (نرم  $l_\infty$ ) تعریف کرد

$$\text{minimize} \quad \max_{i=1, \dots, p} [d_i(x)], \quad (1.2.3)$$

و یا به عنوان مینیم سازی فاصله (یعنی  $l_2$  یا نرم اقلیدسی) از نقطه مبنا  $f^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_p^*)$  تا  $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$  تعریف کرد؛

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^p d_i^2. \quad (1.2.4)$$

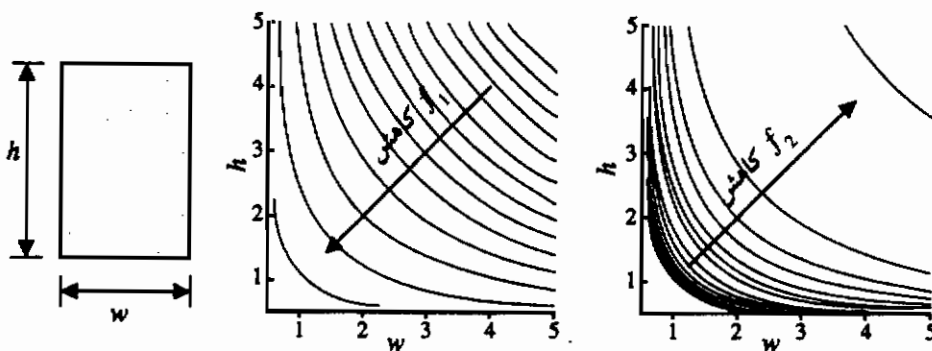
در معادله (۱.۲.۴) برای میزان سهم هر یک از توابع هدف استفاده از ضرایب وزنی نیز امکان پذیر است. بحث مفصلتر روشهای حل مسائل بهینه سازی چند معیاری و کاربردهای طراحی آنها توسط اشنایر<sup>۱</sup>

بخش ۱.۲: مبانی رابطه سازی مسأله ۳۵

و دیگران [31] ارائه شده است.

### مثال ۱.۲.۱

طراحی ابعاد سطح مقطع یک تیر مستطیلی برای مینیمم شدن مساحت را در نظر بگیرید. در همان حال می‌خواهیم تنش برشی ماکزیمم در تیر در اثر اعمال نیروی برشی واحد مینیمم باشد. بر اساس قیدهای فیزیکی، دو متغیر  $w$  و  $h$ ، که عرض و ارتفاع سطح مقطع می‌باشند باید در محدوده‌های زیر باشند  $0.5 \leq w, h \leq 5$



شکل ۱.۲.۳ طراحی سطح مقطع یک تیر برای مینیمم شدن مساحت و مینیمم شدن تنش برشی

ترازهای دو تابع هدف

$$f_1 = A = wh \quad \text{و} \quad f_2 = \tau = \frac{3}{2wh}, \quad (a)$$

در شکل ۱.۲.۴ نشان داده شده‌اند. مینیمم هر یک از دو تابع در گوشه‌های روبه روی هم فضای طراحی قرار دارند،  $w_1^* = h_1^* = 0.5$  و  $w_2^* = h_2^* = 5.0$ ، با مقادیر تابع  $f_1^* = 0.25 \text{ in}^2$  و  $f_2^* = 0.06 \text{ lb/in}^2$ .

رویکرد تابع هدف با وزنهای مساوی مینیمم سازی تابع زیر را می‌دهد

$$F = wh + \frac{3}{2wh}. \quad (b)$$

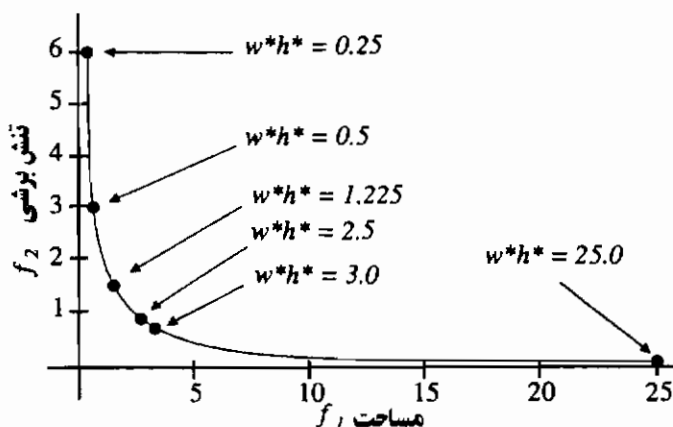
چون متغیرهای طراحی  $w$ ،  $h$  همه جا به شکل حاصلضرب ظاهر شده‌اند، این حاصلضرب را



می توانیم به عنوان یک متغیر طراحی در نظر بگیریم. مینیمم سازی معادله (b) نسبت به حاصلضرب برابر است با  $w^*h^* = \sqrt{3/2} = 1.225$  با مقدار تابع هدف  $f_1^* = f_2^* = 1.225$ . اگر، از طرف دیگر مینیمم سازی نرم اقلیدسی فاصله از مینیمم های تک تک توابع را به کار ببریم، تابعی که باید مینیمم شود برابر است با

$$F = \left( \frac{hw - 0.25}{0.25} \right)^2 + \left( \frac{\frac{3}{2hw} - 0.06}{0.06} \right)^2 \quad (c)$$

طراحی حاصل عبارت است از  $w^*h^* = 2.5$  با مقادیر توابع هدف  $f_1^* = 2.5$  و  $f_2^* = 0.6$ .



شکل ۱۰.۲۰۵ جوابهای بهین پارتو برای مسأله طراحی تیر

دو طراحی بدست آمده بالا و طراحی بدست آمده از مینیمم سازی هر یک از توابع به تنهایی، یک بهین پارتو را تشکیل می دهند. جوابهای دیگری نیز وجود دارند که شرط بهینگی پارتو را برآورده می کنند. این جوابها را می توان یا با تغییر ضرایب وزنی توابع هدف و یا با اعمال یکی از توابع هدف به عنوان قید و تغییر سطح مطلوب این قید بدست آورد. به عنوان مثال، اگر تابع هدف دوم با اعمال شرط  $f_2 \leq 0.5$  به یک قید تبدیل شود و مساحت را مینیمم کنیم، طراحی  $w^*h^* = 3.0$  با مقادیر تابع هدف  $f_1^* = 3.0$  و  $f_2^* = 0.5$  بدست می آید. به طور مشابه اگر  $f_2$  را با اعمال قید  $f_1 \leq 0.5$  مینیمم کنیم  $w^*h^* = 0.5$  با  $f_1^* = 0.5$  و  $f_2^* = 3.0$  بدست می آید. تمامی این جوابها روی یک منحنی در فضای تابع قرار می گیرند که دو مینیمم

## بخش ۱.۲: مبانی رابطه سازی مسأله ۲۷

هر یک از توابع را به هم وصل می کنند، همچنان که در شکل ۱.۲.۵ نشان داده شده است. این منحنی معمولاً منحنی بازده نامیده می شود. • • •

## ۱.۲.۳ قیود

در رابطه سازی مثال خرپای سه میله ای که تنشها حد بالایی داشتند و مسأله طراحی سطح مقطع تیر که متغیرهای ارتفاع و عرض محدود به داشتن مقادیری در یک بازه مشخص بودند، مفهوم حدود بر متغیرهای طراحی را معرفی می کند این قیود حد بالا و پایین متغیرهای طراحی به خاطر سادگی شان اغلب در روشهای حل به شکل ویژه ای در نظر گرفته می شوند و قیود جانبی نامیده می شوند. قیودی که حد بالا و پایین مقادیر را اعمال می کنند به علت طبیعتشان قیود نامساوی اند. گاهی نیاز به قیود تساوی داریم. به عنوان مثال، خرپای سه میله ای را ممکن است بخواهیم به شکلی طراحی کنیم که مؤلفه عمودی تغییر مکان در نقطه اعمال نیرو صفر باشد. مثال دیگر از قید تساوی عبارت است از معادلات تعادل که یک سازه باید بر حسب متغیرهای طراحی اش برآورده کند.

بعضی از راهبردهای حل مسائل بهینه سازی غیر خطی نمی توانند قیود تساوی را در نظر بگیرند و تنها قیود نامساوی را در رابطه سازی می توان معرفی کرد. در چنین مواقعی می شود قید تساوی را با دو قید نامساوی که حد بالا و پایینی را تشکیل می دهند جایگزین کرد که در آنها حد بالا و پایین یکسان است. اما معمولاً افزایش تعداد قیود مطلوب نیست. راه دیگر در نظر گرفتن قیود تساوی در چنان موقعیتهایی را بعداً در فصل ۵ مورد بحث قرار خواهیم داد.

## ۱.۲.۴ رابطه سازی استاندارد

نمادهایی که در این کتاب برای متغیرهای طراحی، تابع هدف و قیود به کار می رود در رابطه سازی مسأله بهینه سازی زیر خلاصه شده است. در این کتاب ما درباره مسائلی بحث می کنیم که تنها یک تابع هدف دارند.

$$\begin{aligned} & \text{تابع} \\ & \text{رابطه به} \end{aligned} \quad (1.2.5) \quad \begin{aligned} f(\mathbf{x}) \\ g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \\ h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, n_e, \end{aligned}$$

مینیم کنید.

در حالی که  $x$  نشان دهنده بردار متغیرهای طراحی با مؤلفه های  $i = 1, \dots, n$ ،  $x_i$  می باشد. فرض می شود که قیود تساوی  $h_j(x)$  و قیود نامساوی  $g_j(x)$  به شکل (۱.۲.۵) تبدیل شده اند. این که مسأله بهینه سازی یک مسأله مینیمم سازی باشد و نه یک ماکزیمم سازی یک محدودیت نیست، زیرا به جای ماکزیمم سازی یک تابع همیشه این امکان وجود دارد که منفی آن مینیمم شود. به طور مشابه، اگر یک نامساوی از نوع کوچکتر مساوی داشتیم یعنی

$$g_j(x) \leq 0 \quad (1.2.6)$$

می توانیم با ضرب معادله (۱.۲.۶) در  $-1$ ، آن را به نوع بزرگتر مساوی صفر تبدیل کنیم. هر چند در اکثر کتابها مسائل مینیمم سازی را به جای ماکزیمم سازی مطرح می کنند، ولی بیشتر آنها نامساویهای از نوع کوچکتر مساوی را بر بزرگتر مساوی ترجیح می دهند. این ترجیح نماد قراردادی بعضی نتیجه های این کتاب را متأثر می کند و خواننده باید هنگام مقایسه جوابها با کتابهایی که نماد نامساوی مخالف را به کار می برند به این موضوع توجه داشته باشد.

یک مسأله بهینه سازی را خطی گویند، هنگامی که هم تابع هدف و هم قیود، توابع خطی از متغیرهای طراحی  $x_i$  باشند، یعنی مسأله خطی را می توان به شکل زیر بیان کرد:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = c^T x. \quad (1.2.7)$$

مسائل بهینه سازی خطی با شاخه ای از برنامه ریزی ریاضی که برنامه ریزی خطی نامیده می شود، حل می شوند. مسأله بهینه سازی غیر خطی گفته می شود اگر تابع هدف یا قیود، توابع غیر خطی از متغیرهای طراحی باشد.

### مثال ۱.۲.۲

خرپای سه میله ای شکل ۱.۲.۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید خرپا از فولاد (چگالی  $0.29 \text{ lb/in}^3$ ) ساخته شده، و می خواهیم جرم را مینیمم کنیم مشروط به این که تنش در اعضا، در کشش یا فشار، از  $30000 \text{ psi}$  تجاوز نکند. همچنین یک قید جانی که مینیمم مساحت هر عضو  $0.1 \text{ in}^2$  است اعمال می کنیم. متغیرهای طراحی مساحتهای سطح مقطع  $A_1$ ،  $A_2$  و  $A_3$  و مختصات افقی  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$  نقاط

بخش ۱.۲: مبانی رابطه سازی مسأله ۴۹

تکیه گاهی است. نقطه اثر نیرو ثابت فرض می شود. ما دنبال رابطه سازی استاندارد به شکل (۱.۲.۵) برای این مسأله بهینه سازی هستیم. نوشتن تابع هدف بر حسب متغیرهای طراحی ساده است.

$$m = 0.29(A_1L_1 + A_2L_2 + A_3L_3),$$

در حالی که

$$L_i = \sqrt{x_i^2 + 100^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

برای محاسبه قید تنش معرفی تغییر مکانهای  $u$ ،  $v$  در نقطه اعمال نیرو به عنوان متغیرهای واسطه راحت تر است. می توان نشان داد که معادله هایی که حاکم بر  $u$ ،  $v$  هستند عبارتند از:

$$\begin{aligned} k_{11}(x)u + k_{12}(x)v &= 10,000, \\ k_{12}(x)u + k_{22}(x)v &= 0, \end{aligned}$$

در حالی که

$$\begin{aligned} k_{11}(x) &= E \sum_{i=1}^3 \frac{A_i x_i^2}{L_i^3}, \\ k_{12}(x) &= -E \sum_{i=1}^3 \frac{100 A_i x_i}{L_i^3}, \\ k_{22}(x) &= E \sum_{i=1}^3 \frac{10,000 A_i}{L_i^3}, \end{aligned}$$

$E$  عبارت است از ضریب ارتجاعی فولاد ( $30 \times 10^6$  psi) تنشهای اعضا بر حسب  $u$ ،  $v$  عبارت است از

$$\sigma_i = E(-u x_i / L_i^2 + 100 v / L_i^2), \quad i = 1, 2, 3.$$

براساس تحلیل بالا، یک راه رابطه سازی مسأله بهینه سازی به شکل استاندارد این است که  $u$ ،  $v$  را به فهرست متغیرهای طراحی اضافه کنیم. رابطه سازی عبارت است از:

$$\text{مقدار} \quad m = 0.29(A_1L_1 + A_2L_2 + A_3L_3) \quad \text{را}$$

$$\begin{aligned} h_1 &= k_{11}u + k_{12}v - 10\,000 = 0, & \text{مشرط به} \\ h_2 &= k_{12}u + k_{22}v = 0, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \text{(قیود کشش)} \quad g_i &= 30\,000 - E(-ux_i + 100v)/L_i^2 \geq 0, \\ \text{(قیود فشار)} \quad g_{i+3} &= E(-ux_i + 100v)/L_i^2 + 30\,000 \geq 0, \\ \text{(قیود مینیم مساحت)} \quad g_{i+6} &= A_i - 0.1 \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

مینیمم کنید.

آن گاه مسأله ای با هشت متغیر طراحی ( $u, v$  و  $x_i, i = 1, 2, 3$ )، دو قید تساوی و نه قید نامساوی داریم. این رابطه سازی که متغیرهای پاسخ  $u$  و  $v$  و متغیرهای ابعاد سازه را به عنوان متغیرهای طراحی شامل می شود تحلیل و طراحی همزمان می نامند. بسیاری از رابطه سازی های بهینه سازی سازه ها متغیرهای پاسخ را با استفاده از معادله های تعادل حذف می کنند. در این مسأله می توانیم از دو قید تساوی  $u$  و  $v$  را بدست آورده و دو قید تساوی و دو متغیر طراحی را حذف کنیم. رابطه سازی جدیدی که در آن تغییر مکانها به عنوان متغیر طراحی وجود ندارد در بهینه سازی سازه ها بسیار معمولتر است. در نتیجه به ندرت با مسائل بهینه سازی سازه ها که شامل قیود تساوی باشد برخورد می کنیم. • • •

هنگامی که رابطه سازی مثال ۱.۲.۲ بالا به شکل استاندارد درآمد، در حل این مثال، حتی با به کار بردن بسیاری از فنون حل استاندارد، ممکن است با مشکلات عددی مواجه شویم. دلیل این مواجهه تفاوت های بسیار بزرگ بین مقادیر متغیرهای طراحی مختلف و قیدهاست. ابتدا متغیرهای طراحی را در نظر بگیرید. متغیرهای طراحی مساحت انتظار می رود که از مرتبه نسبت نیروی اعمال شده به تنش مجاز باشند که بین  $0.1 \text{ in}^2$  تا  $1 \text{ in}^2$  است. از طرف دیگر، انتظار می رود که متغیرهای طراحی مختصات از مرتبه  $100 \text{ in}$  باشند.

سپس قیود را در نظر بگیرید. اگر تغییر مکانهای  $u$  و  $v$  ده درصد پایین تر یا بالاتر از مقدار بهین شان باشند انتظار می رود که قیود تساوی  $h_1, h_2$  از مرتبه بزرگی ده درصد نیروی اعمال شده باشند. به طور مشابه قیود نامساوی  $g_1$  تا  $g_6$  از مرتبه ده درصد تنش مجاز،  $30000 \text{ psi}$  خواهند بود. قیود حداقل مساحت  $g_7$  تا  $g_9$  نیز از مرتبه  $0.1 \text{ in}^2$  خواهند بود.

از آن جا که بسیاری از بسته های نرم افزاری بهینه سازی از نظر عددی توانمند نیستند، خوب است که

## بخش ۱.۳: فرایند حل ۳۱

چنین تغییرات وسیعی در مقدار متغیرهای طراحی و قیود را با نرمال سازی از بین برد. متغیرهای طراحی را با مقیاس بندی می شود به مرتبه ۱ نرمال سازی کرد. در مثال ۱.۲.۲ متغیرهای طراحی مختصات را می شود با فاصله عمودی داده شده (100in) نرمال سازی کرد، و متغیرهای طراحی مساحت را با یک مساحت اسمی،  $A_0 = 1.3 \text{ in}^2$  که نسبت بار اعمال شده به تنش مجاز است.

قیود را نیز می شود به شکل مشابهی نرمال ساخت. معمولاً قیود نامساوی را می توان با مقداری مجاز که برای تشکیل آنها استفاده شده نرمال ساخت. بنابراین قیدی که مؤلفه تنش  $\sigma$  باید از یک تنش مجاز  $\sigma_{al}$  کوچکتر باشد، بیشتر به شکل زیر نوشته می شود:

$$g = \sigma_{al} - \sigma \geq 0. \quad (1.2.8)$$

مقدار قید به واحدهای استفاده شده بستگی دارد، و می تواند بزرگ یا کوچک باشد. قید می تواند به شکل زیر نرمال شود.

$$\bar{g} = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_{al}} \geq 0. \quad (1.2.9)$$

اکنون مقدار قید از مرتبه یک است و به واحد استفاده شده بستگی ندارند.

## ۱.۳ فرایند حل

روشهای بهینه سازی مطرح شده در این کتاب، اکثراً فنون جست و جوی عددی اند. این فنون با یک طراحی اولیه شروع می شوند و با گامهای کوچکی مقدار تابع هدف یا میزان مقبولیت قیود، و یا هر دو را بهبود می بخشند. هنگامی که نتوان بدون نقض قید، در بهبود بخشیدن به تابع هدف پیشرفتی حاصل کرد، جست و جو متوقف می شود. بعضی از روشهای بهینه سازی هنگامی که بهبود تابع هدف بسیار کند می شود متوقف می شوند. راه دیگر بررسی بهینگی استفاده از شرایط لازم، که شرایط کان-تاکر (فصل ۵ را ببینید) نامیده می شود، است که باید در مینیم صدق کنند. برای نشان دادن تعداد متغیرهای طراحی ما معمولاً از  $n$  استفاده می کنیم، پس جست و جو برای بهین در یک فضای  $n$  بعدی از متغیرهای حقیقی  $R^n$  انجام می شود. هر نقطه از این فضا امکان یک طراحی را تشکیل می دهد.

در مسائل بهینه سازی سازه ها، قیدهایی مانند تنشها، تغییر مکانها یا قیود بسامد روی طراحی اعمال

می شوند که مهمند. یعنی چنین قیدهایی طراحی نهایی را تحت تأثیر قرار می دهند و تابع هدف را وادار می سازند که نسبت به حالت بدون قید، مقدار بالاتری داشته باشد. به عنوان مثال، در مثال ۱.۲.۲، اگر قیود تنش برداشته شود، تمامی مساحت‌های سطح مقطعها به مقدار مینیمم خود یعنی  $0.1 \text{ in}^2$  کاهش می یابند و مختصات نقاط ۱، ۲ و ۳ مستقیماً بالای نقطه ۴ قرار می گیرند و طولهای هر سه عضو مقدار مینیمم 100in خواهد شد و متناظر با آن جرم کل 8.71b می شود و تنش های به وجود آمده در اعضا به سمت بی نهایت میل می کند. چون ما نمی توانیم تنش بی نهایت داشته باشیم، قیود تنش را اعمال می کنیم، و انتظار داریم که جرم بهین از 8.71b بیشتر باشد، و در طراحی بهین، تنش دست کم در یک عضو برابر با تنش مجاز حداکثر 30000psi باشد.

به طور کلی، فضای متغیرهای طراحی را به ناحیه قابل قبول و غیر قابل قبول تقسیم می کنیم. ناحیه قابل قبول همه نقاط طراحی امکان پذیر که همه قیود را برآورده می کنند را شامل می شود. ناحیه غیر قابل قبول مجموعه نقاط طراحی است که دست کم یکی از قیود را نقض می کنند. از آن جا که ما انتظار داریم قیدها، طراحی بهین را تحت تأثیر قرار دهند، در طراحی بهین بعضی از قیدها بحرانی خواهند بود. این وضعیت معادل این است که بهین در مرز بین ناحیه قابل قبول و غیر قابل قبول باشد. قیدهای نامساوی در رابطه سازی استاندارد معادله (۱.۲.۵) وقتی بحرانی هستند که برابر صفر باشند. این قیدها را قیدهای فعال نیز می نامند، در حالی که قیدهای دیگر غیر فعال یا سست اند. به عنوان مثال، قید حداقل مساحت  $g_7$  از مثال ۱.۲.۲ را در نظر بگیرید. برای  $A_1 = 0.1 \text{ in}^2$  قید فعال و برای  $A_1 = 0.11 \text{ in}^2$  قید سست، و برای  $A_1 = 0.09 \text{ in}^2$  قید نقض شده است.

می توان این طور برداشت شهودی کرد که در واقع فرض می شود، تمام قیود فعال در طراحی بهین مؤثرند، یعنی اگر آنها را برداریم تابع هدف می تواند بهبود یابد. این مطلب همیشه درست نیست. امکان دارد که قیدی فعال باشد و در صورت برداشتن آن طراحی بهین تغییری نکند. بسیاری از روشهای بهینه سازی همراه محاسبه طرح بهین تعدادی عدد را، هر کدام برای یک قید فعال، بدست می آورند که ضربگرهای لاگرانژ نامیده می شوند (فصل ۵ را ببینید) و معیار حساسیت طراحی بهین نسبت به تغییر هر یک از قیدها را اندازه گیری می کند. وقتی ضربگرهای لاگرانژ مربوط به یک قید صفر است، یعنی، با تقریب مرتبه یک، برداشتن این قید تأثیری در مقدار بهین تابع هدف ندارد.

این ضربگرها اطلاعات طراحی بسیار مهمی نیز می دهند زیرا در بسیاری از کاربردهای بهینه سازی

## بخش ۱.۴: رابطه سازی تحلیل و طراحی ۳۳

سازه ها در انتخاب پارامترهایی که قیدها را مشخص می کنند مانند حدود تنش یا مقادیر حداقل متغیرها، تا اندازه ای آزادی عمل وجود دارد. به عنوان مثال، وقتی قیدهای تنش را در یک سازه فولادی اعمال می کنیم، از پیش شماره فولادی که به کار می رود انتخاب می کنیم. برای تخمین اثر تغییر در حد تنش روی تابع هدف می توانیم از ضربگرهای لاگرانژ استفاده کنیم. اگر ببینیم طراحی بهین به این مقدار حد تنش خیلی حساس است، می توانیم از فولادی با شماره بهتر استفاده کنیم.

یکی از مسائل اساسی در بیشتر روشهای حل بهینه سازی بدست آوردن مجموعه قیود فعال است. اگر روش حل به شکلی است که هنگام جستجو همه قیود را در نظر می گیرد، هزینه محاسبات بهینه سازی به طور چشمگیری اضافه می شود. اگر از طرف دیگر، روش حل تنها قیود فعال یا نزدیک به فعال را در طراحی آزمایشی در نظر بگیرد، به خاطر نوسان در مجموعه قیود فعال ممکن است همگرایی فرایند بهینه سازی با خطر مواجه شود. معمولاً بیشتر روشهای بهینه سازی را با یک راهبرد مجموعه فعال، که برای مشخص کردن مجموعه قیودی که باید در هر طراحی آزمایشی در نظر گرفته شود به کار می رود، کامل می سازند.

هنگام فرایند بهینه سازی ما از یک نقطه طراحی به نقطه دیگر حرکت می کنیم. در میان فنون بهینه سازی متعدد، اکثر آنها برای حرکت، چهار گام اساسی را بر می دارند. گام اول انتخاب مجموعه قید فعال است که در بالا بحث شد. گام دوم محاسبه جهت جست و جوست بر اساس تابع هدف و مجموعه قید فعال. بعضی از روشها (مانند روش تصویرگردان) جهتی را جست و جو می کنند که بر مرز قید فعال مماس باشد. روشهای دیگری مانند جهت قابل قبول یا تابع جریمه داخلی جهتی را جست و جو می کنند که از مرز قید دور شوند. گام سوم عبارت است از تعیین مقدار حرکت در جهتی که در گام قبلی مشخص شده است. گام سوم اغلب با فرایندی که جست و جوی خطی یک بعدی نامیده می شود به انجام می رسد، زیرا به دنبال یافتن مقدار یک عدد اسکالر است که فاصله مقدار حرکت در امتداد جهت مورد نظر را تعیین می کند. گام آخر گام همگرایی است که مشخص می کند آیا حرکت دیگری لازم است یا خیر.

## ۱.۴ رابطه سازی تحلیل و طراحی

در یک طراحی عملی نوع رابطه سازی ریاضی مسأله طراحی سازه که باید به کار رود همیشه روشن



نیست. به عنوان مثال، تیر شکل ۱.۱.۱ را در نظر بگیرید و فرض کنید طراح می خواهد به یک طراحی با سختی بالا و جرم کم برسد. یک گزینه این است که طراح یک رابطه سازی تابع هدف چند گانه را که هم جرم  $m$  در معادله (۱.۱.۲) و هم تغییر مکان ماکزیمم  $w_{max}$ ، معادله (۱.۱.۳)، به طور همزمان مینیمم شوند. راه دیگر این است که وزنهایی مانند  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  به دو تابع هدف اختصاص داده شود و از آنها برای تشکیل یک تابع هدف مرکب  $\alpha_1 m + \alpha_2 w_{max}$  استفاده شود. راه سوم این است که جرم به عنوان تابع هدف در نظر گرفته شود و مقدار  $w_{max}$  به عنوان قید لحاظ گردد. بالاخره، راه دیگر این است که برای جرم یک حد بالا در نظر گرفته شود و تغییر مکان ماکزیمم به عنوان تابع هدف لحاظ گردد.

تمامی رابطه سازی های فوق برای هدف طراحی به وجود آوردن یک طراحی با استحکام و سبک وزن قابل قبول است. اما رابطه سازی ریاضی و دشواریهای حل کاملاً متفاوت است. به عنوان مثال، اگر در رابطه (۱.۱.۲) داشته باشیم  $P=1$ ، جرم یک تابع خطی از متغیر طراحی  $I(x)$  است ولی تغییر مکان ماکزیمم با آن رابطه خطی ندارد. بعضی از روشهای بهینه سازی غیرخطی وقتی هدف خطی و قیود غیرخطی اند بهتر کار می کنند و بعضی دیگر در موقعیتهایی که عکس آن باشد خوب کار می کنند. بنابراین انتخاب رابطه سازی بر اساس نرم افزار بهینه سازی در دسترس طراح صورت می گیرد.

رابطه سازی و حل مسأله بهینه سازی سازه ها نیز مهم است. زیرا در درجه اول، تحلیل باید هنگام فرایند بهینه سازی بارها تکرار شود و کاربرد روش حلی که از نظر محاسباتی ارزان باشد بسیار مهم است. بنابراین یک مدل اجزای محدود دقیق که معمولاً برای یک تحلیل سازه استفاده می شود، ممکن است برای بهینه سازی مناسب نباشد و شاید بهتر باشد که با یک مدل خام جایگزین گردد.

انتخاب فرایند حل تحلیل سازه نیز به طور مشابه ممکن است تحت تأثیر محیط بهینه سازی قرار گیرد. به عنوان مثال، بسامدهای ارتعاشی و تواترهای آن در یک سازه معمولاً با روش حل مقدار ویژه محاسبه می گردد. بعضی از این روشها از تقریب اولیه خوب بردار ویژه سود می برند و بعضی دیگر این طور نیستند. برای کاربرد در بهینه سازی سازه ها، روشهای دسته اول بهترند، زیرا بردارهای ویژه (تواترهای ارتعاش) وقتی طراحی تغییر مختصر می یابد به کندی تغییر می کنند. بنابراین بردارهای ویژه طراحی قبلی می توانند به عنوان تقریبهای اولیه خوبی برای بردارهای ویژه فعلی باشند.

بالاخره، در بعضی از حالتها، ترکیب تحلیل و طراحی سودمند است. این کار وقتی اتفاق می افتد که تحلیل سازه طبیعتی تکراری داشته باشد، مانند رفتار سازه های غیرخطی. چرخه های تحلیل و طراحی را

### بخش ۱.۵: روشهای کلی و ویژه ۳۵

می شود چنان ترکیب کرد که چرخه 'تحلیل برای هر چرخه' طرّاحی فقط بطور جزئی همگرا شود. (به عنوان مثال [33,32]). در بعضی از حالتها ترکیب چرخه های تحلیل و طرّاحی در یک چرخه 'واحد سودمند است. این روش تحلیل و طرّاحی همزمان در فصل ۱۰ بحث می شود.

### ۱.۵ روشهای کلی و ویژه

روشهای حلی که عموماً برای بدست آوردن طرّاحی بهین در بهینه سازی سازه ها به کار می رود را می شود به دو دسته 'مختلف تقسیم کرد. یک تقسیم بندی مهم روشهای حل، روشهای کلی و روشهای ویژه است. روشهای ویژه انحصاراً در بهینه سازی به کار می روند (گرچه بتوان آنها را در زمینه های دیگر نیز به کار برد). روشهای کلی که در مسائل بهینه سازی به کار می روند در زمینه ها و شاخه های متعدّد دیگری نیز به کار می روند. در آغاز مراحل توسعه بهینه سازی سازه ها، روشهای ویژه شهرت زیادی داشتند. این روشهای ویژه روشهایی بودند که بعضی از مسائل بهینه سازی سازه ای را در مقایسه با هر روش کلی دیگر به طور مؤثرتری حل می کردند.

موفقیت آمیزترین روشهای ویژه، فن طرّاحی تمام تنبیه است که در فصل ۹ بحث می شود. این روش برای طرّاحی سازه ای به کار می رود که تنها مقید به قید تنش باشد و برای سازه هایی که از یک نوع مصالح تشکیل شده باشند و اضافه وزن کمی دارند، خوب کار می کند.

شهرت روشهای ویژه در حال حاضر کم شده، زیرا محدودیتهای آنها روز به روز بیشتر آشکار می شود. رویکردی که در این کتاب در پیش گرفته شده تأکید روی روشهای کلی است و نه روی روشهای ویژه. روشهای کلی نه تنها مزیت کاربرد وسیعتر دارند، بلکه منابع وسیعتری برای آنها وجود دارد. پژوهشگران رشته های مختلف این روشها را پیوسته توسعه می دهند و پیاده سازی آنها را در نرم افزارها کارتر و قابل اطمینان تر می سازند.

علاوه بر کم رنگ بودن نقش روشهای خاص برای طرّاحی سازه ها ما بعضی از روشهای برنامه ریزی ریاضی مانند برنامه ریزی دینامیکی، برنامه ریزی هندسی و فنون کنترل بهین که در مسائلی به شکل خاص به کار می روند را نیز مورد بحث قرار نخواهیم داد. این روشها در مسایل طرّاحی سازه ها با موفقیت به کار رفته اند، اما به خاطر فضای خاص در نظر گرفته شده در آنها، در این جا مطرح نمی شوند. برای اطلاع بیشتر در مورد کاربرد این روشها در طرّاحی سازه ها خواننده به مراجع [34-36] ارجاع داده می شود.

مهمترین توجّهی که یک تحلیلگر سازه باید در استفاده از روشهای بهینه سازی کُلی داشته باشد این است که یک رابطه متقابل بین نرم افزار تحلیل سازه و نرم افزار بهینه سازی به وجود بیاورد. این رابطه متقابل سه عنصر رابطه سازی، حسّاسیت و تقریب دارد و یکی از هدفهای مهم این کتاب نیز پرداختن به این رابطه متقابل است.

رابطه سازی یک مسأله طرّاحی سازه در موفقیت فرایند طرّاحی نقش مهمی دارد. یک رابطه سازی ضعیف می تواند به نتیجه های ضعیف و یا هزینه های محاسباتی بسیار زیاد غیر قابل قبول بینجامد. به عنوان مثال، فصل ۳، مسائل طرّاحی سازه، مختلفی را مورد بحث قرار می دهد که می توانند با یک تابع هدف خطی و قیود خطی رابطه سازی شوند. دلیل سودمند بودن رابطه سازی خطی، روشهای بسیار پیشرفته و نرم افزارهایی است که برای حلّ مسایل خطی وجود دارد.

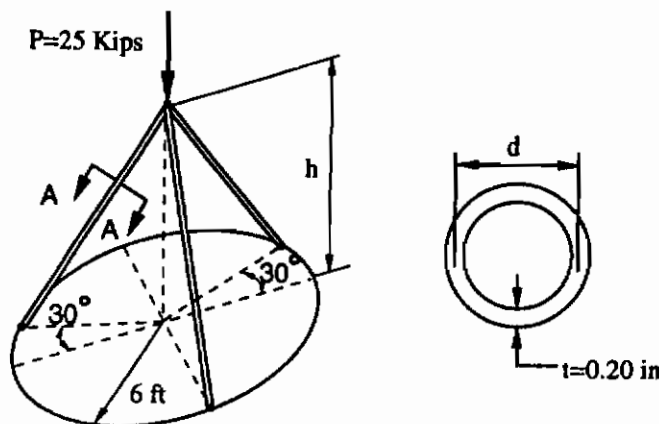
محاسبه مؤثر و کارای مشتقات قیود و تابع هدف نسبت به متغیرهای طرّاحی، که اغلب به عنوان مشتقات حسّاسیت مطرح می شوند در فصلهای ۷ و ۸ بحث می شوند. بیشتر الگوریتمهای بهینه سازی عمومی چنان مشتقهایی را نیاز دارند و محاسبه آنها در بهینه سازی سازه هایی که با مدلهای اجزای محدود پیچیده مدل می شوند اغلب مهمترین هزینه محاسباتی است. این مشتقها برای تشکیل تقریبهای قید نیز می توانند به کار روند که این تقریپها را می توان در بخشی از فرایند بهینه سازی به جای ارزیابی قید دقیق که پرهزینه است به کار برد. کاربرد تقریب قید در فصل ۶ بحث می شود.

اهمیت محاسبه دقیق و کارای مشتقات حسّاسیت و به کارگیری تقریب در قید اکنون مورد توجّه بیشتر متخصصان بهینه سازی سازه هاست. ما معتقدیم که این موضوع موفقیت و هزینه کُلی محاسباتی فرایند بهینه سازی را حتّی بیشتر از انتخاب نوع روش بهینه سازی متأثر می سازد.

## ۱.۶ تمرینها

۱- یک سه پایه که در شکل ۱.۶.۱ نشان داده شده از سه لوله فولادی ساخته شده است. انتهای این لوله ها روی دایره ای به شعاع ۶ فوت و با زاویه  $120^\circ$  نسبت به هم قرار دارند. یک نیروی به طرف پایین عمودی 25kips در بالا اعمال می شود. لازم است که وزن سه پایه چنان مینیم شود که سه پایه از نظر کماتش اولیه<sup>۱</sup>، کماتش محلی و تسلیم شدن مطمئن باشد. فرض کنید  $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$

1) Euler buckling



شکل ۱.۶.۱ یک سه پایه تحت تأثیر بار عمودی

$\sigma_{yield} = 60 \times 10^3 \text{ psi}$  و تنش کمانش محلی را از رابطه زیر بر حسب psi محاسبه کنید.

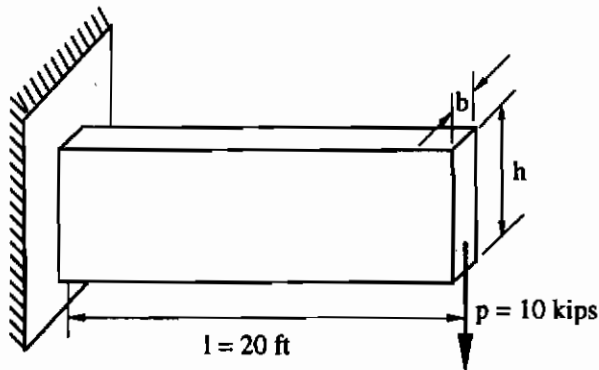
$$\sigma_{cr} = 36 \times 10^6 \left( \frac{t}{d} \right).$$

قیود را در یک فضای طرّاحی دو بعدی  $d$  (قطر متوسط لوله) و  $h$  رسم کنید. ناحیه های قابل قبول و غیر قابل قبول را مشخص کنید، ترازهای تابع هدف را بکشید و جواب بهین را نشان دهید.

۲- یک تیر مستطیلی نازک با مقطعی به ابعاد  $b$  و  $h$  و طول 20ft در دیوار محکم شده است و نیروی  $p=10\text{kips}$  به انتهای آزاد آن وارد می شود (شکل ۱.۶.۱). علاوه بر شکست در اثر ضعف استحکام، چنان تیری می تواند در اثر چرخش حاصل از ناپایداری جانبی از بین برود. بار بحرانی برای تیری به طول  $l$  برابر است با

$$p_{cr} = 4.013 \sqrt{EI_{least} C / l^2},$$

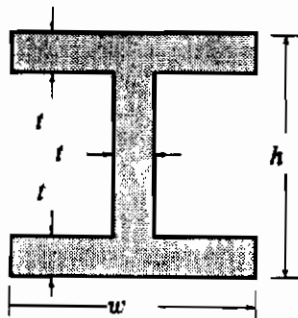
که در آن  $E$  ضریب ارتجاعی یانگ،  $I_{least}$  کوچکترین گشتاور ماند و  $C$  صلیبت پیچشی تیر است که عبارتست از  $G = 0.312hb^3$  که  $G$  ضریب صلیبت برشی است. تیری که وزن آن مینیمم باشد طرّاحی کنید که از نظر استحکام و چرخش مقاوم باشد. فرض کنید  $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ ،  $G = 12 \times 10^6 \text{ psi}$  و  $\sigma_{at} = 75 \text{ ksi}$



شکل ۱.۶.۲ یک تیر مستطیلی نازک

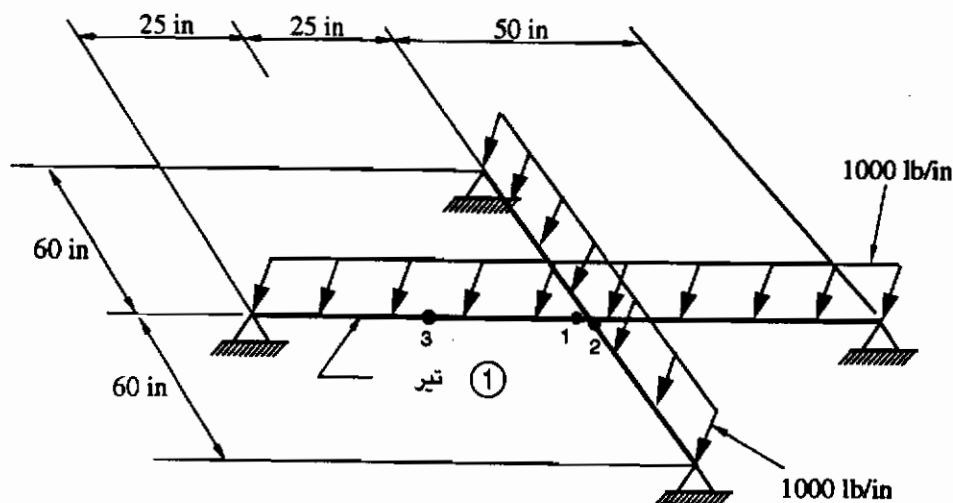
در کشش و فشار. جواب بهین را روی ترسیمه مشخص کنید.

۳- طراحی یک سطح مقطع I شکل را مانند شکل ۱.۶.۳ در نظر بگیرید که اهداف آن مینیمم شدن مساحت سطح مقطع و مینیمم شدن تنش نرمال حاصل از خمش حول محور خنثای افقی باشد. ضخامت بال و جان سطح مقطع ثابت و برابر  $t = 0.1 \text{ in}$  است. متغیرهای طراحی عبارتند از عرض  $w$  و ارتفاع  $h$  سطح مقطع. از روش ترسیمی طراحی هایی را که هر یک از هدفها را به تنهایی مینیمم می کنند بدست آورید، در صورتی که عرض و ارتفاع در محدوده  $0.1 \leq w$  و  $h \leq 10$  باشند. همچنین با استفاده از رویکرد تابع وزنی با وزنهای مساوی، و با استفاده از (۱.۲.۴) طراحیها را بیابید.



شکل ۱.۶.۳ طراحی سطح مقطع یک تیر I شکل

## بخش ۱.۶: تمرینها ۳۹



شکل ۱.۶.۴ یک شبکه ارتجاعی تحت تأثیر بار یکنواخت

۴- شبکه ای ارتجاعی از دو تیر یکنواخت و با مساحت‌های سطح مقطع  $A_1$  و  $A_2$  مطابق شکل ۱.۶.۴ تشکیل شده است. هر دو تیر تحت تأثیر بار گسترده  $1000 \text{ lb/in}$  قرار دارند. طراحی وزن مینیمم چنین سازه ای ابتدا توسط مازس و انادا<sup>۱</sup> [37] مطرح شد. تنش‌های ماکزیمم کششی و فشاری در مقاطع ۱، ۲، ۳ را بر حسب  $A_1$  و  $A_2$  بدست آورید. فرض کنید مدول مقطع  $z$  و گشتاور ماند  $I$  با روابط زیر به مساحت سطح مقطع مربوط می شوند.

$$z = \left( \frac{A}{1.48} \right)^{1.82}, \quad I = 1.007 \left( \frac{A}{1.48} \right)^{2.65}.$$

برای کشش و فشار تنش مجاز  $20000 \text{ psi}$  در نظر بگیرید و پنج قید و تابع هدف را رابطه سازی کنید. قیدها و تابع هدف را رسم کرده و ناحیه های قابل قبول و غیر قابل قبول را مشخص کنید. در مورد ویژگیهای ناحیه قابل قبول در مقایسه با دو مسأله قبلی بحث کنید. بهترین طراحی برای شبکه را بیابید.

## ۱.۷ مراجع

- [1] Wilde, D.J., Globally Optimal Design, John Wiley and Sons, New York, 1978.
- [2] Wasiutynski, Z., and Brandt, A., "The Present State of Knowledge in the Field of Optimum Design of Structures," Appl. Mech. Rev., 16 (5), pp. 341-348, May 1963.
- [3] Sheu, C.Y., and Prager, W., "Recent Developments in Optimum Structural Design," Appl. Mech. Rev., 21 (10), pp. 985-992, Oct. 1968.
- [4] Schmit, L.A. Jr., "Structural Synthesis 1959-1969: A Decade of Progress," in Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, University of Alabama Press, Huntsville, pp. 565-634, 1971.
- [5] Pierson, B.L., "A Survey of Optimal Structural Design Under Dynamic Constraints," Int. J. Num. Meth. Eng., 4, pp. 491-499, 1972.
- [6] Niordson, F.I., and Pedersen P., "A Review of Optimal Structural Design," in Theoretical and Applied Mechanics, Proceedings of the Thirteenth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, E. Becker and G. K. Mikhalov (eds.), pp. 264-278, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [7] Rao, S.S., "Optimum Design of Structures under Shock and Vibration Environment," Shock Vibr. Digest, 7 (12), pp. 61-70, Dec. 1975.
- [8] Olhoff, N. J., "A Survey of Optimal Design of Vibrating Structural Elements, Parts I and II," Shock Vibr. Digest, 8 (8&9), pp. 3-10, 1976.
- [9] Venkayya, V. B., "Structural Optimization: A Review and Some Recommendations," Int. J. Num. Meth. Eng., 13, pp. 203-228, 1978.
- [10] Lev, O. E., (ed.), Structural Optimization—Recent Developments and Applications, ASCE Committee on Electronic Computation, New York, 1981.
- [11] Schmit, L.A., "Structural Synthesis—its Genesis and Development," AIAA J., 19 (10), pp. 1249-1263, 1981.
- [12] Haug, E.J., "A Review of Distributed Parameter Structural Optimization Literature," in Optimization of Distributed Parameter Structures, E.J. Haug and J. Cea (eds.), Vol. 1, pp. 3-74, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, the Netherlands, 1981.
- [13] Ashley, H., "On Making Things the Best—Aeronautical Uses of Optimization," J. Aircraft, 19 (1), pp. 5-28, 1982.
- [14] Kruzelecki, J., and Zyczowski, M., "Optimal Structural Design of Shells—A Survey," SM Archives, 10, pp. 101-170, 1985.
- [15] Haftka, R. T., and Grandhi, R. V., "Structural Shape Optimization—A Survey," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 57, pp. 91-106, 1986.



- [16] Bushnell, D., Holmes A. M. C., Flaggs, D. L., and McCormick, P. J., "Optimum Design, Fabrication and Test of Graphite-Epoxy, Curved, Stiffened, Locally Buckled Panels Loaded in Axial Compression", in *Buckling of Structures* (ed. I. Elishakoff et al.) Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, pp. 61-131, 1988.
- [17] Kirsch, U., "Optimal Topologies of Structures," *Appl. Mech. Rev.*, 42, No. 8, pp. 223-239, 1989.
- [18] Friedmann, P. P., "Helicopter Vibration Reduction Using Structural Optimization with Aeroelastic/Multidisciplinary Constraints—A Survey," *J. Aircraft*, 28, No. 1, pp. 8-21, 1991.
- [19] Sobieszcanski-Sobieski, J., "Structural Optimization: Challenges and Opportunities," *Int. J. Vehicle Design*, 7, pp. 242-263, 1986.
- [20] Prasad, B., and Haftka, R. T., "Optimal Structural Design with Plate Finite Elements," *ASCE J. Structural Division*, 105, pp. 2367-2382, 1979.
- [21] Braibant, V., Fleury, C., and Beckers, P., "Shape Optimal Design: An Approach Matching C.A.D. and Optimization Concepts," Report SA-109, Aerospace Laboratory of the University of Liege, Belgium, 1983.
- [22] Edgeworth, F. Y., *Mathematical Physics*, London, England, 1881.
- [23] Pareto, V., *Manuale di Economia Politica*, Societa Editrice Libreria, Milano, Italy, 1906. Translated into English by A.S. Schwier as *Manual of Political Economy*, MacMillan, New York, 1971.
- [24] Zeleny, M., *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.
- [25] Stadler, W., "Natural Structural Shapes of Shallow Arches," *J. Appl. Mech.*, 44, pp. 291-298, 1977.
- [26] Stadler, W., "Natural Structural Shapes (The Static Case)," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 31, pp. 169-217, 1978.
- [27] Adali, S., "Pareto Optimal Design of Beams Subjected to Support Motions," *Computers and Structures*, 16, pp. 297-303, 1983.
- [28] Bendsøe, M.P., Olhoff, N., and Taylor, J.E., "A Variational Formulation for Multicriteria Structural Optimization," *J. Struct. Mech.*, 11 (4), pp. 523-544, 1984.
- [29] Stadler, W., "Applications of Multicriterion Optimization in Engineering and the Sciences," in *MCDM—Past decade and Future Trends*, (Zeleny M., ed.), JAI Press, Greenwich, Conn., 1984.
- [30] Stadler, W., (ed.), *Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences*, Plenum Press, New York, 1988.
- [31] Eschenauer, H., Koski, J., and Osyczka, A., *Multicriteria Design Optimization: Procedures and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1990.



- [32] Wu, C.C., and Arora, J.S., "Simultaneous Analysis and Design Optimization of Nonlinear Response," Engineering with Computers, 2, pp. 53-63, 1987.
- [33] Haftka, R.T., "Integrated Analysis and Design", AIAA J., 27, 11, pp.1622-1627, 1989.
- [34] Carmichael, D.G., Structural Modeling and Optimization, Halstead Press, England, 1981.
- [35] Palmer, A.C., "Optimal Structural Design by Dynamic Programming," J. Struct. Div. ASCE, 94, No. ST8, pp. 1887-1906, 1968.
- [36] Hajela, P., "Geometric Programming Strategies in Large-Scale Structural Synthesis", AIAA J., 24 (7), pp. 1173-1178, 1986.
- [37] Moses, F., and Onoda, S., "Minimum Weight Design of Structures with Applications to Elastic Grillages", Int. J. Num. Meth. Eng., 1, pp. 311-331, 1969.

ابزارهای بهینه سازی کلاسیک که برای یافتن مینیمم و ماکزیمم توابع و تابعی ها بکار می روند، کاربرد مستقیمی در زمینه 'بهینه سازی سازه ها دارند. کلمه 'ابزارهای کلاسیک' در این جا به این خاطر به کار می رود که فنون کلاسیک حساب دیفرانسیل معمولی و حساب تغییراتی را در بر گیرد. با استفاده از این دو فن، جوابهای دقیق تعدادی از مسائل ساده 'نامقید و یا با قید تساوی در مقالات بدست آمده است. باید یادآور شد که چنان مسائلی اغلب نتیجه 'فرضیات ساده شونده ای هستند که واقعیت ندارند و به شکلهای موقعیتهای غیر منطقی می انجامد. با این همه، در نظر گرفتن چنان مسائلی تنها یک تمرین علمی محض نیست بلکه در فرایند حل بسیاری از مسائل واقعی مفید است.

در سالهای اخیر توجه به کاربرد ابزارهای کلاسیک به ویژه روشهای تغییراتی، در بهینه سازی سازه ها افزایش یافته است. رابطه سازی ریاضی دسته 'وسیعی از سازه ها تحت عنوان مسائل بهینه سازی با روشهای تغییراتی انجام می شود. به علاوه، مطالعه 'مسائل کلاسیک نه تنها برای تأکید اصول فنون روشهای کلاسیک لازم است، بلکه به عنوان یک ضرورت اساسی در بهینه سازی سازه ها مطرح است. صورت کامل جوابهای دقیق مسائل کلاسیک به عنوان اعتبار بخشی جوابهای بدست آمده از فنون عمومی تر عددی تقریبی به کار می روند. از آن مهمتر، بهینه سازی کلاسیک شاید بهترین راهکاری باشد که دانشجوی بهینه سازی سازه ها بتواند به سؤال وجود و یگانگی طراحیهای بهین و مشخص کردن شرایط لازم و کافی بهینگی پاسخ دهد. چنین سؤالاتی تنها در ساده ترین مسائل بهینه سازی مانند آنچه در این فصل در نظر گرفته می شود، می تواند پاسخ داده شود.

## ۲.۱ بهینه سازی با استفاده از حساب دیفرانسیل

در غیاب معادلات قید، یک تابع هدف به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  از  $n$  متغیر طراحی مستقل، در صورتی یک مقدار ماکزیمم یا مینیمم در داخل فضای طراحی  $R^n$  دارد که فقط در ازای مقادیر متغیرهای طراحی  $x^*$ ،  $n$  مشتق جزئی

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad (2.1.1)$$

به طور همزمان صفر باشند. این شرط لازم برای ایستاد بودن نقطه  $x^*$  است. در فصلهای بعدی خواهیم دید که این ویژگی یکی از ابزارهای ارزشمند یافتن جواب بهین است. برای یک تابع با مقادیر اسکالر، بردار مشتقات اول که آن را بردار گرادیان  $\nabla f$  می نامیم، برای یافتن جهت جست و جو در الگوریتمهای بهینه سازی به کار می رود.

برای بدست آوردن شرط کافی برای فرین بودن یک نقطه ایستاد مانند  $x^*$  لازم است که ماتریس مشتقات دوم  $H$  تابع هدف ارزیابی گردد. ماتریس مشتقات دوم را ماتریس هسیان می نامند و به شکل زیر تعریف می شود

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \quad (2.1.2)$$

می توان ثابت کرد که اگر ماتریس مشتقات دوم در نقطه  $x^*$  معین مثبت باشد، آن گاه نقطه ایستاد یک مینیمم است و اگر معین منفی باشد نقطه ایستاد یک ماکزیمم است [1]. یک ماتریس متقارن  $H$  را معین مثبت (منفی) می گویند اگر شکل درجه دو  $Q = x^T H x$  برای هر  $x$  مثبت (منفی) باشد و تنها در  $x=0$  صفر باشد. بررسی محاسباتی معین مثبت یا منفی بودن یک ماتریس شامل دترمینانهای کهادهای اصلی  $H_i (i=1, \dots, n)$  می شود. کهادهای اصلی  $H_i$  رشته ای از زیر ماتریسهای مربعی از  $H$  از مرتبه  $i$  هستند که قطر اصلی آنها در امتداد قطر اصلی ماتریس  $H$  است. ماتریس  $H$  معین مثبت است اگر دترمینان همه کهادهای اصلی واقع شده در گوشه سمت چپ بالای ماتریس مثبت باشند و معین منفی است اگر  $H$  معین مثبت باشد. به همین ترتیب،  $-H$  معین مثبت است اگر  $H_i$  منفی و کهادهای اصلی بعدی،

بخش ۲.۱: بهینه سازی با استفاده از حساب دیفرانسیل ۲۵

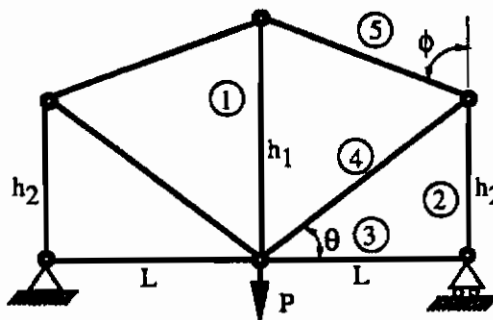
$H_2, H_3, \dots, H_n$  یک در میان مثبت و منفی باشند [1]. خاصیت دیگر ماتریسهای معین مثبت (منفی) نیز می تواند برای بررسی مورد استفاده قرار گیرد. یک ماتریس متقارن معین مثبت (منفی) است اگر و تنها اگر مقادیر ویژه اش مثبت (منفی) باشند.

یک ماتریس متقارن  $H$  را نیمه معین مثبت گویند اگر شکل درجه دو  $Q = x^T H x$  به ازاء هر  $x$  نامنفی باشد. این حالت وقتی اتفاق می افتد که مقادیر ویژه ماتریس نامنفی باشند. متأسفانه، شرط مورد انتظار نامنفی بودن کهادهای اصلی برای نیمه معین مثبت بودن کافی نیست. اگر ماتریسی نیمه معین مثبت باشد و معین مثبت نباشد، آن گاه دست کم یک  $x \neq 0$  وجود دارد که شکل درجه دوم صفر بوده، و دست کم یک کهاد اصلی صفر است و در نتیجه ماتریس منفرد و حداقل یک مقدار ویژه نیز صفر است. در این حالت مشتقات مرتبه بالاتر تابع  $f$  برای شرایط کافی یک مینیمم مورد نیاز است. به طور مشابه، وقتی  $-H$  نیمه معین مثبت است، آن گاه  $H$  نیمه معین منفی است. اگر  $H$  نیمه معین منفی باشد و نه معین منفی، برای برقراری شرایط کافی یک ماکزیمم، مشتقات مرتبه بالاتر مورد نیاز است. بالآخره، وقتی  $H$  نه نیمه معین مثبت و نه نیمه معین منفی است، نامعین نامیده می شود. در آن حالت، نقطه ایستانه مینیمم است و نه ماکزیمم، بلکه یک نقطه 'زینی' است.

دو مثال ساده زیر، استفاده از حساب دیفرانسیل در یافتن سازه بهین را تشریح می کند.

### مثال ۲.۱.۱

سازه خرابای معین ایستایی متقارن نشان داده شده در شکل (۲.۱.۱) باید با تغییر ارتفاعهای  $h_1$  و  $h_2$  از اعضای عمودی برای مینیمم شدن وزن طراحی شود. چون خرپا از نظر ایستایی معین است نیروی اعضا از مساحت سطح مقطعها مستقل است، بنابراین مساحتها تا هر عضو تمام تنیده شود (تنش در آن



شکل ۲.۱.۱ خرابای تمام تنیده با وزن مینیمم

برابر تنش مجاز  $\sigma_o$  باشد) می تواند کاهش یابد.

برای بارگذاری نشان داده شده در شکل، نیرو در هر عضو می تواند بر حسب هندسه سازه به شکل زیر

بیان شود

$$F_1 = \frac{h_1 - h_2}{h_1} P, \quad F_2 = -\frac{P}{2}, \quad F_3 = 0, \quad (2.1.3)$$

$$F_4 = \frac{(h_2^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}}{2h_1} P, \quad F_5 = -\frac{[(h_1 - h_2)^2 + L^2]^{\frac{1}{2}}}{2h_1} P. \quad (2.1.4)$$

اگر هر عضو بخواهد تمام تنیده باشد، مساحت سطح مقطع اعضای  $A_i$  می تواند با نیرویی که توسط

عضو تحمل می شود با رابطه زیر مربوط شود

$$A_i = \frac{|F_i|}{\sigma_o}, \quad i = 1, \dots, 9. \quad (2.1.5)$$

از رابطه (۲.۱.۳) مساحت سطح مقطع  $A_3$  از اعضای افقی صفر می شود. اما بر اساس ملاحظات

پایداری فرض می شود این اعضا یک حداقل مساحت  $A_{min}$  دارند. میزان مشارکت وزن این اعضا در وزن

کل سازه از متغیرهای طراحی  $h_1$  و  $h_2$  مستقل است و برای مسأله مینیم سازی از آنها چشم پوشی

می شود. حجم کلی مصالح در سازه خرابای باقی مانده برابر است با جمع حاصلضرب مساحت های سطح

مقطعه ها در طول اعضا که می تواند بر حسب متغیرهای مجهول بیان شود. می توان نشان داد که حجم کلی

باقیمانده برابر است با

$$V = 2 \frac{P}{\sigma_o} \left[ h_1 - h_2 + \frac{h_2^2}{h_1} + \frac{L^2}{h_1} \right]. \quad (2.1.6)$$

با مشتق گیری از حجم نسبت به متغیرهای مجهول داریم

$$\frac{\partial V}{\partial h_1} = 2 \frac{P}{\sigma_o} \left( 1 - \frac{h_2^2}{h_1^2} - \frac{L^2}{h_1^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial h_2} = 2 \frac{P}{\sigma_o} \left( -1 + \frac{2h_2}{h_1} \right) = 0. \quad (2.1.7)$$

مقادیر بهین ارتفاعها عبارت است از

$$h_1^* = \frac{2}{\sqrt{3}} L, \quad h_2^* = \frac{1}{\sqrt{3}} L, \quad (2.1.8)$$

و مساحت های سطح مقطعه های اعضا برابر است با

بخش ۲.۱: بهینه سازی با استفاده از حساب دیفرانسیل ۲۷

$$A_1 = A_2 = A_4 = A_5 = \frac{P}{2\sigma_0}. \quad (2.1.9)$$

ماتریس مشتقات دوم تابع هدف برای مسأله عبارت است از

$$H = 2 \frac{P}{\sigma_0} \begin{bmatrix} (2/h_1^3)(h_2^2 + L^2) & -2h_2/h_1^2 \\ -2h_2/h_1^2 & 2/h_1 \end{bmatrix}, \quad (2.1.10)$$

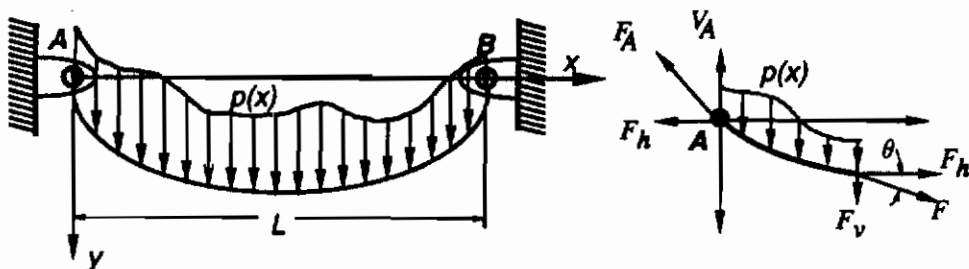
که در مقادیر بهین متغیرهای طراحی برابر است با

$$H^* = 2 \frac{P \sqrt{3}}{\sigma_0 L} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.1.11)$$

ماتریس  $H^*$  معین مثبت است (کهادهای اصلی را بررسی کنید). بنابراین، شرط کافی بهینگی طراحی برقرار است.

### مثال ۲.۱.۲

یک کابل سازه ای که نمی تواند اضافه طول پیدا کند با سختی خمشی صفر در نظر بگیرید مانند شکل (۲.۱.۲). کابل با یک نیروی افقی  $F_h$  در انتهای آن کشیده می شود که دو نقطه انتهایی با فاصله  $L$  از یکدیگر قرار دارند و یک بار گسترده عمودی با شدت  $p(x)$  را تحمل می کند. از آن جا که مساحت سطح مقطع کابل می تواند در امتداد طول تغییر کند، تنش محوری برابر با تنش مجاز  $\sigma_0$  در نظر گرفته می شود. مقدار بهین کشش افقی  $F_h$  را که برای یک بار یکنواخت  $p(x) = p_0$  حجم کل مصالح کابل را مینیمم می سازد بدست آورید.



شکل ۲.۱.۲ طراحی کابل سازه ای

## ۲۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

با صرف نظر کردن از وزن کابل، معادله های تعادل در جهت افقی و عمودی کابل را به دست می آوریم

$$F \cos \theta = F_h = \text{ثابت}, \quad \text{و} \quad F_h \frac{d^2 y}{dx^2} = -p(x), \quad (2.1.12)$$

که در آن  $\theta$  زاویه بین محور افقی  $x$  و مماس بر مختصات کمان  $s$  است بطوری که  $\cos \theta = dx/ds$ . برای یک بارگذاری یکنواخت، از دومین معادله تعادل می توان دو بار انتگرال گرفت و از شرط صفر بودن تغییر مکانها در دو انتها استفاده کرد و تغییر مکان عمودی در امتداد طول کابل را بدست آورد. داریم:

$$y = \frac{p_0 L^2}{2 F_h} \left[ \left( \frac{x}{L} \right) - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right]. \quad (2.1.13)$$

حجم کل مصالح که در کابل باید مینیمم شود برابر است با

$$V = \int_0^L dV, \quad (2.1.14)$$

در حالی که

$$dV = A(s) ds. \quad (2.1.15)$$

با فرض این که مساحت سطح مقطع باید تمام تنیده باشد،  $A(s) = F/\sigma_0$ ، پس حجم کل عبارت است از

$$V = \int_0^L \frac{F_h}{\sigma_0} \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 dx. \quad (2.1.16)$$

از آنجا که

$$ds = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx, \quad (2.1.17)$$

معادله (۲.۱.۱۶) را می شود به شکل زیر نوشت

$$V = \frac{F_h}{\sigma_0} \int_0^L \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (2.1.18)$$

بخش ۲.۱: بهینه سازی با استفاده از حساب دیفرانسیل ۴۹

با جایگزینی مشتق اول تابع تغییر مکان معادله (۲.۱.۱۳) در معادله بالا، می توان نشان داد که حجم مصالح به کشش افقی به شکل زیر مربوط است

$$V = \frac{L}{\sigma_o} \left[ F_h + \frac{p_o L^2}{12 F_h} \right]. \quad (2.1.19)$$

اگر کشش افقی کوچک باشد، حجم افزایش پیدا می کند، زیرا کابل بلندتر می شود. اگر، از طرف دیگر، کشش افقی بسیار بزرگ باشد، مساحت سطح مقطع باید بزرگ شود تا سطح تنش در  $\sigma_o$  بماند، اگر چه طول کابل به طرف مینیمم فاصله بین دو نقطه تکیه گاه میل می کند. مقدار بهین کشش افقی را می توان از رابطه زیر بدست آورد

$$\frac{dV}{dF_h} = 0, \quad (2.1.20)$$

که داریم

$$F_h^* = \frac{p_o L}{\sqrt{12}}. \quad (2.1.21)$$

این مقدار کشش مربوط به مینیمم حجم کل زیر است

$$V^* = \frac{p_o L^2}{\sqrt{3} \sigma_o}, \quad (2.1.22)$$

و توزیع مساحت سطح مقطع بهین عبارت است از

$$A^*(x) = \frac{F_h}{\sigma_o \cos \theta} = \frac{F_h}{\sigma_o} \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} = \frac{p_o L}{\sigma_o} \sqrt{\frac{1}{12} + \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right)^2}. \quad (2.1.23)$$

اگر چه کاربرد حساب کلاسیک، می تواند در بسیاری از سازه های دیگر مانند تیرها و طاقها تشریح شود، مناسب است جنبه ها و فرضیاتی که این مسائل را قابل کاربرد با حساب معمولی می سازد را بیان کنیم. به عنوان مثال، مساله خریا که در بالا بحث شد می تواند توسط حساب معمولی حل شود، زیرا فرضهای ساده شونده متعددی داشتیم. ابتدا، بعضی از متغیرهای طراحی بالقوه مانند مساحت سطح مقطع اعضای خریا حذف شدند زیرا فرض کردیم در هر عضو، تنش برابر با مقدار مجاز ماکزیمم است.



## ۵۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

دوم، تحلیل با حذف اثر وزن خود اعضای خرپا در پاسخ سازه ساده شد و در نهایت از کماتش احتمالی اعضای که در فشار هستند چشم پوشی شد. بیشتر مسائل بهینه سازی سازه های واقعی را نمی شود آن قدر ساده سازی کرد که بتوان آنها را با حساب معمولی حل کرد.

### ۲.۲ بهینه سازی با استفاده از حساب تغییراتی

بعضی از مسائل طراحی سازه، وقتی به عنوان مسائل بهینه سازی رابطه سازی شوند، تابع هدفی به شکل یک انتگرال معین دارند که یک تابع و چند مشتق آن مجهولند. چنان شکل‌هایی، که تابعی‌ها نامیده می شوند، برای هر تابعی که در آن جایگزین می شود، مقدار عددی خاصی دارند. کار طراحی عبارت است از یافتن یک تابع مناسب که تابعی را مینیمم کند. رشته ای از ریاضی که درباره 'ماکزیمم و مینیمم تابعی‌ها بحث می کند حساب تغییراتی نامیده می شود. جنبه های خاصی از روشهای به کار رفته در حساب تغییراتی مانند روشهای به کار رفته در حساب دیفرانسیل است که در این بخش مورد بحث قرار می گیرد.

#### ۲.۲.۱ مقدمه ای بر حساب تغییراتی

مسئله بدست آوردن تابع  $y(x)$  که در دو نقطه مقدار آن داده شده  $y(a) = y_a$  و  $y(b) = y_b$  و برای آن انتگرال

$$J = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (2.1.1)$$

مقدار مینیمم یا ماکزیمم داشته باشد را در نظر بگیرید ( $y' \equiv dy/dx$ ). شرایط انتهایی  $y(a)$  و  $y(b)$  را شرایط مرزی سینماتیکی مسئله می گویند. در حالت کلی تر  $F$  می تواند تابعی با بیش از یک تابع باشد یعنی  $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ ، و هر یک از این توابع می توانند به  $n$  متغیر مستقل  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  وابسته باشند. همچنین، مشتقات مرتبه های بالاتر این توابع نسبت به متغیرهای مستقل می تواند در  $F$  باشد. این مقدمه 'مختصر به تابعی هایی محدود می شود که بر حسب یک تابع تنها با یک متغیر مستقل بیان شده اند. بحث عمومی تر روشهای حساب تغییراتی در مراجع متعددی وجود دارد (به عنوان مثال [2-4]).

فرض می کنیم  $y^*(x)$  تابعی باشد که انتگرال ما را مینیمم می کند. تابع دیگری مثل  $y(x)$  در نظر بگیرید که با تغییرات کوچک  $\delta y$  از  $y^*(x)$  بدست آمده،

بخش ۲.۲: بهینه سازی با استفاده از حساب تغییراتی ۵۱

$$y(x) = y^*(x) + \delta y = y^*(x) + \epsilon \eta(x), \quad (2.2.2)$$

در حالی که  $\epsilon$  یک پارامتر دامنه 'کوچک' و  $\eta(x)$  یک تابع شکل است. تابع  $\eta(x)$  باید شرایط مرزی سینماتیکی را برآورده سازد

$$\eta(a) = 0, \quad \text{و} \quad \eta(b) = 0, \quad (2.2.3)$$

بنابراین  $y(a)$  و  $y(b)$  بدون تغییر باقی می ماند. معادله (۲.۲.۲) را در انتگرال (۲.۲.۱) جایگزین می کنیم، و  $J$  فقط تابعی از پارامتر اختلال  $\epsilon$  می شود

$$J(\epsilon) = \int_a^b F(x, y^* + \epsilon \eta, y^{*'} + \epsilon \eta') dx. \quad (2.2.4)$$

با دانستن این که انتگرال  $J$  در  $\epsilon = 0$  یک اکسترمم دارد، می توان با استفاده از حساب معمولی شرط لازم را نوشت

$$\left. \frac{dJ(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{d\epsilon} \right) dx = 0. \quad (2.2.5)$$

با استفاده از معادله (۲.۲.۲) و تعریف  $(dJ/d\epsilon)|_{\epsilon=0}$  به عنوان تغییر اول تابعی  $J$  که با  $\delta J$  نشان داده می شود داریم

$$\delta J = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0. \quad (2.2.6)$$

عملکرد  $\delta$  مانند عملکرد دیفرانسیل در حساب معمولی است و همان قواعدی که در مورد عملکرد دیفرانسیل به کار می رود در مورد عملکرد تغییرات نیز به کار می رود. از خاصیت جابه جایی پذیری دو عملکرد یعنی

$$\epsilon \eta' = \epsilon \frac{d\eta}{dx} = \frac{d}{dx} \epsilon \eta = \frac{d}{dx} \delta y = \delta \left( \frac{dy}{dx} \right) = \delta y', \quad (2.2.7)$$

برای رسیدن به معادله (۲.۲.۶) استفاده شده است.

در حالت عمومی تر  $F$  به بیشتر از یک تابع و مشتقات مرتبه بالاتر از این توابع نسبت به متغیر مستقل  $x$

۵۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

وابسته است. به عنوان مثال اگر

$$J = \int_a^b F(x, y_1, y_2, y_1', y_2', y_2'') dx, \quad (2.2.8)$$

آن گاه شرط صفر بودن تغییر تابعی به شکل زیر نوشته می شود

$$\delta J = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1'} \delta y_1' + \frac{\partial F}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial F}{\partial y_2'} \delta y_2' + \frac{\partial F}{\partial y_2''} \delta y_2'' \right) dx = 0. \quad (2.2.9)$$

شرط لازم اکسترمم که به شکل معادله (۲.۲.۶) یا (۲.۲.۹) بیان شد معمولاً زیاد مفید نیست.

جملاتی که تغییرات مشتقها را شامل می شود می تواند انتگرال گیری جزء به جزء شود تا شرایط مفیدتری بدست آید. به عنوان مثال با انتگرال گیری از جمله دوم معادله (۲.۲.۶) و مرتب کردن آن می توان نوشت

$$\delta J = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b + \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0. \quad (2.2.10)$$

برای مسأله ما، جمله اول طرف راست معادله (۲.۲.۱۰) بر اساس این که تابع اختیاری  $\eta(x)$

شرایط مرزی را برآورده می کند،  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  برابر صفر است. از تعریف تغییرات داریم

$$\delta y(a) = \delta y(b) = 0. \quad (2.2.11)$$

بنابراین، شرط لازم برای اکسترمم بودن  $J$  عبارت است از

$$\delta J = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0. \quad (2.2.12)$$

در نهایت، چون  $\delta y$  اختیاری است، نتیجه می گیریم که ضریب  $\delta y$  در معادله (۲.۲.۱۲) باید

در بازه انتگرال صفر شود. بنابراین اگر  $y(x)$  بخواهد  $J$  را مینیمم (یا ماکزیمم) کند، باید شرط زیر را که به عنوان معادله اولر-لاگرانژ معروف است، برآورده سازد،

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (2.2.13)$$

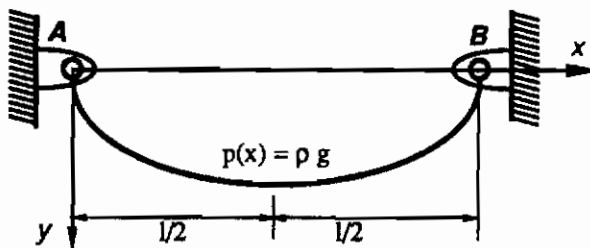
اگر مقدار تابع مجهول در هیچ یک از دو انتها یا در یکی از آنها مشخص نباشد، آن گاه تغییرات  $y(x)$

## بخش ۲.۲: بهینه سازی با استفاده از حساب تغییراتی ۵۳

نباید در آن نقاط صفر شود. ولی جمله 'اول طرف راست معادله' (۲.۲.۱۰) همچنان باید مستقلاً صفر باشد، تا این که رابطه به قوت خود باقی باشد. یعنی اگر  $y(x)$  در نقاط انتهایی توصیف نشده باشد، شرایط زیر، که اغلب شرایط مرزی طبیعی نامیده می شود، باید برآورده شود

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=a} = 0, \quad \text{و} \quad \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=b} = 0. \quad (۲.۲.۱۳)$$

## مثال ۲.۲.۱



شکل ۲.۲.۱ کابل آویخته شده تحت اثر وزن خود

مسأله 'بدست آوردن حالت تعادل  $y(x)$  یک کابل انعطاف پذیر با سطح مقطع ثابت که در اثر وزن خودش بین دو نقطه آویزان شده را در نظر بگیرید. دو نقطه 'آویز به فاصله  $l$  از هم قرار دارند همچنان که در شکل (۲.۲.۱) نشان داده شده است. این یک مسأله 'نسبتاً مشهور نقطه ثابت از حساب تغییراتی است. کابل شکلی را دارد که با مینیمم بودن انرژی پتانسیل آن سازگار است. بنابراین، برای بدست آوردن شکل تعادل  $y(x)$  نیاز به مینیمم کردن تابعی انرژی پتانسیل داریم که می تواند بر حسب تابع شکل مجهول زیر نوشته شود

$$J = \int \rho g y ds, \quad (۲.۲.۱۵)$$

که در آن  $\rho g$  وزن بر واحد طول و  $ds$  یک جزء از طول قوس کابل است. رابطه 'طول قوس با مختصات افقی  $x$  که مرکزش در وسط کابل قرار دارد را در نظر می گیریم و معادله (۲.۲.۱۵) را دوباره می نویسیم

۵۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

$$J = \rho g \int_{-l/2}^{l/2} y \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (2.2.16)$$

اکنون می توان یا تغییرات اول معادله (۲.۲.۱۶) را بدست آورد یا چون این یک مسأله 'با نقطه' انتهایی ثابت است، معادله اولر- لاگرانژ (۲.۲.۱۳) را که قبلاً بدست آوردیم به کاربرد. شرط لازم برای این که انرژی پتانسیل مینیم شود به شکل معادله 'دیفرانسیل معمولی نیز بدست می آید

$$\sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0. \quad (2.2.17)$$

با بسط جمله 'دوم و مرتب کردن دوباره، معادله (۲.۲.۱۷) به شکل زیر ساده می شود

$$yy'' - y'^2 - 1 = 0. \quad (2.2.18)$$

با معرفی  $dy/dx = t$  و  $d^2y/dx^2 = t dt/dy$ ، معادله (۲.۲.۱۸) را دوباره به شکل زیر می نویسیم

$$\frac{t dt}{t^2 + 1} = \frac{dy}{y}. \quad (2.2.19)$$

با یک بار انتگرال گیری از (۲.۲.۱۹) داریم

$$t = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2}{c_1^2} - 1}. \quad (2.2.20)$$

و بالاخره با یک بار دیگر انتگرال گیری داریم

$$y(x) = c_1 \cosh \left( \frac{x}{c_1} + c_2 \right), \quad t = \frac{dy}{dx} = \sinh \left( \frac{x}{c_1} + c_2 \right). \quad (2.2.21)$$

از کاربرد شرط

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_0 = 0 \quad (2.2.22)$$

نتیجه می شود که  $c_2 = 0$ ، در حالی که  $c_1$  را می توان از شرط

$$y(-l/2) = y(l/2) = c_1 \cosh(l/(2c_1)). \quad (2.2.23)$$

بدست آورد. معادله (۲.۲.۲۱) معادله یک زنجیر است. ....

## ۲.۳ روشهای کلاسیک برای مسائل مقید

بیشتر مسائل بهینه سازی سازه ها روی متغیرهای طراحی قیدهایی به شکل حد دارند و یا قیدهایی به شکل روابط جبری بین متغیرهای طراحی دارند. این قیدها ممکن است مربوط به ضرورتهای شکل تابعی طراحی، هندسه، دسترسی به منابع، یا شکل ظاهری و جذابیت باشد. در این بخش ما مسائلی را با قیدهای تساوی روی متغیرهای طراحی در نظر می گیریم. هر چند اکثر قیدهای پیشتر گفته شده به شکل قیدهای نامساوی ظاهر می شوند، آنها را می توان به قیدهای تساوی معادلی تبدیل کرد، همچنان که بعداً مورد بحث قرار می گیرد.

شکل کلی مسائل مقید به قید تساوی را می توان به شکل زیر بیان کرد

$$(2.3.1) \quad \begin{array}{ll} \text{تابع} & f(\mathbf{x}), \\ \text{رابطه به} & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, n_e, \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T, \\ \text{مینیم کنید.} \end{array}$$

در حالی که تعداد قیدهای تساوی مستقل  $n_e$  کمتر و یا مساوی تعداد متغیرهای طراحی  $n$  است. اگر تعداد قیدها بیشتر از تعداد متغیرهای طراحی باشد، آن گاه مسأله فرا مقید است و، به طور کلی، جوابی وجود نخواهد داشت.

برای حل مسائلی به شکل معادله (۲.۳.۱) بیشتر از یک رویکرد وجود دارد. اگر معادله های قیدهای تساوی را بتوان به طور صریح حل کرد و  $n_e$  متغیر طراحی را بر حسب مجموعه ای از  $n - n_e$  متغیر طراحی مستقل بدست آورد، آن گاه تابع هدف را می توان بر حسب  $n - n_e$  متغیر طراحی مستقل نوشت. تابع هدف جدید دیگر مقید به هیچ قیدی نیست و می توان آن را با استفاده از فوننی که در بخشهای قبلی بحث شد مینیم کرد.

به عنوان مثال، برای یک مسأله مینیم سازی با دو متغیر طراحی مشروط به یک قید تساوی زیر

$$(2.3.2) \quad \begin{array}{ll} \text{تابع} & f(x_1, x_2) \\ \text{رابطه به} & h(x_1, x_2) = 0, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{مینیم کنید,} \end{array}$$

ما می توانیم یکی از متغیرهای طراحی را از رابطه قید بدست آوریم

$$(2.3.3) \quad x_1 = h_c(x_2),$$

و آن را در تابع هدف جایگزین کنیم. تابع هدف جدید عبارت است از

$$f_r(x_2) = f[h_c(x_2), x_2], \quad (2.3.4)$$

و می توان از آن نسبت به متغیر طراحی مستقل  $x_2$  مشتق گرفت و  $df/dx_2$  را مساوی صفر قرار داد و مقدار بهین  $x_2$  را بدست آورد. مقدار بهین  $x_1$  نیز از معادله (۲.۳.۳) به دست می آید. به روشی که در بالا گفته شد، روش حذف متغیر یا جایگزینی مستقیم می گویند. برای مسائلی که در آنها معادلات قید را نمی شود به طور صریح حل کرد، به عنوان مثال، وقتی قیدها بر حسب انتگرال تعریف شده باشند، روش دیگری که روش ضربگرهای لاگرانژ نامیده می شود به کار می رود.

### ۲.۳.۱ روش ضربگرهای لاگرانژ

این روش در حساب تغییراتی، در واقع توسعه مستقیم روش مینیم سازی مقید در حساب دیفرانسیل است. ما با مروری بر روش آن چنان که در حساب دیفرانسیل به کار می رود شروع می کنیم. برای یک تابع هدف  $f(x)$  از  $n$  متغیر طراحی که باید مینیم شود، تغییر دیفرانسیل در تابع هدف همچنان باید صفر باشد.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0. \quad (2.3.5)$$

اما اکنون نمی توان هر یک از جملات مشتق را به تنهایی برابر صفر قرار داد زیرا تغییرات دیفرانسیل در متغیرهای طراحی  $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$  توسط معادلات قیود به هم وابسته اند. برای ساده سازی فرض می کنیم تنها یک معادله قید  $h(x) = 0$  داریم، تغییرات دیفرانسیل در متغیرهای طراحی با رابطه زیر به هم مربوط می شوند

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_n} dx_n = 0. \quad (2.3.6)$$

می توان معادله (۲.۳.۶) را در یک عدد اختیاری (از حالا به بعد)،  $\lambda$  ضرب کرد و به معادله (۲.۳.۵) افزود و معادله زیر را بدست آورد (مرجع [4] را ببینید)

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) dx_n = 0. \quad (2.3.7)$$

## بخش ۲.۳: روشهای کلاسیک برای مسائل مقید ۵۷

فرض کنید  $\lambda$  چنان تعیین شود که مقادیر داخل هر پرانتز صفر شود و معادله قبلی برآورده شود. این کار به  $n$  معادله برای  $n+1$  مجهول بر حسب  $n$  متغیر طراحی و ضریب مجهول  $\lambda$  که ضریبگر لاگرانژ نامیده می شود می انجامد. رابطه قید  $h(x) = 0$  رابطه  $(n+1)$  امین را می دهد. معادله های (۲.۳.۷) و (۲.۳.۲) دقیقاً معادله هایی است که فرد از مینیم سازی تابع کمکی  $f + \lambda h$  نسبت به متغیرهای طراحی و ضریبگر لاگرانژ  $\lambda$  بدست می آورد.

برای مسائلی که چند تابع قید دارند، باید برای هر تابع قید یک ضریبگر لاگرانژ معرفی کرد. بنابراین، در حالت کلی یک مسأله بهینه سازی با یک تابع هدف و  $n$  متغیر طراحی و  $n_e$  قید تساوی که در رابطه (۲.۳.۱) معرفی شد معادل یک مسأله بدون قید یک تابع کمکی به شکل زیر است.

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{n_e} \lambda_j h_j. \quad (2.3.8)$$

مقادیر بهین متغیرهای طراحی از حل دستگاه معادلات  $n + n_e$  تایی زیر بدست می آید که  $n + n_e$  مجهول دارد.

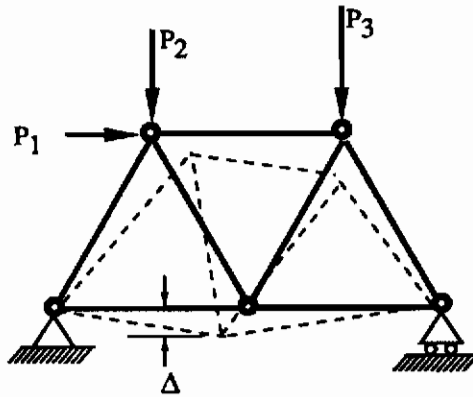
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} &= 0, & i &= 1, \dots, n, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} &= 0, & j &= 1, \dots, n_e, \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

## مثال ۲.۳.۱

یک سازه خرابی معمولی با  $n$  عضو در نظر بگیرید که تحت تأثیر بارهای متمرکز در اتصالات اعضاست. هدف از طراحی عبارت است از مینیم سازی حجم مصالح به کار رفته در اعضا، در صورتی که تغییر مکان  $\Delta$  در یک جهت مشخص و یک نقطه معین از خرپا داده شده باشد. به طور کلی، قیود تغییر مکان می تواند در بیش از یک نقطه اعمال شود، ولی برای سادگی تنها یک قید تغییر مکان در نظر گرفته شده است. چون ساختار کلی سازه ثابت است، متغیرهای طراحی تنها مساحتهای سطح مقطع اعضا هستند.  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )

به منظور داشتن یک مسأله مینیم سازی مقید، به بیان قید تغییر مکان بر حسب متغیرهای طراحی نیاز داریم. از روش بار ظاهری (روش بار مجازی) که حالت خاصی از اصل نیروهای مجازی یا اصل کار مجازی مکمل است برای این منظور استفاده می شود. اصل کار مجازی مکمل می گوید که: در یک جسم





شکل ۲.۳.۱ طراحی خراب با قید تغییر مکان

تغییر شکل پذیر، اگر و تنها اگر کار مجازی مکمل صفر باشد، کرنشها و تغییر مکانها با شرایط تکیه گاهی سازگار و هماهنگ است [5].

$$\delta W_I^* + \delta W_E^* = 0. \quad (2.3.10)$$

در این جا  $\delta W_I^*$  کار مجازی مکمل داخلی و  $\delta W_E^*$  کار مجازی مکمل نیروهای خارجی است. روش بار ظاهری با اعمال یک بار مجازی واحد در نقطه ای که تغییر مکان مجهول است و در امتداد مؤلفه تغییر مکان مورد نظر شروع می شود. کار مجازی مکمل داخلی تحت تأثیر چنین باری به شکل زیر است

$$\delta W_I^* = -\delta U^* = - \int_V \delta \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV, \quad (2.3.11)$$

در حالی که  $\delta U^*$  انرژی کرنش مکمل،  $\epsilon_{ij}$  میدان کرنشی در بارهای واقعی، و  $\delta \sigma_{ij}$  میدان تنش مجازی برای بار ظاهری است. در غیاب نیروهای کالبدی کار مجازی مکمل خارجی عبارت است از

$$\delta W_E^* = \int_S \bar{u}_i \delta t_i dS, \quad (2.3.12)$$

که در آن  $\bar{u}_i$  مؤلفه های تغییر مکان سطحی و  $\delta t_i$  مؤلفه های ترکشن<sup>۱</sup> های مجازی اعمال شده است. برای یک سازه خرابی دو بعدی با  $n$  عضو با سطح مقطع ثابت، از معادله های (۲.۳.۱۰)، (۲.۳.۱۱)

1) Traction

و (۲.۳.۱۲) داریم

$$\Delta \times 1 = \sum_{i=1}^n \delta \sigma_i \epsilon_i L_i A_i, \quad (2.3.13)$$

در حالی که  $L_i$  طول عضو  $i$ ام،  $\epsilon_i$  کرنش در اثر بارهای واقعی، و  $\delta \sigma_i$  تنش ظاهری در عضو  $i$ ام است. با مربوط کردن تنشها و کرنشها به متغیرهای طراحی، معادله (۲.۳.۱۳) را می توان به شکل زیر نوشت

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{f_i F_i}{A_i E_i} L_i, \quad (2.3.14)$$

در حالی که  $f_i$  و  $F_i$  به ترتیب نیروهای داخلی ظاهری و واقعی در عضو  $i$ ام و  $E_i$  ضریب ارتجاعی عضو  $i$ ام است.

اکنون می توان مسأله طراحی را به شکل استاندارد معادله (۲.۳.۱) رابطه سازی کرد.

$$V(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n A_i L_i \quad \text{تابع} \quad (2.3.15)$$

را مشروط به  $\sum_{i=1}^n \frac{f_i F_i}{A_i E_i} L_i - \Delta = 0$ . مینیمم کنید.

با معرفی ضریبگرهای لاگرانژ، تابع هدف کمکی را به شکل زیر می نویسیم

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}, \lambda) = \sum_{i=1}^n A_i L_i + \lambda \left( \sum_{i=1}^n \frac{f_i F_i}{A_i E_i} L_i - \Delta \right). \quad (2.3.16)$$

آن گاه شرایط لازم برای اکسترمم، دستگاه معادلات زیر است

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = L_i - \lambda \frac{f_i F_i}{A_i^2 E_i} L_i = 0, \quad (2.3.17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i F_i}{A_i E_i} L_i - \Delta = 0. \quad (2.3.18)$$

با دست آوردن مساحتهای سطح مقطع ها از معادله (۲.۳.۱۷) بر حسب ضریبگرهای لاگرانژ و جایگزینی آنها در معادله (۲.۳.۱۸)، می توان مقدار ضریبگرهای لاگرانژ را بر حسب تغییر مکان معلوم  $\Delta$  به شکل زیر بدست آورد

۶۰ میانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

$$\lambda^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{f_i F_i}{E_i} \right]^{\frac{1}{2}} L_i. \quad (2.3.19)$$

آن گاه، مقادیر بهین مساحت‌های سطح مقطع عبارتند از

$$A_i^* = \frac{1}{\Delta} \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{f_j F_j}{E_j} \right)^{\frac{1}{2}} L_j \right] \sqrt{\frac{f_i F_i}{E_i}}. \quad (2.3.20)$$

دقت کنید که جمله 'داخل کروشه ثابت است. حجم کلی مصالح با جایگزینی معادله (۲.۳.۲۰) در

تابع هدف به دست می آید

$$V^* = \frac{1}{\Delta} \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{f_j F_j}{E_j} \right)^{\frac{1}{2}} L_j \right]^2. \quad (2.3.21)$$

...

## ۲.۳.۲ تابع مشروط به یک قید انتگرالی

برای مسائلی که متغیرهای طراحی مجهول، توابعی هستند که با تابعی مقید شده اند، حساب تغییراتی نیز از ضربگرهای لاگرانژ استفاده می کند. یادآور می شود که برای مسأله کابل آویخته شده، معادله 'اویلر- لاگرانژ با دادن تغییرات اختیاری به تابع شکل کابل  $\delta y$ ، یا به عبارت دیگر با فرض این که  $y(x)$  به جز برای شرایط مرزی سینماتیک کاملاً نامقید است بدست آمد. به هر حال، اگر تابع  $y(x)$  باید یک قید انتگرالی به شکل

$$\int_a^b g[y(x)] dx = c, \quad (2.3.22)$$

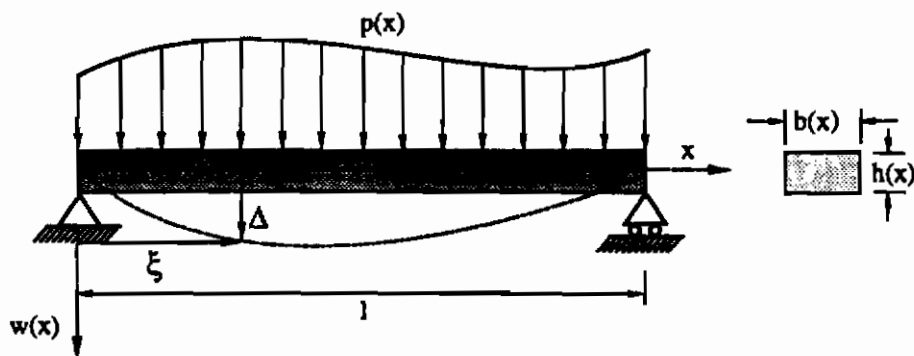
را برآورده سازد، آن گاه اکسترمم تابعی  $J[y(x)]$  را می توان با استفاده از فن ضربگرهای لاگرانژ بدست آورد. در این حالت شرط لازم برای اکسترمم عبارت است از صفر شدن تغییرات اول یک تابعی کمکی

$$\mathcal{L} = J + \lambda \left[ \int_a^b g[y(x)] dx - c \right]. \quad (2.3.23)$$

در مثال بعدی کاربرد این فن را برای بدست آوردن توزیع مساحت سطح مقطع یک تیر با وزن مینیمم

و داشتن یک تغییر مکان مشخص در نقطه ای در امتداد دهانه تشریح می کنیم

## مثال ۲.۳.۲



شکل ۲.۳.۲ طراحی یک تیر برای یک تغییر مکان مشخص در یک نقطه

یک تیر از نظر ایستایی معین را با سطح مقطع متغیر  $A(x)$  در نظر بگیرید که تحت تأثیر یک بار متمرکز و یا گسترده و یک گشتاور، که در امتداد تیر توزیع  $M(x)$  دارد، قرار گرفته است. می خواهیم حجم  $V$  تیر را مینیمم کنیم، مشروط به این که تغییر مکان در نقطه  $\xi = x$  برابر با مقدار مشخص  $\Delta$  باشد [۶]. این مسأله، که توسط بارنت<sup>۱</sup> [6] مورد مطالعه قرار گرفته، به شکل زیر رابطه سازی می شود

$$V = \int_0^l A(x) dx \quad \text{تابع} \quad \text{را مشروط به} \quad w(\xi) - \Delta = 0. \quad \text{مینیمم کنید} \quad (۲.۳.۲۴)$$

با استفاده از روش بار مجازی که در مثال قبلی بحث شد می توان رابطه ساده ای برای تغییر مکان در نقطه  $\xi = x$  بدست آورد که عبارت است از

$$w(\xi) = \int_0^l \frac{M(x)m(x)}{EI(x)} dx, \quad (۲.۳.۲۵)$$

که در آن  $m(x)$  توزیع گشتاوری است که با اعمال یک نیروی واحد در نقطه  $\xi = x$  به وجود می آید و  $E$  ضریب ارتجاعی مصالح تیر و  $I(x)$  گشتاور ماند سطح مقطع است. چون تابع توزیع مساحت سطح

1) Barnett

مقطع تیر متغیر طراحی است، جمله گشتاور ماند باید بر حسب مساحت بیان شود. عموماً، تابع گشتاور ماند تیر با تابع مساحت سطح مقطع به شکل زیر مربوط می شود

$$I(x) = \alpha [A(x)]^n, \quad (2.3.26)$$

که در آن  $\alpha$  یک عدد ثابت است و به ابعاد فیزیکی سطح مقطع بستگی دارد، و  $n$  یک عدد ثابت است که به رابطه فیزیکی بین دو تابع وابسته است. در این جا ما عدد ثابت  $n$  را به اعداد صحیح 1 و 2 و 3 محدود می کنیم. حالت  $n=1$  برای تیری با سطح مقطع مستطیلی و ارتفاع ثابت و عرض متغیر در طول تیر است. چنین تیری معروف به تیر پله ای صفحه ای است. حالت  $n=2$  برای وقتی است که هم ارتفاع و هم عرض سطح مقطع تغییر کنند، ولی نسبت آنها ثابت باشد و بالآخره حالت  $n=3$  برای وقتی است که ارتفاع تغییر کند و عرض ثابت باشد. حالت اخیر به تیر پله ای عمقی معروف است.

تابعی کمکی برای مسئله مینیم سازی معادله (2.3.24)، به شکل زیر درخواهد آمد

$$\mathcal{L} = \int_0^l A(x) dx + \lambda \left[ \int_0^l \frac{M(x)m(x)}{EI(x)} dx - \Delta \right]. \quad (2.3.27)$$

شرط لازم برای مینیم مقید عبارت است از صفر شدن تغییرات اول این تابعی کمکی. در این جا  $n=1$  قرار می دهیم تا بدست آوردن روابط ساده باشد. تغییرات اول معادله (2.3.27) برابر است با

$$\delta \mathcal{L} = \int_0^l \left[ 1 - \lambda \frac{M(x)m(x)}{\alpha EA^2(x)} \right] \delta A dx = 0. \quad (2.3.28)$$

معادله اولر- لاگرانژ مربوط عبارت است از

$$1 - \lambda \frac{M(x)m(x)}{\alpha EA^2(x)} = 0, \quad \text{یا} \quad A(x) = \lambda^{\frac{1}{2}} \left( \frac{Mm}{\alpha E} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3.29)$$

ضریبهای لاگرانژ مجهول در معادله (2.3.29) باید از قید تغییر مکان در معادله (2.3.24) بدست آید. یعنی با استفاده از معادلات (2.3.25)، (2.3.26) و (2.3.29) در معادله (2.3.24) می توان نتیجه گرفت که

$$\lambda^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta} \int_0^l \left( \frac{Mm}{\alpha E} \right)^{\frac{1}{2}} dx. \quad (2.3.30)$$

بنابراین توزیع مساحت بهین و حجم مربوط به آن به ترتیب برابر است با

$$A^*(x) = \frac{1}{\alpha E \Delta} \left[ \int_0^l \left( M(\eta) m(\eta) \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \right] \left( M(x) m(x) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3.31)$$

و

$$V^* = \frac{1}{\alpha E \Delta} \left[ \int_0^l \left( M(\eta) m(\eta) \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \right]^2, \quad (2.3.32)$$

### ۲.۳.۳ شرایط اضافی دیگر

در مسائلی که در بخش قبلی بحث شد، تنها یک قید انتگرالی ساده وجود داشت و به یک ضربگر لاگرانژ در تابعی کمکی نیاز بود. در یک حالت کلی تر، همچنان که قبلاً بیان شد، ما می خواهیم تابعی هایی از چند تابع و مشتقات آنها نسبت به بیش از یک متغیر (معادله ۲.۲.۸ را ببینید) را اکسترم کنیم. به علاوه، ممکن است  $m$  قید اضافی دیگر به شکل

$$h_i \left( x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_p}{\partial y_n} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.3.33)$$

در مسأله اعمال شده باشد. این قیود ممکن است یک معادله جبری ساده یا معادلات دیفرانسیلی بسیار پیچیده باشند که باید در هر نقطه ای از کل حوزه مسأله برآورده شوند.

در این حالت روش ضربگرهای لاگرانژ همچنان به اکسترم کردن یک تابعی به شکل زیر می انجامد

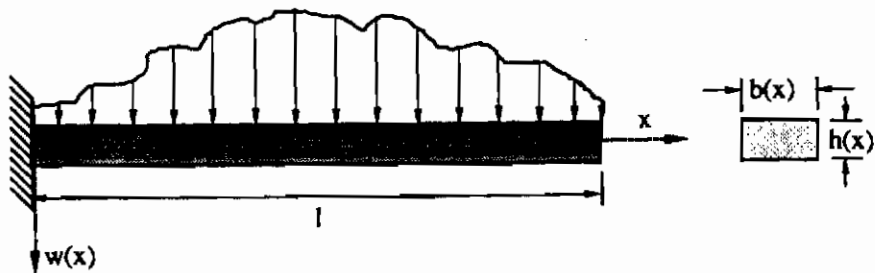
$$\mathcal{L} = \int_v \left( f + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i \right) dv. \quad (2.3.34)$$

اما ضربگرهای لاگرانژ دیگر ثابت نبوده و تابعی از مختصات  $x_1, \dots, x_n$  اند.

### مثال ۲.۳.۳

مسأله ای که در بالا بحث شد می تواند با یک مثال طراحی بهتر تشریح شود. تیری یکسر گیردار با حجم و بار اعمالی مشخص را که خیز آن مینیمم باشد، طراحی کنید. به جز تغییر مختصری در نمادها،

این مثال بر اساس حل مکی و گلیب<sup>۱</sup> [7] است.



شکل ۲.۳.۳ طراحی بهین یک تیر برای خیز مینیمم

شکل ۲.۳.۳ یک تیر یکسر گیردار ارتجاعی را که در  $x=0$  گیردار و در  $x=l$  آزاد است نشان می دهد که یک بار جانبی گسترده مشخص  $q(x)$  در واحد طول روی آن اثر می کند. هدف عبارت است از مینیمم کردن نرم تغییر مکان جانبی تیر برای یک حجم کل داده شده  $V_0$ . نرمی که انتخاب می کنیم عبارت است از انتگرال تغییر مکان جانبی  $w$  در طول تیر. بار  $q(x)$  را محدود به تک جهت بودن می نماییم تا با نرم گرفته شده همخوانی داشته باشد.

تابی که در این حالت مینیمم می شود، انتگرالی از میدان تغییر مکان  $w(x)$  است که باید معادله تعادل تیر را برآورده کند و قید حجم کل مصالح را نیز نقض نکند. معادله تعادل به شکل زیر بیان می شود

$$[s(x)w'''] - q(x) = 0, \quad (2.3.35)$$

با شرایط مرزی

$$\text{at } x = 0: \quad w = 0, \quad \text{و} \quad w' = 0. \quad (2.3.36)$$

$$\text{at } x = l: \quad sw'' = 0, \quad \text{و} \quad s'w'' + sw''' = 0, \quad (2.3.37)$$

$S(x)$  سختی خمشی تیر است که با مساحت سطح مقطع براساس رابطه (۲.۳.۲۶) مربوط می شود

یعنی

بخش ۲.۳: روشهای کلاسیک برای مسائل مقید ۶۵

$$s(x) = EI(x) = \alpha EA^n(x), \quad n = 1, 2, \text{ or } 3. \quad (2.3.38)$$

علاوه بر شرط اضافی (۲.۳.۳۵)، باید یک قید انتگرالی حجم کل نیز به شکل زیر داشته باشیم

$$\int_0^l A(x) dx = V_0. \quad (2.3.39)$$

تابعی کمکی عبارت است از:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(w(x), s(x), A(x), \lambda_1, \lambda_2(x)) = & \int_0^l w(x) dx + \lambda_1 \left[ \int_0^l A(x) dx - V_0 \right] \\ & - \int_0^l \lambda_2(x) [s w'''' + 2s' w''' + s'' w'' - q] dx, \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

که باید نسبت به  $w(x), s(x), A(x), \lambda_2(x)$  و پارامتر  $\lambda_1$  ایستا باشد. ولی توجه داریم که  $A(x)$  توسط

معادله (۲.۳.۳۸) به  $s(x)$  بستگی دارد. بنابراین

$$\delta A = \left( \frac{dA}{ds} \right) \delta s. \quad (2.3.41)$$

اولین تغییرات  $\mathcal{L}$  عبارت است از:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \int_0^l \delta w dx + \lambda_1 \left[ \int_0^l \delta A dx \right] + \delta \lambda_1 \left[ \int_0^l A dx - V_0 \right] \\ & - \int_0^l \delta \lambda_2(x) [s w'''' + 2s' w''' + s'' w'' - q] dx \\ & - \int_0^l \lambda_2(x) [\delta s w'''' + s \delta w'''' + 2\delta s' w''' + s' \delta w''' + \delta s'' w'' + s'' \delta w''] dx = 0, \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

که می تواند با تعدادی انتگرال جزء به جزء ساده تر شود. با جمع کردن جملاتی که ضریب

تغییرات اختیاری  $\delta \lambda_2, \delta w, \delta s, \delta \lambda_1$  هستند و مساوی صفر قرار دادن آنها، معادله های لاگرانژ-

اولر زیر



۶۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

$$\delta w : 1 - (\lambda_2'' s)'' = 0, \quad (2.3.43)$$

$$\delta s : \lambda_1 \frac{dA}{ds} - \lambda_2'' w'' = 0, \quad (2.3.44)$$

$$\delta \lambda_1 : \int_0^l A(x) dx - V_0 = 0, \quad (2.3.45)$$

$$\delta \lambda_2 : s w'''' + 2s' w''' + s'' w'' - q(x) = 0, \quad (2.3.46)$$

همراه با شرایط مرزی مربوط در  $x=l$  و  $x=0$  را بدست می آوریم:

$$\delta s = 0, \quad \text{یا} \quad \lambda_2 w''' - \lambda_2' w'' = 0, \quad (2.3.47)$$

$$\delta s' = 0, \quad \text{یا} \quad \lambda_2 w'' = 0, \quad (2.3.48)$$

$$\delta w = 0, \quad \text{یا} \quad \lambda_2''' s + \lambda_2'' s' = 0, \quad (2.3.49)$$

$$\delta w' = 0, \quad \text{یا} \quad \lambda_2'' s = 0, \quad (2.3.50)$$

$$\delta w'' = 0, \quad \text{یا} \quad -\lambda_2 s' + \lambda_2' s = 0, \quad (2.3.51)$$

$$\delta w''' = 0, \quad \text{یا} \quad \lambda_2 s = 0. \quad (2.3.52)$$

معادله های (۲.۳.۴۳) تا (۲.۳.۴۶) و شرایط مرزی مربوطه شان کلی هستند و در مورد تیرهای با تکیه گاه ساده و گیردار به کار می روند. برای تیر یک سرگیردار، شرایط مرزی عبارت است از معادله های (۲.۳.۳۶) و (۲.۳.۳۷). چون لنگر خمشی و نیروی برشی به خاطر طبیعت تک جهت بودن بار اعمال شده نمی تواند در  $x=0$  صفر باشد، شرایط بالا به روابط زیر تبدیل می شوند

$$\lambda_2(0) = 0, \quad \lambda_2'(0) = 0, \quad (2.3.53)$$

$$\lambda_2''(l)s(l) = 0, \quad \lambda_2'''(l)s(l) + \lambda_2''s'(l) = 0. \quad (2.3.54)$$

می توانیم از معادله های (۲.۳.۴۳) و (۲.۳.۴۶) دو بار انتگرال بگیریم و از دو شرط مرزی معادله (۲.۳.۳۷) و (۲.۳.۵۴) استفاده کنیم و به روابط زیر برسیم

$$s\lambda_2'' = \frac{1}{2}(x-l)^2, \quad (2.3.55)$$

و

$$s w'' = \int_l^x \left( \int_l^r q(\xi) d\xi \right) dr \equiv p(x), \quad (2.3.56)$$

که از آنها

$$\lambda_2'' w'' = \frac{1}{2} \frac{(x-l)^2 p(x)}{(s(x))^2}. \quad (2.3.57)$$

از ترکیب معادله 'آخر و معادله' لاگرانژ - اولر (۲.۳.۴۴) داریم

$$s^2(x) \frac{dA}{ds} = \frac{(x-l)^2 p(x)}{2\lambda_1}. \quad (2.3.58)$$

حالت خاص تیرهای پله ای صفحه ای. بقیه این مسأله به تیرهای پله ای صفحه ای اختصاص می یابد،  
 $n=1$ ، تحت یک بار گسترده 'یکنواخت با شدت  $q_0$ .  $q(x) = q_0$ . با ارزیابی توزیع  $p(x)$ ، می بینیم که رابطه  
 (۲.۳.۵۶) به شکل زیر در می آید

$$s w'' = q_0 \frac{(l-x)^2}{2}. \quad (2.3.59)$$

همچنین برای یک تیر پله ای داریم

$$\frac{dA}{ds} = \frac{1}{\alpha E} = c^2 = constant. \quad (2.3.60)$$

بنابراین معادله (۲.۳.۵۸) به شکل زیر در می آید:

$$s(x) = \frac{(x-l)^2}{2c} \sqrt{\frac{q_0}{\lambda_1}}, \quad (2.3.61)$$

و در آن صورت توزیع بهین مساحت سطح مقطع عبارت است از:

$$A^*(x) = \frac{c(x-l)^2}{2} \sqrt{\frac{q_0}{\lambda_1}}. \quad (2.3.62)$$

ضریبگر لاگرانژ مجهول می تواند از قید حجم معادله (۲.۳.۴۵) ارزیابی شود که برابر است با

$$\lambda_1 = \frac{c^2 q_0 l^6}{36 V_0^2}. \quad (2.3.63)$$

در نتیجه، مساحت بهین و توزیع سختی خمشی عبارتند از:

$$A^*(x) = \frac{3V_0(x-l)^2}{l^3}, \quad \text{and} \quad s^*(x) = \frac{3V_0(x-l)^2}{c^2 l^3}. \quad (2.3.64)$$

۶۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

با جای گذاری معادله (۲.۳.۶۴) در معادله (۲.۳.۵۹) و دوبار انتگرال گرفتن از آن، تابع خیز تیر بهین را بدست می آوریم

$$w(x) = \frac{c^2 q_0 l^3}{12 V_0} x^2, \quad (2.3.65)$$

در حالی که شرایط مرزی معادله (۲.۳.۳۶) مورد استفاده قرار گرفته اند. ثابت  $C$  برای تیر پله ای صفحه ای مستطیلی با ضخامت ثابت  $h$  و عرض متغیر  $b(x)$  عبارت است از:

$$c^2 = \frac{12}{E h^2}. \quad (2.3.66)$$

تابع خیز حاصل برابر است با

$$w(x) = \frac{q_0 l^3 x^2}{E V_0 h^2}. \quad (2.3.67)$$

برای مقایسه، یک تیر یکنواخت معادل که حجم کلی  $V_0$  و طول  $l$  و ضخامت ثابت  $h$  ولی عرض ثابت زیر را دارد در نظر بگیرید

$$b_0 = \frac{V_0}{h l}. \quad (2.3.68)$$

براحتی می توان نشان داد که خیز آن  $w_0(x)$  معادله زیر را برآورده می کند

$$\frac{\int_0^l w(x) dx}{\int_0^l w_0(x) dx} = \frac{5}{9}. \quad (2.3.69)$$

یعنی تیر بهین ۱.۸ برابر سخت تر از تیر یکنواخت با همان حجم است.

حالت های مختلف دیگری از بارگذاری و انواع مختلف تیرها،  $n=1,2,3$ ، در مرجع ۷ وجود دارد.

بعضی از این حالت ها بخشی از تمرین های انتهای فصل را تشکیل می دهند. • • •

## ۲.۴ قیدهای موضعی و رویکرد مین ماکز (Minmax)

در بسیاری از مسائل بهینه سازی سازه ها قیدهایی داریم که طبیعتاً موضعی هستند مانند قیدهای تنش.

## بخش ۲.۴: قیدهای موضعی و رویکرد مین ماکز (Minmax) ۶۹

به عنوان مثال در مسأله طراحی تیر، ممکن است بخواهیم که تنشها در هیچ جا از حد تسلیم تجاوز نکنند. چنان قیدهایی را می توان به عنوان قیدهای اضافی شبیه به معادله (۲.۳.۳۳) بیان کرد ولی تساویها با نامساوی جایگزین شده اند

$$g_i \left( x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_p}{\partial y_n} \right) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.4.1)$$

می توانیم نامساوی ها را با کم کردن توابع کمبود  $t_i$  به تساوی تبدیل کرده و معادله (۲.۴.۱) را به شکل زیر بنویسیم:

$$g_i \left( x_1, \dots, \frac{\partial y_p}{\partial y_n} \right) - t_i^2(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.4.2)$$

آن گاه تابعی کمکی معادله (۲.۳.۳۴) به شکل زیر خواهد بود

$$\mathcal{L} = \int_v \left[ f + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i - t_i^2) \right] dv. \quad (2.4.3)$$

وقتی تغییرات  $\mathcal{L}$  را می گیریم، تغییرات  $t_i$  نیز به شکل  $-2 \int_v \lambda_i t_i \delta t_i dv$  وارد خواهد شد. با برابر صفر قرار دادن ضریب  $\delta t_i$  داریم:

$$t_i \lambda_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.4.4)$$

این معادله می گوید وقتی متغیرهای کمبود صفر نیستند ضریبهای لاگرانژ صفرند. یعنی ضریبهای لاگرانژ در نقاطی از فضای طراحی که قیدهای مربوط بحرانی نیستند صفرند. معادله (۲.۴.۴) را می توان به شکل زیر نیز نوشت:

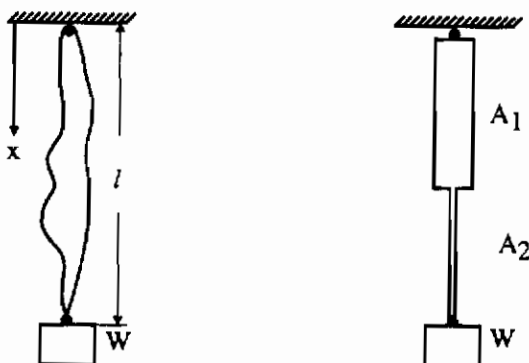
$$\lambda_i g_i = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.4.5)$$

زیرا اگر و تنها اگر  $g_i = 0$  باشد  $t_i = 0$  است. می توان نشان داد که اگر از معادله (۲.۴.۵) استفاده کنیم، که معادله شرط مکملی نامیده می شود، می توانیم در تابعی کمکی از تابعهای کمبود خلاص شویم. وقتی این کار را بکنیم از تغییرات تابعی کمکی نسبت به ضریب لاگرانژ نیز خلاص می شویم، و به جای آن قیدهای نامساوی را در شرایط بهیمنگی اضافه می کنیم. این نوع برخورد با قیدهای نامساوی در

۷۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

مثال زیر تشریح می شود.

### مثال ۲.۴.۱



شکل ۲.۴.۱ کابل آویخته شده: (a) سطح مقطع کلی؛ (b) دو قطعه ای با سطح مقطع ثابت

کابل شکل (a) ۲.۴.۱ توسط وزنه  $W$  و وزن خودش کشیده می شود. مساحت سطح مقطع  $A(x)$  کابل باید برای مینیمم شدن حجم چنان طراحی شود که تنش از مقدار مجاز  $\sigma_0$  تجاوز نکند و مساحت سطح مقطع از یک مقدار مینیمم  $A_0$  کمتر نشود. فرض می کنیم که اگر از وزن کابل صرف نظر شود، بار  $W$  بتواند با حداقل مساحت سطح مقطع کابل تحمل گردد. یعنی:

$$W \leq A\sigma_0. \quad (2.4.6)$$

همچنین فرض می کنیم کابل به اندازه کافی بلند است که وزن آن ایجاب می کند مساحت سطح مقطع در بالا بزرگتر از  $A_0$  باشد.

مسئله از نظر ایستایی معین است. بار محوری کابل معادله های زیر را برآورده می کند:

$$P' + \rho A = 0, \quad P(l) = W, \quad (2.4.7)$$

در حالی که  $\rho$  چگالی وزنی است. آن گاه مسئله می تواند به شکل زیر رابطه سازی شود:

## بخش ۲.۴: قیدهای موضعی و رویکرد مین ماکز (Minmax) ۷۱

$$\begin{aligned} & \int_0^l A(x) dx \quad \text{تابع} \\ & A(x)\sigma_0 - P(x) \geq 0, \quad \text{رانسبت به} \quad (۲.۴.۸) \\ & A - A_0 \geq 0, \\ & P' + \rho A = 0. \end{aligned}$$

مینیمم کنید.

تابعی لاگرانژ عبارت است از:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A(x), P(x), \lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)) = & \int_0^l A dx + \int_0^l \lambda_1 (A\sigma_0 - P) dx \\ & + \int_0^l \lambda_2 (A - A_0) dx + \int_0^l \lambda_3 (P' + \rho A) dx. \end{aligned} \quad (۲.۴.۹)$$

تغییرات  $\mathcal{L}$  را می گیریم و داریم:

$$\delta \mathcal{L} = \int_0^l \delta A dx + \int_0^l \lambda_1 (\delta A \sigma_0 - \delta P) dx + \int_0^l \lambda_2 \delta A dx + \int_0^l \lambda_3 (\delta P' + \rho \delta A) dx. \quad (۲.۴.۱۰)$$

از جمله هایی که  $\delta P$  دارد انتگرال جزء به جزء می گیریم تا به  $\delta P$  تبدیل شود، آن گاه ضرایب  $\delta A$  و  $\delta P$  را مساوی صفر قرار می دهیم. در این صورت داریم

$$1 + \lambda_1 \sigma_0 + \lambda_2 + \rho \lambda_3 = 0, \quad (۲.۴.۱۱)$$

$$\lambda_1 + \lambda_3' = 0, \quad \lambda_3(0) = 0. \quad (۲.۴.۱۲)$$

این معادله ها با دو نامساوی

$$A\sigma_0 - P \geq 0, \quad (۲.۴.۱۳)$$

$$A - A_0 \geq 0, \quad (۲.۴.۱۴)$$

افزایش یافته است که معادله های پذیرش قیدها عبارتند از:

$$\lambda_1 (A\sigma_0 - P) = 0. \quad (۲.۴.۱۵)$$

$$\lambda_2 (A - A_0) = 0. \quad (۲.۴.۱۶)$$

۷۴ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

و معادله (۲.۴.۷).

برای حل معادله های بالا به این نکته توجه می کنیم که در نزدیکی  $x=0$  فرض می کنیم  $A > A_0$  است، به این سبب از معادله (۲.۴.۱۶) داریم  $\lambda_2 = 0$ . می توانیم  $\lambda_1$  را از معادله (۲.۴.۱۲) در معادله (۲.۴.۱۱) جایگزین کنیم و روابط زیر را بیابیم:

$$1 - \lambda_3 \sigma_0 + \rho \lambda_3 = 0, \quad \lambda_3(0) = 0. \quad (2.4.17)$$

معادله براحتی حل می شود و جواب آن عبارت است از:

$$\lambda_3 = (e^{\rho x / \sigma_0} - 1) / \rho, \quad (2.4.18)$$

و آن گاه از معادله (۲.۴.۱۲) داریم:

$$\lambda_1 = -(1/\sigma_0) e^{\rho x / \sigma_0}. \quad (2.4.19)$$

این دو معادله تا زمانی معتبرند که  $A > A_0$  باشد. از معادله (۲.۴.۱۹) می بینیم که  $\lambda_1$  غیر صفر است، بنابراین از معادله (۲.۴.۱۵):

$$A(x) = P(x) / \sigma_0 \quad \text{وقتی که} \quad A > A_0. \quad (2.4.20)$$

اکنون می توانیم جواب کلی  $A(x)$  را بدست آوریم. در انتهای کابل داریم  $A = A_0$ ، و از معادله (۲.۴.۷) داریم:

$$P = W + \rho(l - x)A_0. \quad (2.4.21)$$

این جواب زمانی که  $P$  از  $A_0 \sigma_0$  بیشتر شود، که از معادله (۲.۴.۲۱) در  $x = x_i$  پیش می آید، معتبر نیست.

$$x_i = l - \frac{A\sigma_0 - W}{\rho A_0} \quad (2.4.22)$$

در  $x < x_i$  داریم  $A > A_0$ ، پس  $P = A\sigma_0$ ، و معادله (۲.۴.۷) می تواند با معادله زیر

بخش ۲.۴: قیدهای موضعی و رویکرد مین-ماکز (Minmax) ۷۳

جایگزین شود:

$$A'\sigma_0 + \rho A = 0, \quad A(x_i) = A_0. \quad (2.4.23)$$

این معادله براحتی حل می شود و جواب آن عبارت است از:

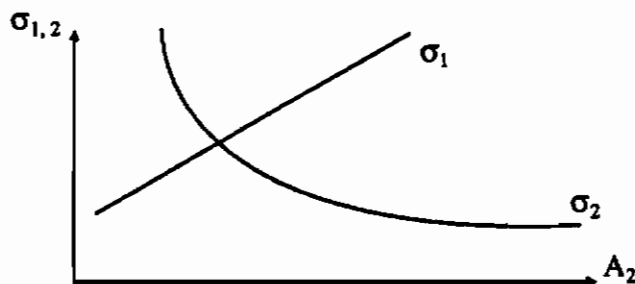
$$A(x) = A_0 e^{\rho(x_i - x)/\sigma_0}, \quad x < x_i. \quad (2.4.24)$$

رابطه سازی دیگر مسأله مثال ۲.۴.۱ عبارت است از یافتن کابلی که حجم مشخصی داشته باشد و کمترین تنش ممکن را دارا باشد. تابع هدف عبارت است از:

$$\min_{A(x)} \max_{0 \leq x \leq l} \sigma(x). \quad (2.4.25)$$

این نمونه ای است از مسائل معروف به مین-ماکز. مسائل مین-ماکز مشکلی که دارند این است که ماکزیم تابع مشتقهای پیوسته ندارند. این مطلب را می توان با در نظر گرفتن ساده ترین حالت ماکزیم یک تابع در دو نقطه دید. به عنوان مثال حالتی را در نظر بگیرید که مساحت سطح مقطع کابل در هر قطعه ثابت است تا هزینه تولید آن پایین باشد. شکل (b) ۲.۴.۱ حالتی که تعداد قطعات دو و متغیرهای طراحی دو مساحت سطح مقطع  $A_1$  و  $A_2$  است نشان می دهد.

شکل ۲.۴.۲ یک تغییر ممکن تنشهای ماکزیم هر قطعه به عنوان تابعی از  $A_2$  است. افزایش  $A_2$  تنش ماکزیم در قطعه پایین را کاهش، ولی در قطعه بالا را افزایش می دهد. دیده می شود که تنش ماکزیم تیر در نقطه ای که ماکزیم از یک قطعه به قطعه دیگر جهش دارد در شیب یک گسستگی دارد.



شکل ۲.۴.۲ گسسته بودن تابع ماکزیم



برای کابل مثال ۲.۴.۱، دو رابطه سازی مینیم سازی حجم و یا مینیم سازی تنش ماکزیمم برای حجم مشخص  $V_0$  معادلند. یعنی می توانیم یک تنش مجاز حدس بزیم و برای این تنش مجاز حجم را مینیم کنیم. اگر حجم بهین بدست آمده از  $V_0$  بیشتر بود، تنش مجاز را افزایش می دهیم و بهینه سازی را تکرار می کنیم. به طور مشابه، اگر حجم بهین از  $V_0$  کمتر بود تنش مجاز را کاهش می دهیم و مجدداً بهینه یابی می کنیم. در هر حال، برای بسیاری از مسائل، پیدا کردن یک رابطه سازی معادل بدون مینیم سازی یک ماکزیمم ممکن نیست. به عنوان مثال، هنگامی که شکل یک سوراخ را بهینه می کنیم تا تمرکز تنش کاهش پیدا کند، اغلب روی حجم قیدی نداریم. بنابراین، نمی توانیم مسأله را به مینیم سازی حجم نسبت به قید تنش تبدیل کنیم. تیلور و بندسور<sup>۱</sup> [۸] یک جواب مناسب ساده ای برای مسائل با مشتقهای گسسته ارائه کرده اند. آنها جایگزینی تابع هدف معادله (۲.۴.۲۵) را با یک تابع هدف دیگر به اضافه یک معادله قید پیشنهاد کردند. مقدار

$$\beta \quad \text{را مشروط به} \quad \sigma(x) \leq \beta, \quad 0 \leq x \leq l. \quad \text{مینیم کنیم} \quad (2.4.26)$$

متغیر طراحی اضافی  $\beta$  حد تنش مجهول است که می خواهیم آن را تا حد ممکن پایین نگهداریم. اکنون تابع هدف عبارت است از یکی از متغیرهای طراحی که کاملاً هموار است. این راهکار یعنی تبدیل یک مسأله مین - ماکز به یک مسأله هموار با استفاده از یک متغیر اضافی، در بسیاری از کاربردها مفید است. این راهکار را برای مسأله کابل مثال (۲.۴.۱) تشریح می کنیم.

### مثال ۲.۴.۲

مسأله طراحی کابل شکل (۲.۴.۱(a)) را برای مینیم شدن ماکزیمم تنش، مشروط به حد  $V_0$  برای حجم، و یک حد پایینی  $A_0$  روی مساحت سطح مقطع رابطه سازی کنید. مسأله ابتدا به شکل زیر رابطه سازی می شود

$$\max_{0 \leq x \leq l} \sigma(x)$$

را نسبت به

بخش ۲.۵: شرایط لازم و کافی بهینگی ۷۵

$$\begin{aligned} A - A_0 &\geq 0, \\ \int_0^1 A(x) dx &= V_0, \\ P' + \rho A &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

و

مینیم کنید

دقت کنید که ما قید حجم را به عنوان یک قید تساوی رابطه سازی کردیم و نه یک نامساوی، زیرا برداشت کلی و تجربه به ما می گوید که تمامی حجم به منظور مینیم شدن تنش به کار می رود. اکنون رابطه سازی مین-ماکز را با رابطه سازی تیلور-بندسوی بتا<sup>۱</sup> جایگزین می کنیم

$$\begin{aligned} \beta \\ A(x)\beta - P(x) &\geq 0, \quad \text{رانشبت به} \\ A - A_0 &\geq 0, \\ \int_0^1 A(x) dx &= V_0, \\ P' + \rho A &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

و

مینیم کنید

حل این مسأله به عنوان تمرین به عهده خواننده گذاشته می شود (تمرین ۴) • • •

### ۲.۵ شرایط لازم و کافی بهینگی

در غیاب قیدهای تساوی، معادلات اولر- لاگرانژ شرط لازم بهینگی را فراهم می کند (شرایط بهینگی). بر خلاف حالتی که از حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده می شد، نشان دادن این که چنان شرایطی شرایط کافی بهینگی نیز هستند، کار ساده ای نیست.

کافی بودن شرایط بهینگی گاهی می تواند بر اساس اصول تغییرات مکانیک محیط پیوسته بنا شود. برای یک مدل جزء جزء شده، با استفاده از فنون برنامه ریزی ریاضی بهینه سازی (فصل ۵)، می توانیم کفایت شرایط بهینگی را بر اساس تحدب تابع هدف و قیود بنا کنیم. با این وجود، در حالت کلی بررسی تحدب تابع هدف و قیود نیز کار ساده ای نیست. بیشتر مسائل بهینه سازی نامحدبند.

بنابراین، تدوین کفایت شرایط بهینگی یا مشخص کردن بهین محلی و فراگیر، سؤالی است که پاسخ به آن برای بیشتر حالاتها ممکن نیست. اغلب برای پاسخ به چنین سؤالیهای یا باید بر شمم و تجربه مهندسی

<sup>1</sup>) Taylor- Bendsøe 'beta'

۷۶ بانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

اعتماد کنیم و یا بر فنون آزمون و خطا.

با استفاده از اصول تغییرات مکانیک، چگونگی برقراری کفایت شرایط بهینگی برای دسته ای خاص از مسائل بهینه سازی را تشریح می کنیم.

#### ۲.۵.۱ سازه های ارتجاعی با سختی ماکزیمم

تدوین و توسعه این بخش بر اساس کار پراگر<sup>۱</sup> و همکارانش است (مراجع ۹ و ۱۰ را ببینید). یک سازه ارتجاعی که تحت تأثیر یک بار  $2P$  در نقطه ای مثل  $X$  است را در نظر بگیرید. فرض کنید بار آن چنان است که در امتداد خود یک تغییر مکان واحد ایجاد می کند. آن گاه بر اساس اصل بقای انرژی [11] داریم

انرژی داخلی ذخیره شده = کار خارجی

یا

$$\frac{1}{2}(2P \times 1) = P = \int_V s(X)e[Q(X)]dv, \quad (2.5.1)$$

که در آن  $e[Q(X)]$  انرژی ارتجاعی ویژه یا انرژی کرنشی یک سازه با سختی واحد در اثر میدان کرنش  $Q(X)$  که با اعمال تغییر مکان واحد در  $X$  به وجود می آید است، و  $s(X)$  سختی ویژه سازه در  $X$  است. یعنی  $s(X)$  سختی در واحد طول یک سازه یک بعدی و یا سختی در واحد سطح سازه دو بعدی است. بنابراین  $s(X)$  طراحی سازه را مشخص می کند، در حالی که تابع  $e[Q(X)]$  از پارامترهای طراحی مستقل است. به عنوان نمونه  $s(X)$  و  $e[Q(X)]$  برای یک جزء تیر یک بعدی به ترتیب برابر با  $EI(x)$  و  $\frac{1}{2}(\text{انحنا})^2$  است.

می خواهیم سازه ای را طراحی کنیم که برای یک سختی کلی داده شده مقدار  $P$ ، باری که تغییر مکان واحد در  $X$  را به وجود می آورد، ماکزیمم باشد. از معادله (۲.۵.۱) روشن است که ماکزیمم سازی  $P$  نسبت به قید انتگرالی سختی ویژه

$$\int_V s(X)dv = s_0, \quad (2.5.2)$$

بخش ۲.۵: شرایط لازم و کافی بهینگی ۷۷

می تواند با یافتن نقطه 'ایستای تابعی کمکی

$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{V}} s(X) e[Q(X)] dv - \lambda \left[ \int_{\mathcal{V}} s(X) dv - s_0 \right]. \quad (2.5.3)$$

تحقق یابد. شرط لازم ایستا بودن  $\mathcal{L}$  عبارت است از

$$\delta \mathcal{L} = 0 = \int_{\mathcal{V}} \left( e[Q(X)] + s(X) \frac{\partial e}{\partial s} \right) \delta s dv - \lambda \left( \int_{\mathcal{V}} \delta s dv \right). \quad (2.5.4)$$

از آن جا که سازه با هر طراحی باید معادله های تعادل را برآورده کند، بنابراین براساس اصل انرژی ارتجاعی مینیمم (که یک حالت خاص از اصل انرژی پتانسیل مینیمم برای تغییر مکانهای اعمال شده است)، جمله 'دوم اولین انتگرال صفر می شود و داریم:

$$\int_{\mathcal{V}} (e[Q(X)] - \lambda) \delta s dv = 0. \quad (2.5.5)$$

بنابراین برای تغییرات اختیاری  $\delta s$  داریم:

$$e[Q(X)] = \lambda = \text{عدد ثابت} \quad (2.5.6)$$

معادله ۲.۵.۶ شرط لازم بهینگی است. یعنی سختی یک سازه 'ارتجاعی برای یک طراحی سازه' داده شده در صورتی ایستاست که انرژی کرنشی ارتجاعی ویژه در سرتاسر سازه ثابت باشد. می خواهیم بررسی کنیم و ببینیم که آیا این شرط کافی نیز هست. برای پاسخ به این سؤال دو طراحی جداگانه  $s$  و  $\bar{s}$  را با انرژی کرنشی ویژه  $e[Q(X)]$  و  $e[\bar{Q}(X)]$  در نظر می گیریم که هر دو قید سختی کلی ثابت را برآورده می کنند

$$\int_{\mathcal{V}} s(X) dv = \int_{\mathcal{V}} \bar{s}(X) dv = s_0. \quad (2.5.7)$$

بار  $P$  و  $\bar{P}$  به ترتیب مربوط به  $s$  و  $\bar{s}$  عبارتند از:

$$P = \int_{\mathcal{V}} s(X) e[Q(X)] dv \quad \text{و} \quad \bar{P} = \int_{\mathcal{V}} \bar{s}(X) e[\bar{Q}(X)] dv, \quad (2.5.8)$$

از کم کردن  $\bar{P}$  و  $P$  داریم

۲۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

$$P - \bar{P} = \int_V s(X)e[Q(X)]dv - \int_V \bar{s}(X)e[\bar{Q}(X)]dv. \quad (2.5.9)$$

چون  $Q(X)$  میدان کرنش قابل قبول از نظر جنبشی برای طراحی  $s$  نیز هست، اگر  $\bar{Q}(X)$  را در تعریف  $\bar{P}$  با  $Q(X)$  جایگزین کنیم، از اصل انرژی پتانسیل مینیمم تضمین می کنیم که

$$\int_V \bar{s}(X)e[\bar{Q}(X)]dv \leq \int_V \bar{s}(X)e[Q(X)]dv. \quad (2.5.10)$$

بنابراین:

$$P - \bar{P} \geq \int_V s(X)e[Q(X)]dv - \int_V \bar{s}(X)e[Q(X)]dv. \quad (2.5.11)$$

اگر طراحی  $s$  شرط بهینگی معادله (۲.۵.۶) را برآورده کند، آن گاه

$$P - \bar{P} \geq \lambda \int_V [s(X) - \bar{s}(X)]dv. \quad (2.5.12)$$

بالاخره، با ملاحظه معادله (۲.۵.۷) داریم:

$$P - \bar{P} \geq 0, \quad \text{یا} \quad P \geq \bar{P}. \quad (2.5.13)$$

این معادله می گوید که شرط (۲.۵.۶) نه تنها یک شرط لازم بلکه یک شرط کافی بهینگی است.

## ۲.۵.۲ طراحی بهین ستونهای اولر-برنولی<sup>۱</sup>

ما مسأله ماکزیمم کردن بار کمانش یک ستون اولر-برنولی با حجم یا وزن مشخص را که سطح مقطع آن از رابطه  $I(x) = \alpha[A(x)]^n$ ,  $n = 1, 2, 3$  یا  $n = 1, 2, 3$  تبعیت می کند، در نظر می گیریم. همه می دانیم که بار کمانش یک سازه عبارت است از مینیمم مقدار خارج قسمت ریلی<sup>۲</sup> برای تمامی میدانهای تغییر مکان هایی که از نظر جنبشی قابل قبول باشند [11]. برای یک ستون بهین می خواهیم این مقدار را با تغییر توزیع مصالح در امتداد طول ستون ماکزیمم کنیم. بنابراین مسأله فعلی عبارت است از ماکزیمم کردن مقدار مینیمم خارج قسمت ریلی برای بار کمانش

1) Euler- Bernoulli

2) Rayleigh

بخش ۲.۵: شرایط لازم و کافی بهینگی ۷۹

$$p = \max_{I(x)} \min_{w(x)} \frac{\int_0^l EI(x) w''^2 dx}{\int_0^l w'^2 dx} = \max_{A(x)} \min_{w(x)} \frac{\int_0^l E\alpha[A(x)]^n w''^2 dx}{\int_0^l w'^2 dx}, \quad (2.5.14)$$

مشروط به قید حجم ثابت

$$\int_0^l A(x) dx = V_0. \quad (2.5.15)$$

با استفاده از فن ضربگر لاگرانژ داریم

$$\mathcal{L} = \max_{A(x)} \min_{w(x)} \frac{\int_0^l E\alpha[A(x)]^n w''^2 dx}{\int_0^l w'^2 dx} - \lambda \left[ \int_0^l A(x) dx - V_0 \right]. \quad (2.5.16)$$

شرایط لازم برای پایداری و بهینگی می تواند با صفر قرار دادن تغییرات اول لاگرانژین بدست آید،

یعنی

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \frac{2 \int_0^l E\alpha[A(x)]^n w'' \delta w'' dx}{\int_0^l w'^2 dx} - \frac{2 \int_0^l E\alpha[A(x)]^n w''^2 dx}{\left[ \int_0^l w'^2 dx \right]^2} \left[ \int_0^l w' \delta w' dx \right] \\ & + \frac{\int_0^l n E\alpha[A(x)]^{n-1} w''^2 \delta A dx}{\int_0^l w'^2 dx} - \lambda \left[ \int_0^l \delta A(x) dx \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

جمله هایی که تغییرات مشتقات  $w$  را دارند لازم است انتگرال گیری جزء به جزء شوند. بعد از دوباره

مرتب کردن جمله ها ضرایب  $\delta w$  و  $\delta w'$  معادله پایداری و شرایط مرزی مربوط برای هر طرح  $A(x)$  را

می دهد در صورتی که ضریب  $\delta A$  شرط بهینگی را می دهد

$$\text{شرط بهینگی} : [E\alpha A^n(x) w'']' + p w'' = 0. \quad (2.5.18)$$

$$\text{شرایط مرزی} : \delta w = 0, \quad \text{یا} \quad [E\alpha A^n(x) w'']' + p w' = 0, \quad (2.5.19)$$

$$\delta w' = 0, \quad \text{یا} \quad E\alpha A^n(x) w'' = 0. \quad (2.5.20)$$

$$\text{شرایط بهینگی} : n E\alpha A^{n-1} w''^2 - \lambda \int_0^l w'^2 dx = 0. \quad (2.5.21)$$

چون جمله دوم در معادله (۲.۵.۲۱) ثابت است، معادله می تواند به شکل زیر ساده شود

$$A^{n-1} w''^2 = c^2 = \text{عدد ثابت} \quad (2.5.22)$$

می توان نشان داد که این عبارت است از بیان چگالی انرژی کرنشی ثابت در شکل حالت

۸۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

کمانشی<sup>۱</sup> ستون بهین.

کفایت شرط بهینگی می تواند براحتی برای حالت  $n=1$  برقرار گردد. برای این حالت معادله<sup>۱</sup> (۲.۵.۱۵) به شکل زیر در می آید:

$$w''^2 = c^2. \quad (2.5.23)$$

با دو طراحی جداگانه  $A(x)$  و  $\bar{A}(x)$  شروع می کنیم که هر دو قید حجم ثابت (۲.۵.۱۵) را برآورده می کنند که به رابطه<sup>۱</sup> زیر می انجامد:

$$\int_0^l (A - \bar{A}) dx = 0. \quad (2.5.24)$$

بارهای کمانش مربوط  $p_{cr}$  و  $\bar{p}_{cr}$  با حالت های کمانشی  $w$  و  $\bar{w}$  از روابط زیر بدست می آیند:

$$p_{cr} = \frac{\int_0^l E \alpha A w''^2 dx}{\int_0^l w'^2 dx}, \quad \bar{p}_{cr} = \frac{\int_0^l E \alpha \bar{A} \bar{w}''^2 dx}{\int_0^l \bar{w}'^2 dx}. \quad (2.5.25)$$

چون حالت کمانشی  $w$  از نظر جنبشی برای طراحی  $\bar{A}(x)$  نیز قابل قبول است، به کمک خارج قسمت ریلی معادله<sup>۱</sup> (۲.۵.۱۴)، مقدار کمیت  $\bar{p}$  که به شکل زیر تعریف می شود:

$$\bar{p} = \frac{\int_0^l E \alpha \bar{A} w''^2 dx}{\int_0^l w'^2 dx}, \quad (2.5.26)$$

خاصیت زیر را دارد

$$\bar{p} \geq \bar{p}_{cr}. \quad (2.5.27)$$

از کم کردن  $p_{cr}$  از دو طرف رابطه<sup>۱</sup> (۲.۵.۲۷) و دوباره مرتب کردن داریم:

$$p_{cr} - \bar{p}_{cr} \geq p_{cr} - \bar{p}. \quad (2.5.28)$$

بنابراین

$$p_{cr} - \bar{p}_{cr} \geq \frac{\int_0^l E \alpha w''^2 (A - \bar{A}) dx}{\int_0^l w'^2 dx}. \quad (2.5.29)$$

## بخش ۲.۵: شرایط لازم و کافی بهینگی ۸۱

اگر طراحی  $A(x)$  شرط بهینگی (۲.۵.۲۳) را برآورده کند آن گاه به واسطه معادله (۲.۵.۲۴) داریم:

$$p_{cr} - \bar{p}_{cr} \geq 0, \quad (2.5.30)$$

که معنی آن این است که از تمامی طراحی‌ها با شکل‌های سطح مقطع متفاوت آن که شرط بهینگی را برآورده کند بیشترین مقدار بار بحرانی را دارد، و این کفایت شرط بهینگی است. پراگر و تیلور<sup>۱</sup> [9] اثبات کفایت مشابهی برای مسأله دوگان حالت مینیم سازی حجم یا وزن ستون اولر-برنولی برای یک بار کمانش داده شده ارائه دادند.

اگر چه اثبات کفایت شرط بهینگی برای مقادیر  $n$  غیر از یک مشکل است، پاسخهای صریح طرح بهین برای تمامی شرایط مرزی کلاسیک کاملاً معلوم شده و در مراجع [12-16] در دسترس است. جوابهای عددی تقریبی با استفاده از مدل تغییر مکان اجزای محدود نیز در مراجع [17-20] برای ستونهایی که تکیه گاه ارتجاعی دارند و با در نظر گرفتن یک توزیع بار محوری کلی و برای قابهای سردر گزارش شده است. کارهای قبل تر، بخصوص کارهای تاج بخش و کلر<sup>۲</sup> [13]، رفتار تک حالتی فرض کرده اند و گسستگی در شیب و نیروی برشی در محلهایی که مساحت سطح مقطع صفر می شود را اجازه نداده اند. آلفاف و رسموسن<sup>۳</sup> [21] نشان داده اند که طراحی تاج بخش و کلر [13] برای ستون یکسر گیردار بهینه نیست و جوابهای عددی دو حالتی<sup>۴</sup> دقیقتری با در نظر گرفتن قیدی روی مساحت سطح مقطع مینیمم ارائه کرده اند. آلفاف و رسموسن یک مقدار حدی برای قید مساحت مینیمم یافته اند که زیر آن مقدار حدی، ستونهای یک سرگیردار بهین یک رفتار دو حالتی دارند. مقاله های آقاییان ماسور<sup>۵</sup> [22 و 23]، آلفاف [24]، و پلوت، جانسون و آلفاف<sup>۶</sup> [25] با به کارگیری تقریب کمتری نوشته شده و جوابهای چند حالتی<sup>۷</sup> برای ستونهای با پایه های ارتجاعی را رابطه سازی کرده اند.

## مثال ۲.۵.۱

به منظور تشریح، ما حل یکی از حالت‌های کلاسیک را در این جا مطرح می کنیم و بقیه حالتها را به

1) Prager and Taylor

2) Tadjbaksh and Keller

3) Olhoff and Rasmussen

4) bimodal

5) Masur

6) Plaut, Johnson, and Olhoff

7) multi-modal



## ۸۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

تمرینها محول می کنیم. ماکزیمم سازی بار بحرانی یک ستون با تکیه گاه ساده به طول  $l$  را که مقید به قید حجم ثابت است، معادله (۲.۵.۱۵)، در نظر بگیرید. اولین بار در مرجع [19] یک جواب صریح برای این مسأله ارائه شد. ما با نوشتن معادله های حاکم و شرایط مرزی مسأله شروع می کنیم

$$\text{معادله پایداری} : [E\alpha A^3 w''']'' + pw'' . \quad (2.5.31)$$

$$\text{شرایط مرزی} : w(0) = w(l) = 0 , \quad (2.5.32)$$

$$A^3(0)w''(0) = A^3(l)w''(l) = 0 . \quad (2.5.33)$$

$$\text{شرایط بهینگی} : A^2 w''^2 = c^2 , \text{ or } w'' = \pm c/A . \quad (2.5.34)$$

نتیجه شرط مرزی (۲.۵.۳۳) و شرط بهینگی (۲.۵.۳۴) این است که

$$A(0) = A(l) = 0 . \quad (2.5.35)$$

با جایگزینی شرط بهینگی در معادله پایداری داریم

$$A''^2 + \frac{\beta^2}{A} = 0 , \quad (2.5.36)$$

که در آن

$$\beta^2 = p/E\alpha . \quad (2.5.37)$$

معادله دیفرانسیل (۲.۵.۳۶) و شرایط مرزی مربوط را می توان با استفاده از تغییر متغیرها حل کرد.

اگر داشته باشیم

$$A = u^{1/2} , \quad (2.5.38)$$

با یک بار انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل داریم

$$u' = \pm (c_1 - 4\beta^2 u^{1/2})^{\frac{1}{2}} , \quad (2.5.39)$$

که  $c_1$  ثابت انتگرال گیری است. از معادله بالا می توان یک بار دیگر انتگرال گیری کرد. داریم

$$|x - c_2| = - \int \frac{du}{(c_1 - 4\beta^2 u^{1/2})^{\frac{1}{2}}} . \quad (2.5.40)$$

بخش ۲.۵: شرایط لازم و کافی بهیگی ۸۳

با استفاده از یک تغییر متغیر دیگر  $t = c_1 - 4\beta^2 u^{1/2}$  می توانیم از طرف راست این معادله یک بار دیگر انتگرال گیری کنیم. داریم

$$|x - c_2| = \frac{1}{6\beta^4} [(c_1 - 4\beta^2 A)^{1/2} (c_1 + 2\beta^2 A)]. \quad (۲.۵.۴۱)$$

دو ثابت انتگرال  $c_1$  و  $c_2$  را می توان با استفاده از شرط مرزی معادله (۲.۵.۳۵) بدست آورد که عبارتند از:

$$c_2 = \frac{1}{6\beta^4} c_1^{3/2}, \quad \text{و} \quad |l - c_2| = \frac{1}{6\beta^4} c_1^{3/2}. \quad (۲.۵.۴۲)$$

در نتیجه

$$c_1 = (3l\beta^4)^{2/3}, \quad \text{و} \quad c_2 = l/2. \quad (۲.۵.۴۳)$$

بنابراین، مقدار بهین مساحت سطح مقطع در هر نقطه در امتداد طول ستون از معادله (۲.۵.۴۱) بدست می آید.

برای محاسبه پارامتر بار بحرانی  $\beta$  از قید حجم استفاده می کنیم

$$\int_0^l A(x) dx = 2 \int_0^{l/2} A(x) dx = 2 \int_0^{l/2} u^{1/2} dx = 2 \int_0^{u(l/2)} u^{1/2} \frac{dx}{du} du = V_0, \quad (۲.۵.۴۴)$$

یا از معادله (۲.۵.۳۹)

$$\int_0^l A(x) dx = V_0 = 2 \int_0^{u(l/2)} \frac{u^{1/2}}{(c_1 - 4\beta^2 u^{1/2})^{1/2}} du. \quad (۲.۵.۴۵)$$

از طرف راست این معادله می توان انتگرال گیری کرد. داریم:

$$V_0 = \frac{(c_1 - 4\beta^2 u^{1/2})^{1/2}}{8\beta^6} \left[ c_1^2 - \frac{2}{3} c_1 (c_1 - 4\beta^2 u^{1/2}) + \frac{1}{8} (c_1 - 4\beta^2 u^{1/2})^2 \right]_0^{u(l/2)}. \quad (۲.۵.۴۶)$$

با یادآوری تعریف  $u$ ، از معادله های (۲.۵.۴۱) و (۲.۵.۴۳) می توان  $u(l/2)$  را محاسبه کرد که

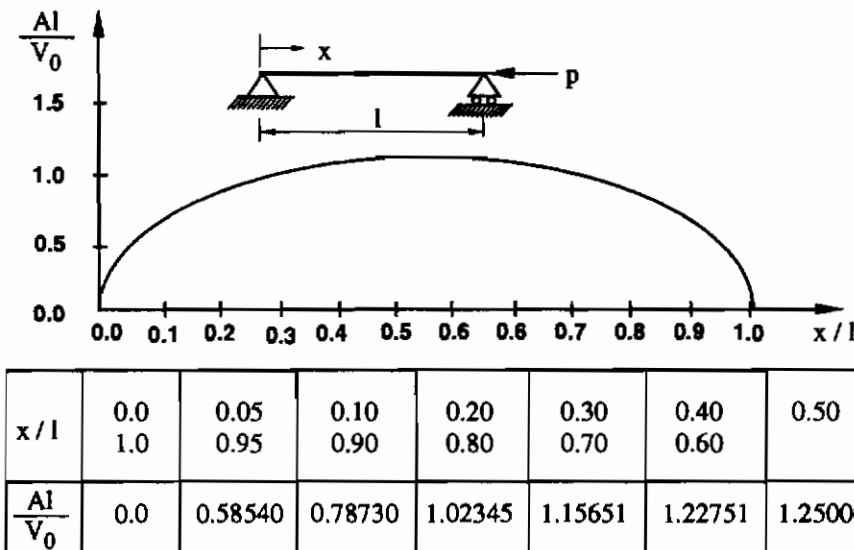
عبارت است از:

$$u(l/2) = \frac{1}{16\beta^4} (3l\beta^4)^{4/3}. \quad (۲.۵.۴۷)$$

۸۴ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

با جایگزین معادله (۲.۵.۴۷) و مقدار  $c_1$  از معادله (۲.۵.۴۳) در معادله (۲.۵.۴۶)، مقدار بهین پارامتر بار و بار بحرانی را بدست می آوریم.

$$\beta_{opt}^2 = \frac{(15V_0)^3}{243l^5}, \quad \text{و} \quad (p_{cr})_{opt} = \frac{125}{9} \frac{E\alpha V_0^3}{l^5}. \quad (2.5.48)$$



شکل ۲.۵.۱ توزیع مساحت برای ستون

با مقایسه با یک تیر با مساحت سطح مقطع ثابت که در آن  $A_0 = V_0/l$  و  $I_0 = \alpha V_0^3/l^3$  داریم

$$(p_{cr})_{opt} = \frac{125}{9} \frac{EI_0}{l^2} = 1.41 \frac{\pi^2 EI_0}{l^2} = 1.41 p_{0cr}. \quad (2.5.49)$$

یعنی ستون پله ای عمقی بهین از ستون یکنواخت به همان حجم ۴۱٪ قوی تر است. با دانستن  $c_1$ ،  $c_2$  و  $\beta$ ،  $A(x)$  از معادله (۲.۵.۴۱) کاملاً معلوم می شود. به صفر بودن مساحت سطح مقطع در دو انتهای ستون توجه کنید که یک نتیجه مطلوب نیست. این نتیجه بر اثر تعریف نکردن یک قید کران پایینی برای توزیع مساحت به وجود آمده است. • • •

طراحی بهین صفحات نازک برای پایداری. برای یک ستون، برآیند تنش محوری در حالت پیش کماتش مستقل از تغییرات مساحت سطح مقطع در امتداد طول ستون است. ولی این مطلب در صفحات

## بخش ۲.۵: شرایط لازم و کافی بهیگی ۸۵

نازك درست نیست. برآیندهای تنش صفحه ای در حالت پیش کمانش در صفحات نازك در واقع توابعی از توزیع ضخامتند. بنابراین، مسأله بهینه سازی صفحات نازك برای پایداری، بسیار پیچیده تر از ستون است.

در صفحات دایره ای نازك، موقعیت چندان بد نیست. زیرا معادله های حاکم نتیجه شده (از پایداری و بهیگی) معادله های دیفرانسیل غیر خطی معمولی اند که می شود آنها را با بعضی از روشهای عددی مانند آنچه توسط فرایوانسال<sup>۱</sup> [۲۶] پیشنهاد شده حل کرد.

مسأله در مورد صفحات مستطیلی نازك که معادله های حاکم بر آنها معادله های دیفرانسیل با مشتق جزئی غیر خطی اند پیچیده تر است. به عنوان مثال، سؤال یکتایی جواب را نمی شود به آسانی پاسخ داد. با فرض غیر کششی بودن تغییر شکلهای پیش کمانش که به مستقل بودن برآیندهای تنش صفحه ای از ضخامت در حالت پیش کمانش می انجامد، یک شرط یکنواخت بودن چگالی انرژی کرنشی بنا می شود که برای چنین صفحاتی شرط بهیگی است [27]. حتی در این حالت اگر نسبت ابعاد به یک نزدیک باشد بهینه سازی صفحه بر اساس چنان فرضی به جوابهای قانع کننده ای نمی انجامد.

آرمند و لودیر<sup>۲</sup> [28] کوشیده اند که این مشکل در بهینه سازی صفحات را با وجود فرین های محلی بسیار زیاد به جای یک بهین فراگیر منفرد توضیح دهند. بر اساس این توضیح، جوابی که توسط فرایوانسال [26] بدست آمد تنها یک بهین محلی در گروه توزیع های ضخامت پیوسته می باشد. سیمیتسز<sup>۳</sup> [29] نشان داده است که در حجم مساوی، صفحات دایره ای سخت تر بارهای کمانشی بسیار بالاتری نسبت به صفحه بهین فرایوانسال دارند. به طور مشابه، کمت<sup>۴</sup> [27] که مدلهای اجزای محدود صفحات مستطیلی را بهینه کرد، توزیعهای ضخامت ناپیوسته ای را مشاهده کرد که گرایشی به شکل خمیده دارند و عالی بودن صفحات سخت تر را پیش بینی کرد. هفتکه و پراساد<sup>۵</sup> [30] در مقاله مروریشان در زمینه طراحی سازه های بهین با اجزای خمشی صفحه ای، طراحیهای کاملاً مختلفی که برای یک مسأله خاص توسط پژوهشگران بدست آمده توضیح می دهند که ابراز می دارد صفحات سخت تر خمیده بهتر از صفحات بهین با توزیع های ضخامت پیوسته اند. آلهاف<sup>۶</sup> [31] برای این رفتار و سؤال منفرد بودن و بهین محلی در صفحات، یک تعدیل ریاضی پیشنهاد می کند. برای استفاده از مراجع بیشتر خواننده به

1) Frauenthal

2) Armand and Lodier

3) Simitses

4) Kamat

5) Hafika and Prasad

6) Olhoff

۸۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

رساله گجوسکی و زیکسکوسکی<sup>۱</sup> [32] ارجاع داده می شود.

۳. ۲. ۵. تیرهای اولر- برنولی<sup>۲</sup> ارتعاشی بهین

بسامد اصلی ارتعاش آزاد یک تیر از مقدار مینیمم خارج قسمت ریلی<sup>۳</sup> زیر روی تمامی میدان های تغییر مکان از نظر جنبشی قابل قبول بدست می آید [11].

$$\omega^2 = \max_{A(x)} \min_{w(x)} \frac{\int_0^l E\alpha[A(x)]^n w''^2 dx}{\int_0^l \rho A(x) w^2 dx}, \quad (2.5.50)$$

با این وجود، گرچه هم پایداری و هم ارتعاش تیرهای اولر- برنولی با یک دستگاه مقدار ویژه مشابه رابطه سازی می شود، معیار بهینه سازی ارتعاش آزاد تیرهای اولر- برنولی با معیار بهینه سازی ستونهای اولر- برنولی متفاوت است. برخلاف حالت ستونها، صورت خارج قسمت ریلی برای ارتعاش آزاد تیر شامل جرم سازه که تابعی از مساحت سطح مقطع است می باشد.

مسأله ماکزیمم سازی بسامد ارتعاشی یک تیر اولر- برنولی در حال ارتعاش آزاد به حجم  $V_0$  و چگالی  $\rho$  را در نظر بگیرید. دوباره فرض می کنیم 3 یا 2،  $n = 1, 2$ ،  $I(x) = \alpha[A(x)^n]$ . آن گاه معادله حرکت تیر و شرط لازم بهینگی از ماکزیمم سازی مقدار مینیمم خارج قسمت ریلی،  $w^2$ ، مشروط به قید حجم ثابت بدست می آید. به سخن دیگر، اگر از لاگرانژین زیر شروع کنیم

$$\mathcal{L} = \max_{A(x)} \min_{w(x)} \frac{\int_0^l E\alpha[A(x)]^n w''^2 dx}{\int_0^l \rho A(x) w^2 dx} - \lambda \left[ \int_0^l A(x) dx - V_0 \right], \quad (2.5.51)$$

که تابعی از تابع  $w(x)$  و  $A(x)$  است، و تغییرات کلی آن را نسبت به هر دو تابع مساوی صفر قرار دهیم، داریم

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \frac{2 \int_0^l E\alpha[A(x)]^n w'' \delta w'' dx}{\int_0^l \rho A(x) w^2 dx} - \frac{2 \int_0^l E\alpha[A(x)]^n w''^2 dx}{\left[ \int_0^l \rho A(x) w^2 dx \right]^2} \left[ \int_0^l \rho A(x) w \delta w dx \right] \\ & + \frac{\int_0^l n E\alpha[A(x)]^{n-1} w''^2 \delta A dx}{\int_0^l \rho A(x) w^2 dx} - \frac{\int_0^l E\alpha[A(x)]^n w''^2 dx}{\left[ \int_0^l \rho A(x) w^2 dx \right]^2} \left[ \int_0^l \rho w^2 \delta A(x) dx \right] \end{aligned}$$

بخش ۲.۵: شرایط لازم و کافی بهیگی ۸۷

$$+\lambda \left[ \int_0^l \delta A(x) dx \right] = 0. \quad (2.5.52)$$

اگر از جمله اول طرف راست معادله بالا انتگرال جزء به جزء بگیریم و ضرایب  $\delta w$  و  $\delta A$  را جمع کنیم، نتیجه زیر بدست می آید:

$$\text{معادله حرکت:} \quad [E\alpha A^n w'']'' - \omega^2 \rho A w = 0. \quad (2.5.53)$$

$$\text{شرایط مرزی:} \quad \delta w = 0, \text{ or } [E\alpha A^n w'']' = 0, \quad (2.5.54)$$

$$\delta w' = 0, \text{ or } [E\alpha A^n w''] = 0. \quad (2.5.55)$$

$$\text{شرط بهیگی:} \quad nE\alpha A^{n-1} w''^2 - \omega^2 \rho w^2 = \text{عدد ثابت} \quad (2.5.56)$$

از معادله (۲.۵.۵۶) می توان انتگرال گرفت و این نتیجه را بدست آورد که چگالی انرژی لاگرانژ باید در حالت اصلی یک تیر ارتعاشی بهین یکنواخت باشد.

مانند ستونها، کفایت این شرط بهیگی می تواند برای حالت  $n=1$  به سادگی تشریح شود. برای این حالت معادله (۲.۵.۵۶) به صورت زیر در می آید:

$$E\alpha w''^2 - \omega^2 \rho w^2 = c. \quad (2.5.57)$$

با فرض دو طراحی  $A(x)$  و  $A(\bar{x})$  که هر دو قید حجم ثابت معادله (۲.۵.۱۵) و همچنین معادله (۲.۵.۲۴) را برآورده می کنند شروع می کنیم. فرض می کنیم  $w$  و  $\bar{w}$  بسامدهای ارتعاشی اصلی و حالت های اصلی  $w$  و  $\bar{w}$  مربوط به ترتیب برای دو طراحی  $A(x)$  و  $A(\bar{x})$  باشد. بنابراین:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l E\alpha A w''^2 dx}{\int_0^l \rho A w^2 dx}, \quad \bar{\omega}^2 = \frac{\int_0^l E\alpha \bar{A} \bar{w}''^2 dx}{\int_0^l \rho \bar{A} \bar{w}^2 dx}. \quad (2.5.58)$$

چون  $w$  برای  $\bar{\omega}^2$  از نظر جنبشی قابل قبول است، به کمک خارج قسمت ریلی [11] می توان تضمین کرد که:

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\int_0^l E\alpha \bar{A} w''^2 dx}{\int_0^l \rho \bar{A} w^2 dx} \geq \bar{\omega}^2. \quad (2.5.59)$$

اما داریم

$$\bar{\omega}^2 \int_0^l \rho \bar{A} w^2 dx = \int_0^l E\alpha \bar{A} w''^2 dx, \quad (2.5.60)$$

۸۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

و

$$\omega^2 \int_0^l \rho A w^2 dx = \int_0^l E \alpha A w''^2 dx. \quad (2.5.61)$$

از کم کردن معادله (۲.۵.۶۱) از معادله (۲.۵.۶۰) داریم:

$$\bar{\omega}^2 \int_0^l \rho \bar{A} w^2 dx - \omega^2 \int_0^l \rho A w^2 dx = \int_0^l E \alpha (\bar{A} - A) w''^2 dx. \quad (2.5.62)$$

حال فرض کنید که  $A(x)$  شرط بهینگی (۲.۵.۵۷) را برآورده کند، آن گاه معادله (۲.۵.۶۲) می تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\bar{\omega}^2 \int_0^l \rho \bar{A} w^2 dx - \omega^2 \int_0^l \rho A w^2 dx = \int_0^l (\bar{A} - A)(c + \omega^2 \rho w^2) dx, \quad (2.5.63)$$

با ساده سازی و استفاده از معادله (۲.۵.۲۵) داریم:

$$\bar{\omega}^2 - \omega^2 = 0. \quad (2.5.64)$$

با در نظر گرفتن معادله (۲.۵.۵۹) داریم:

$$\omega^2 \geq \bar{\omega}^2, \quad (2.5.65)$$

که کفایت شرط بهینگی معادله (۲.۵.۵۷) است.

باید توجه کرد که برای مسأله دوگان مینیم سازی وزن یک تیر در یک بسامد معلوم نیز می توان نشان داد که شرایط بهینگی همان است. مثالهای بهینه سازی مشابه متعددی با قیدهای بسامد را می توان در مراجع [33-38] یافت. به ویژه، ترنر<sup>۱</sup> [34] و تیلور<sup>۲</sup> [35] برای سازه ارتعاشی محوری با جرم مینیم در یک بسامد طبیعی مشخص جواب دقیقی ارائه می نمایند.

مانند حالت ستونها، جوابهای عددی تقریبی متعددی برای ماکزیمم سازی بسامدهای اصلی تیرهای ارتعاشی با تکیه گاههای ارتجاعی که حجمشان ثابت است و جرملهای غیر سازه ای متمرکز و گسترده ای را دارند و مشروط به کرانهای بالایی و پایینی برای مساحت سطح مقطع هستند، با استفاده از روش تغییر

## بخش ۲.۵: شرایط لازم و کافی بهینگی ۸۹

مکان اجزای محدود در دسترس است. برای مثالهایی از این نوع طراحیهای تقریبی به مراجع [39 و 40] مراجعه کنید. در مقایسه، مقاله‌های منتشر شده در مورد مسأله دوگان مینیمم سازی وزن تیر برای یک کران پایین روی بسامد طبیعی و یک کران بالا و پایین روی متغیرهای طرّاحی، محدود است [41]. این که همیشه مسائل ابتدایی و دوگان در این حالت معادل باشند، روشن نیست [42 و 41].

در پایان موضوع ارتعاش تیرها، مناسب است که به این مطلب اشاره کنیم که شرط بهینگی معادله (۲.۵.۵۷) یکسانی نیز برای طرّاحی بهین تیرهای لایه‌ای (ساندویچی) که مشروط به قید خیز اعمال شده در نقطه<sup>۱</sup> اثر یک بار تناوبی متمرکز منفرد است، به کار می‌رود (برای مثال به مرجع آیسرمن<sup>۱</sup> [43] مراجعه کنید). یک شرط بهینگی بسیار کلی تر برای قید خیز اعمال شده در نقطه<sup>۲</sup> مشخص که زیر بار گسترده<sup>۳</sup> کلی است توسط پلوت<sup>۲</sup> [44] ارائه شده است. پلوت برای تیرهای لایه‌ای (ساندویچی) نشان داده است که می‌شود کفایت شرط بهینگی را بر مبنای اصل ایستا بودن انرژی پتانسیل که توسط شیلد و پراگر<sup>۳</sup> [45] ارائه شده است، بیان کرد. یک مطالعه جدی تر ریاضی از این مسأله با استفاده از دینامیک سازه به عنوان قید توسط مروز<sup>۴</sup> [46] ارائه شده است. در مقاله‌های مروری که در فصل (۱) به آنها اشاره شد می‌توان یک کتاب شناسی بسیار جامع در موضوع بهینه سازی پاسخ دینامیکی یافت.

طرّاحی بهینه صفحات نازک ارتعاشی. مسأله طرّاحی بهین صفحات نازک ارتعاشی محدود به مشکل (که در طرّاحی برای کماتش به وجود می‌آید) وابسته بودن برآیند تنشهای پیش کمانشی به توزیع ضخامت نمی‌شود. این موضوع دلایل جاذبه بیشتر مسأله طرّاحی بهین صفحات نازک ارتعاشی را نسبت به مسأله پایداری توضیح می‌دهد. هفتکه و پراساد<sup>۵</sup> [30] درباره طرّاحی بهین اجزای صفحه‌ای خمشی ارتعاشی یک کتاب شناسی جامع ارائه کرده‌اند.

حل مسأله طرّاحی بهین صفحه دایره‌ای ارتعاشی اولین بار توسط آلهاف [47] ارائه شد. آلهاف نشان داد (تمرین ۸ را ببینید) که با فرض یک پایین ترین حالت متقارن چرخشی، مسأله به یک مسأله مقدار ویژه معمولی، مرتبه چهار، غیر خطی، منفرد اما همگن می‌انجامد. یک جواب عددی تقریبی برای این مسأله ارائه شده، ولی جواب بدست آمده تنها یک بهین محلی است که متعلق به توزیعهای ضخامت پیوسته است. برای حجم یکسان، به دست آوردن یک صفحه دایره‌ای سخت تر که بسامدهای ارتعاش اصلی بسیار بالاتری از جواب اولیه آلهاف داشته باشد، آسان است [47].

1) Icerman

2) Plaut

3) Shield and Prager

4) Mroz

5) Haftka and Prasad



برای صفحات مستطیلی، طراحیهای بهین مدلهای اجزای محدود، که در آنها داشتن توزیعهای ضخامت گسسته امکان پذیر است، دوباره گرایش به توزیع مصالح صفحه در امتدادهای خمیده<sup>۱</sup> جدا جدا شده دارند [48-50]. در حجم یکسان، انتظار می رود که یک صفحه<sup>۲</sup> مستطیلی سخت تر، بسامدهای ارتعاشی اصلی بسیار بالاتری نسبت به صفحه<sup>۳</sup> بهینه شده بر اساس توزیع ضخامت پیوسته داشته باشد.

## ۲.۶ کاربرد جوابهای سری در بهینه سازی سازه ها

روشهای حساب تغییراتی که در بخشهای قبلی بحث شدند برای مسائل ساده ای که مجهولها تابعهای طرّاحی مانند توزیع مساحت بودند بسیار مناسبند. این مسائل، مسائل بهینه سازی پارامتر توزیع شده نامیده می شوند.

رویکرد دیگر حلّ مسائل پارامتر توزیع شده، که آن قدر ساده نیستند که بشود آنها را با روشهای حساب تغییراتی حلّ کرد، استفاده از جوابهای سری است. پنداره<sup>۱</sup> اصلی عبارت است از فرض یک شکل سری برای تابع طرّاحی مجهول در محدوده سازه و همچنین فرض توابع پاسخ مانند تغییر مکانها. بنابراین، در حالت کلی، روش جواب سری مسائل برنامه ریزی ریاضی پیوسته را به گسسته<sup>۲</sup> با تعداد متغیرهای محدود تبدیل می کند. این پنداره اولین بار توسط بالاسوبرامانیام و اسپیلرز<sup>۱</sup> [51] ارائه شد که با استفاده از سریهای فوریه<sup>۲</sup> برای مساحت سطح مقطع سازه های تیر و ستون مسائل مختلف ارتعاشی و کمانشی را حل کردند. روش مشابهی اخیراً توسط پاربری<sup>۳</sup> [52] برای بدست آوردن شکلهای مساحتهای سطح مقطع مینیمم برای صلیب پیچشی و خمشی دلخواه استفاده شده است. این روش با مثال بعدی تشریح خواهد شد.

### مثال ۲.۶.۱

طرّاحی بهین یک ستون با تکیه گاه ساده برای کمانش بحرانی در این مثال تکرار می شود [51] تا استفاده از رویکرد سری فوریه تشریح گردد. مانند مسائلی که قبلاً بحث شد یک قید حجم مصالح ثابت وجود دارد، معادله<sup>۱</sup> (۲.۵.۱۵) را ببینید. هدف یافتن توزیع مساحت سطح مقطع یک ستون صفحه ای پله ای است که بار کمانشی را ماکزیمم کند. یعنی، فرض می شود که توزیع مساحت سطح مقطع به

1) Balasubramanyam and Spillers

2) Fourier

3) Parbery

## بخش ۲.۶: کاربرد جوابهای سری در بهینه سازی سازه ها ۹۱

تغییرات عرض (جهت عمود بر جهت تغییر شکل) یک مقطع مستطیلی مربوط می شود که عمق آن ثابت است. این نوع مسأله مربوط می شود به  $n=1$  در معادله (۲.۳.۲۶).  
با معادله پایداری حاکم مسأله شروع می کنیم که عبارت است از:

$$E\alpha A(x)w'' + pw = 0. \quad (2.6.1)$$

کمیت‌های مجهول را با دو جمله از سری فوریه بسط می دهیم. داریم:

$$w = a_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{L}, \quad (2.6.2)$$

$$A(x) = \beta_0 - \beta_2 \cos \frac{2\pi x}{L}. \quad (2.6.3)$$

دقت کنید که شرایط مرزی ستون احتیاج به داشتن جملات ثابت در معادله (۲.۶.۲) را از بین می برد. به خاطر انتظار داشتن یک شکل حالت و توزیع مساحت سطح مقطع متقارن،  $a_2$  و  $\beta_1$  از سری فوریه حذف شده است. انتخاب یک شکل کسینوسی برای مساحت سطح مقطع این امکان را فراهم می کند که ضربهای سری فوریه ( $Aw''$ ) مستقیماً به یک سری تبدیل شوند.

راهمبرد کلیدی در این کاربرد این است که با جایگزینی شکلهای فرض شده برای آنها در معادله ها، از تعداد جملات مجهول کم کنیم. با مساوی قرار دادن ضرایب توابع مثلثاتی مشابه، می توان معادله های جبری که این ضرایب باید آنها را برآورده کنند بدست آورد. به عنوان مثال، با استفاده از معادله (۲.۴.۱۵) می توانیم نشان دهیم که:

$$\beta_0 = \frac{V_0}{L}. \quad (2.6.4)$$

با جایگزینی  $\beta_0$  در معادله (۲.۶.۳) و آن گاه استفاده از معادله (۲.۶.۲)، حاصلضرب زیر را بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \alpha A(x)w'' = & -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left[ \left( \frac{\alpha V_0}{L} a_1 + \frac{\alpha \beta_2}{2} a_1 - \frac{9\alpha \beta_2}{2} a_3 \right) \sin \frac{\pi x}{L} \right. \\ & \left. + \left( \frac{-\alpha \beta_2}{2} a_1 + \frac{9\alpha V_0}{L} a_3 \right) \sin \frac{3\pi x}{L} - \frac{9\alpha \beta_2}{2} a_3 \sin \frac{5\pi x}{L} \right], \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

۹۴ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

در حالی که اتحاد مثلثاتی زیر نیز مورد استفاده قرار گرفته است.

$$2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B), \quad (۲.۶.۶)$$

با استفاده از معادله (۲.۶.۵) در معادله 'تعادل و مساوی قرار دادن ضرایب جملات سینوس،

معادلات جبری زیر را بدست می آوریم:

$$-E\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{\alpha V_0}{L}a_1 + \frac{\alpha\beta_2}{2}a_1 - \frac{9\alpha\beta_2}{2}a_3\right) + pa_1 = 0, \quad (۲.۶.۷)$$

$$-E\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{9\alpha V_0}{L}a_3 - \frac{\alpha\beta_2}{2}a_1\right) + pa_3 = 0, \quad (۲.۶.۸)$$

$$E\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{9\alpha\beta_2}{2}a_3\right) = 0. \quad (۲.۶.۹)$$

برای این که جواب غیر صفری داشته باشیم، دترمینان ماتریس ضرایب شکل حالت مجهول  $(a_1, a_3)^T$

باید صفر باشد. این موضوع به رابطه 'درجه' دوی زیر برای بار کمانشی  $p$  بر حسب تنها ضریب مجهول  $\beta_2$  باقی مانده مسأله می انجامد.

$$p^2 - E\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{10\alpha V_0}{L} + \frac{\alpha\beta_2}{2}\right)p + 9\alpha^2 E^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\left(\frac{V_0^2}{L^2} + \frac{V_0\beta_2}{2L} - \frac{\beta_2^2}{4}\right) = 0. \quad (۲.۶.۱۰)$$

بار بحرانی با رابطه 'زیر بیان می شود:

$$p = \frac{E\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\alpha}{4} \left[ \frac{20V_0}{L} + \beta_2 \pm \left( 256\frac{V_0^2}{L^2} - 32\frac{V_0\beta_2}{L} + 37\beta_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (۲.۶.۱۱)$$

به منظور بدست آوردن مقدار  $\beta_2$  که بار کمانشی را ماکزیمم می کند، مشتق معادله (۲.۶.۱۱) را

نسبت به پارامتر مجهول  $\beta_2$  می گیریم و آن را مساوی صفر قرار می دهیم. مقدار بهین حاصل  $\beta_2^*$  برابر است با:

$$\beta_2^* = \frac{32 V_0}{37 L}, \quad (۲.۶.۱۲)$$

و مقدار بهین بار کمانش عبارت است از:

$$p_{cr}^* = \frac{45 \pi^2 E \alpha V_0}{37 L^3} = \frac{45}{37} p_{ocr}. \quad (۲.۶.۱۳)$$

## بخش ۲.۷: تمرینها ۹۳

در حالی  $p_{0cr}$  که بار کمانشی ستون با سطح مقطع ثابت به حجم  $V_0$  است. اگر چه این 22% از ستون هم حجم با سطح مقطع ثابت قوی تر است ولی از طراحی بدست آمده در مثال ۲.۵.۱ ضعیفتر است. در آن مثال تغییر در مساحت با تغییر عمق سطح مقطع بدست آمد در حالی که عرض آن ثابت بود ( $n=3$ ). روشن است که بهبود بخشیدن به عمق سطح مقطع برای نائل شدن به افزایش مقاومت کمانشی راه مؤثرتری است. مثال ۲.۵.۱ اگر با  $n=1$  تکرار شود به یک توزیع درجه دو برای مساحت سطح مقطع با بار کمانشی بحرانی  $p_{cr}^* = 12/\pi^2 p_{0cr}$  می انجامد که تقریباً با نتیجه های بدست آمده در معادله (۲.۶.۱۳) یکی است. به علاوه، مزیت این روش بر روشهای کلاسیک دیگر در قابلیت آن در مورد مسائل سازه ای کلی که شرایط بارگذاری متنوعی دارند است که نمی شود آنها را با استفاده از حساب تغییراتی حل کرد. ...

موفقیت جواب سری، در بهینه سازی به میزان زیادی به شکل سری انتخاب شده برای نمایش تابع مجهول بستگی دارد. به منظور مینیم نگاه داشتن تعداد متغیرهای طراحی، تنها چند جمله در سری باید مورد استفاده قرار گیرد. اما با تعداد جملات کمتر در سری، تقریب جواب معادلات دیفرانسیل حاکم ممکن است خوب نباشد. انتخاب یک تقریب دو جمله ای برای شکل حالت در مثالی که تازه حل شد این امکان را فراهم می کند تا جوابی یک پارامتری برای بار کمانشی ماکزیمم به شکل دقیق بدست آید. با این وجود به این نکته باید دقت شود که جواب با دو جمله که در بالا نشان داده شد معادله 'تعادل را دقیقاً برآورده نمی کند. آخرین جمله در معادله' (۲.۶.۵)، وقتی در معادله 'تعادل جایگزین شود صفر نمی شود. اگر، از طرف دیگر، فردی جملات زیادتری را در سری استفاده کند، یافتن مقدار بهین ضرایب جملات مشکل می شود و ممکن است لازم باشد از فنون جست و جوی رسمی استفاده شود. یک روش ساده برای کم کردن تعداد متغیرهای طراحی بدون از دست دادن دقت، استفاده از خاصیت تقارن احتمالی مسأله است که تنها بخشی از هندسه شکل باید مدل شود. یک مثال خوب از این رویکرد در مرجع [52] تشریح شده که برای شکل سطح مقطع یک میله 'پیچشی سه نوع تقارن استفاده شده است.

## ۲.۷ تمرینها

۱- در یک سازه 'ارتجاعی معادله های تعادل و شرایط مرزی آن می تواند با مینیم سازی انرژی پتانسیل سازه بدست آید. این موضوع را برای تیر اولر-برنولی یک سر گیردار تشریح کنید. در مورد نوع شرایط

۹۴ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۲: ابزارهای کلاسیک در بهینه سازی سازه ها)

مرزی دو انتهای تیر بحث کنید. فرض کنید انرژی پتانسیل چنان تیری از رابطه ' زیر بدست می آید:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_v \sigma \epsilon \, dv - \int_0^l q(x) w \, dx,$$

در حالی که

$$\epsilon = -y \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \text{و} \quad \sigma = E \epsilon,$$

و  $q(x)$  بار جانبی خارجی توزیع شده در امتداد تیر است.

۲- مسأله ' مثال ۲.۳.۲ را با  $\xi = l/2$ ,  $q = q_0$ , حل کنید. فرض کنید  $n=2$  و  $n=3$ .

۳- مسأله ' مثال ۲.۳.۳ را برای حالت های زیر حل کنید

a)  $n = 1; \quad q(x) = q_0(l - x)/l.$

b)  $n = 1; \quad q(x) = 4q_0(lx - x^2)/l^2.$

c)  $n = 2; \quad q(x) = q_0.$

d)  $n = 2; \quad q(x) = q_0(l - x)/l.$

e)  $n = 3; \quad q(x) = q_0.$

f)  $n = 3; \quad q(x) = q_0(l - x)/l.$

۴- مثال ۲.۴.۲ را با  $W = 2\rho V_0$ ,  $A_0 = 0.1V_0/l$ , حل کنید.

۵- توزیع مساحت بهین و بار کماتشی مربوط به آن را برای ستون های اولر- برنولی زیر مشروط به قید

حجم ثابت بدست آورید.

a) ستون یک سر گیردار  $n = 1, 2, 3$

b) ستون با تکیه گاه های ساده  $n = 1, 2$

۶- خارج قسمت ریلی برای یک میله ' ارتعاشی محوری با یک جرم  $m$  غیر سازه ای در سر آزاد  $x = l$

آن عبارت است از:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EA(x) u'^2 dx}{\int_0^l \rho A(x) u^2 dx + m[u(l)]^2}.$$

a) معادله ' حرکت و شرط بهینگی را برای طراحی میله ای که کمترین جرم را داشته باشد و بسامد

اصلی آن  $\omega_0$  باشد بدست آورید.

## بخش ۲.۷: تمرینها ۹۵

(b) جواب تورنر [۳۴] که برای چنین میله ای به شکل زیر بدست آمده را بررسی کنید

$$A(x) = \frac{\beta m}{\rho} \tanh \beta l \left[ \frac{\cosh \beta l}{\cosh \beta x} \right]^2, \quad \text{و} \quad V_0 = \frac{m}{\rho} \sinh^2 \beta l,$$

$$u(x) = \sinh \beta x / \sinh \beta l.$$

در حالی که  $\beta = \sqrt{\omega_0^2 \rho / E}$ .

۷- با خارج قسمت ریلی مشابه آنچه در مسأله پیشین آمد برای تیر یکسر گیردار ارتعاشی ساندویچی شروع کنید. فرض کنید تیر جرم غیر سازه ای توزیع شده  $\rho A(x)$  را تحمل می کند. جواب تیلور [۳۵] که توزیع مساحت  $A(x)$  برای تیر بهین با بسامد اصلی مشخص  $\omega_0$  به شکل زیر است را بررسی کنید.

$$A(x) = \frac{\omega_0^2}{Ec^2} \int_x^l (\xi - x) \xi^2 m(\xi) d\xi,$$

در حالی که  $\xi = x/l$  و  $2c^2 = I(x)/A(x)$ .

۸- نشان دهید که بسامد اصلی یک صفحه دایره ای نازک به شعاع  $a$  و تابع توزیع ضخامت  $t(r)$  به شکل زیر است:

$$\frac{\omega^2}{C} = \min_{w(x)} \frac{\int_0^1 h^3(\xi) [w''^2 + 2\nu w'' w' / \xi + (w' / \xi)^2] \xi d\xi}{\int_0^1 h(\xi) w^2 \xi d\xi},$$

در حالی که

$$\xi = \frac{r}{a}, \quad h = \frac{ta^2}{V_0}, \quad V_0 = \int_0^a 2\pi r dr, \quad \text{و} \quad C = \frac{EV_0^2}{12(1-\nu^2)\rho a^8},$$

که پریمها<sup>۱</sup> مشتق گیری نسبت به مختصات شعاعی به بعد  $\xi$  را نشان می دهند.

همچنان نشان دهید که شرط بهینگی برای ماکزیم سازی بسامد اصلی چنان صفحه ای با حجم مشخص  $V_0$  عبارت است از:

$$3h^2[w''^2 + 2\nu w'' w' / \xi + (w' / \xi)^2] - \omega^2 w^2 = \text{constant},$$

در حالی که  $0 \leq \xi \leq 1$  است.

۹- مسأله مثال ۲.۶.۱ را با فرض  $n=2$  حل کنید.

۱۰- معادل حاکم حرکت ارتعاش اجباری حالت پایای یک تیر اولر- برنولی با تکیه گاههای ساده به

شکل زیر است

$$(EIw'')'' - \rho A \omega^2 w = q(x, t),$$

در حالی که بار جانبی اعمال شده برابر  $q(x, t) = q_0 \sin \omega t$  و توزیع مساحت بار رابطه  $I(x) = \alpha[A(x)]^n$  به گشتاور ماند سطح مقطع مربوط می شود. توزیع مساحت سطح مقطع بهین را برای  $n=1, 2$  بدست آورید به شکلی که تغییر مکان مرکز،  $w(l/2)$  با قید حجم مشخص  $V_0$  مینیمم شود. یک جواب متقارن دو جمله ای برای تغییر مکان و توزیع مساحت فرض کنید.

## ۲.۸ مراجع

- [1] Hancock, H., Theory of Maxima and Minima. Ginn and Company, New York, 1917.
- [2] Gelfand, I.M. and Fomin, S.V., Calculus of Variations. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1963.
- [3] Pars, L.A., An Introduction to the Calculus of Variations. Heinmann, London, 1962.
- [4] Hildebrand, F. B., Methods of Applied Mathematics. Prentice-Hall, New Jersey, 1965.
- [5] Reddy, J.N., Energy and Variational Methods in Applied Mechanics. John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [6] Barnett, R.L., "Minimum Weight Design of Beams for Deflection," J. EM Division, ASCE, Vol. EM1, 1961, pp. 75-95.
- [7] Makky, S.M. and Ghalib, M.A., "Design for Minimum Deflection," Eng. Opt., 4, pp. 9-13, 1979.
- [8] Taylor, J.E., and Bendsøe, M.P., "An Interpretation for Min-Max Structural Design Problems Including a Method for Relaxing Constraints," International Journal of Solids and Structures, 30, 4, pp. 301-314, 1984.
- [9] Prager, W. and Taylor, J.E., "Problems of Optimal Structural Design," J. Appl. Mech. 35, pp. 102-106, 1968.
- [10] Prager, W., "Optimization of Structural Design," J. Optimization Theory and Applications, 6, pp. 1-21, 1979.

- [11] Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity. 2nd ed. Pergamon Press, 1975.
- [12] Keller, J.B., "The Shape of the Strongest Column," Arch. Rat. Mech. Anal. 5, pp. 275-285, 1960.
- [13] Tadjbaksh, I. and Keller, J.B., "Strongest Columns and Isoperimetric Inequalities for Eigenvalues," J. Appl. Mech. 29, pp. 159-164, 1962.
- [14] Keller, J.B. and Niordson, F.I., "The Tallest Column," J. Math. Mech., 29, pp. 433-446, 1966.
- [15] Huang, N.C. and Sheu, C.Y., "Optimal Design of an Elastic Column of Thin-Walled Cross Section," J. Appl. Mech., 35, pp. 285-288, 1968.
- [16] Taylor, J.E., "The Strongest Column — An Energy Approach," J. Appl. Mech., 34, pp. 486-487, 1967.
- [17] Salinas, D., On Variational Formulations for Optimal Structural Design. Ph.D. Dissertation, University of California, Los Angeles, 1968.
- [18] Simitses, G.J., Kamat, M.P. and Smith, C.V., Jr., "The Strongest Column by the Finite Element Displacement Method," AIAA Paper No: 72-141, 1972.
- [19] Hornbuckle, J.C., On the Automated Optimal Design of Constrained Structures. Ph.D. Dissertation, University of Florida, 1974.
- [20] Turner, H.K. and Plaut, R.H., "Optimal Design for Stability under Multiple Loads," J. EM Div. ASCE 12, pp. 1365-1382, 1980.
- [21] Olhoff, N.J. and Rasmussen, H., "On Single and Bimodal Optimal Buckling Modes of Clamped Columns," Int. J. Solids and Structures, 13, pp. 605-614, 1977.
- [22] Masur, E.F., "Optimal Structural Design under Multiple Eigenvalue Constraints," Int. J. Solids Structures, 20, pp. 211-231, 1984.
- [23] Masur, E.F., "Some Additional Comments on Optimal Structural Design under Multiple Eigenvalue Constraints," Int. J. Solids Structures, 21, pp. 117-120, 1985.
- [24] Olhoff, N.J., "Structural Optimization by Variational Methods," in Computer Aided Structural Design: Structural and Mechanical Systems (C.A. Mota Soares, Editor), Springer Verlag, pp. 87-164, 1987.
- [25] Plaut, R.H., Johnson, L.W. and Olhoff, N., "Bimodal Optimization of Compressed Columns on Elastic Foundations," J. Appl. Mech., 53, pp. 130-134, 1986.
- [26] Frauenthal, J.C., "Constrained Optimal Design of Circular Plates against Buckling," J. Struct. Mech., 1, pp. 159-186, 1972.
- [27] Kamat, M.P., Optimization of Structural Elements for Stability and Vibration. Ph.D. Dissertation, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, 1972.



- [28] Armand, J.L. and Lodier, B., "Optimal Design of Bending Elements," Int. J. Num. Meth. Eng., 13, pp. 373-384, 1978.
- [29] Simitses, G.J., "Optimal Versus the Stiffened Circular Plate," AIAA J., 11, pp. 1409-1412, 1973.
- [30] Haftka, R.T. and Prasad, B., "Optimum Structural Design with Plate Bending Elements — A Survey," AIAA J., 19, pp. 517-522, 1981.
- [31] Olhoff, N., "On Singularities, Local Optima and Formation of Stiffeners in Optimal Design of Plates," In: Optimization in Structural Design, A. Sawczuk and Z. Mróz (eds.), Springer-Verlag, 1975, pp. 82-103.
- [32] Gajewski, A., and Zyczkowski, M., Optimal Structural Design under Stability Constraints, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [33] Niordson, F.I., "On the Optimal Design of a Vibrating Beam," Quart. Appl. Math., 23, pp. 47-53, 1965.
- [34] Turner, M.J., "Design of Minimum-Mass Structures with Specified Natural Frequencies," AIAA J., 5, pp. 406-412, 1967.
- [35] Taylor, J.E., "Minimum-Mass Bar for Axial vibration at Specified Natural Frequency," AIAA J., 5, pp. 1911-1913, 1967.
- [36] Zarghamee, M.S., "Optimum Frequency of Structures," AIAA J., 6, pp. 749-750, 1968.
- [37] Brach, R.M., "On Optimal Design of Vibrating Structures," J. Optimization Theory and Applications, 11, pp. 662-667, 1973.
- [38] Miele, A., Mangiavacchi, A., Mohanty, B.P. and Wu, A.K., "Numerical Determination of Minimum Mass Structures with Specified Natural Frequencies," Int. J. Num. Meth. Engng., 13, pp. 265-282, 1978.
- [39] Kamat, M.P. and Simitses, G.J., "Optimum Beam Frequencies by the Finite Element Displacement Method," Int. J. Solids and Structures, 9, pp. 415-429, 1973.
- [40] Kamat, M.P., "Effect of Shear Deformations and Rotary Inertia on Optimum Beam Frequencies," Int. J. Num. Meth. Engng., 9, pp. 51-62, 1975.
- [41] Pierson, B.L., "A Survey of Optimal Structural Design under Dynamic Constraints," Int. J. Num. Meth. Engng., 4, pp. 491-499, 1972.
- [42] Kiusalaas, J., "An Algorithm for Optimal Structural Design with Frequency Constraints," Int. J. Num. Meth. Engng., 13, pp. 283-295, 1978.
- [43] Icerman, L.J., "Optimal Structural Design for given Dynamic Deflection," Int. J. Solids and Structures, 5, pp. 473-490, 1969.
- [44] Plaut, R.H., "Optimal Structural Design for given Deflection under Periodic Loading," Quart. Appl. Math., 29, pp. 315-318, 1971.

- [45] Shield, R.T. and Prager, W., "Optimal Structural Design for given Deflection," Z. Angew. Math. Phys., 21, pp. 513-523, 1970.
- [46] Mróz, Z., "Optimal Design of Elastic Structures subjected to Dynamic, Harmonically Varying Loads," Z. Angew. Math. Mech., 50, pp. 303-309, 1970.
- [47] Olhoff, N., "Optimal Design of Vibrating Circular Plates," Int. J. Solids and Structures, 6, pp. 139-156, 1970.
- [48] Olhoff, N., "Optimal Design of Vibrating Rectangular Plates," Int. J. Solids and Structures, 10, p. 93-109, 1974.
- [49] Kamat, M.P., "Optimal Thin Rectangular Plates for Vibration," Recent Advances in Engineering Science, Vol. 3. Proceedings of the 10th Annual Meeting of the Society of Engineering Science, pp. 101-108, 1973.
- [50] Armand, J.L., Lurie, K.A. and Cherkayev, A.V., "Existence of Solutions of the Plate Optimization Problem," Proceedings of the International Symposium Structural Design, Tucson, AZ, pp. 3.1-3.2, 1981.
- [51] Balasubramanyam, K. and Spillers, W.R., "Examples of the Use of Fourier Series in Structural Optimization," Quart. of Appl. Math., 3, pp. 559-566, 1986.
- [52] Parbery, R.D., "On Minimum-Area Convex Shapes of given Torsional and Flexural Rigidity," Eng. Opt., 13, pp. 189-196, 1988.



برنامه ریزی ریاضی، دربارهٔ اکستروم سازی تابع  $f$  که در فضای طّراحی  $n$ -بعدی  $R^n$  تعریف شده و با مجموعه  $S$  در فضای طّراحی محدود شده ارتباط دارد. مجموعه  $S$  ممکن است توسط قیود تساوی یا نامساوی تعریف شود که ممکن است شکل خطّی یا غیر خطّی داشته باشند. تابع  $f$  همراه با مجموعه  $S$  در دامنه  $f$  را مجموعاً برنامه ریاضی یا یک مسألهٔ برنامه ریزی ریاضی می نامند. این اصطلاح معمولاً در هر دو زمینهٔ برنامه ریزی<sup>۱</sup> و زمان بندی<sup>۲</sup> که عموماً در تحقیق در عملیات، که شاخه ای از ریاضیات است و دربارهٔ فرایند تصمیم سازی بحث می کند، مطرح می شود. بسته به طبیعت و نوع متغیرهای طّراحی، توابع قیود و تابع هدف، مسائل برنامه ریزی ریاضی به دسته های متفاوت تقسیم می شود. اما تنها دو دسته از آنها مورد نظر ماست: مسائل برنامه ریزی خطّی و غیر خطّی (که به ترتیب با LP و NLP نشان داده می شوند).

عبارت برنامه ریزی خطّی (LP) گروه خاصی از مسائل اکستروم سازی را در بر می گیرد که در آنها تابع هدف و رابطه های قید توابع خطّی از متغیرهای طّراحی اند. از آن جا که شرط لازم برای یک مینیّم درونی، صفر شدن مشتق اوّل تابع نسبت به متغیرهای طّراحی است، مسائل برنامه ریزی خطّی یک ویژگی مخصوص به خود دارند. آن ویژگی این است که مشتق تابع هدف نسبت به متغیرهای طّراحی اعدادی ثابتند که لزوماً صفر نیستند. این موضوع ایجاب می کند که اکستروم یک مسأله برنامه ریزی خطّی بتواند در داخل فضای طّراحی قابل قبول باشد. بنابراین، باید روی مرز فضای طّراحی که با روابط قیود مشخص می شود، قرار بگیرد. از آن جا که روابط قیود هم توابع خطّی از متغیرهای طّراحی اند، طّراحی

بهین باید در محل تقاطع دو یا چند تابع قید باشد مگر این که مرز قید موازی خطوط تراز تابع هدف باشد. این ویژگی مسائل برنامه ریزی خطی این امکان را فراهم می سازد که الگوریتمهای مؤثری که برای رسیدن به جوابهای بهین مناسبند طراحی شود. مسائل برنامه ریزی خطی که تعداد زیادی متغیر طراحی و قید دارند معمولاً با یک روش بسیار کارا و مطمئن به نام روش سیمپلکس<sup>۱</sup> حل می شوند.

با این وجود، متأسفانه، مسائل معنی دار فیزیکی بسیار اندکی، اگر نگوییم هیچ، در طراحی سازه ها می تواند مستقیماً به عنوان مسائل LP و بدون در نظر گرفتن هیچ گونه ساده سازی رابطه سازی شود. بیشتر مسائل طراحی سازه ها دارای تابع هدف و روابط قید بسیار غیر خطی اند. با این وجود، گروه LP به دلایل مختلف مورد علاقه ماست. اول از همه، بسیاری از مسائل مقید غیر خطی را می توان با خطی تقریب زد و سپس آنها را به کمک الگوریتم LP استاندارد با بازده بالا حل کرد. چنان تقریبهایی امکان حل NLP را برای ما فراهم می کنند. یعنی تقریباً همه مسائل NLP را می توان به عنوان رشته ای از مسائل LP تقریبی تکراری که به جواب واقعی مسأله NLP همگرا می شود، حل کرد به شرط آن که روش به قدر کافی تکرار شود. این روش قدرتمند را برنامه ریزی خطی دنباله ای (SLP) می نامند و در فصل (۶) بحث می شود. روشهایی که ویژه مسائل مقید غیر خطی اند نیز اغلب از برنامه ریزی خطی به عنوان یک گام میانی استفاده می کند. به عنوان مثال، روش زوتندیک<sup>۲</sup> جهت های قابل قبول (به فصل ۵ مراجعه کنید) یک LP را برای یافتن جهت جستجو به کار می گیرد.

این که مسأله مقید غیر خطی در بهینه سازی سازه ها بتواند با یک مسأله مقید خطی معادل تقریبی جایگزین شود، به میزان زیادی به درک شهودی طراحی و دانش و تجربه اش در مورد مسأله بستگی دارد. چنان تقریبهایی باید معمولاً به شکلی اعمال شوند که مشخصه کلی مسأله را زیاد تغییر ندهند. انتخاب بین داشتن یک مقدار بیشتر برای تابع هدف به خاطر تقریب و یا داشتن یک هزینه محاسبه پایین تر باید به دقت انجام گیرد. خوشبختانه چند گروه از مسائل تحلیل سازه ها و طراحی وجود دارند که در آنها چنان تقریبهایی منطقی و معقول است. در بخشهای بعدی، بعضی از آن مسائل به عنوان مسائل LP ارائه می شوند و حل ترسیمی یک مسأله ساده LP تشریح می شود. سپس رابطه سازی استاندارد مسائل LP ریاضی بیان و فنون حل برای مسائل LP به بحث گذاشته می شود. در آخر، حالتی خاص از مسائل LP را که در آنها باید متغیرهای طراحی از یک مجموعه مجزا یا مقادیر

1) Simplex

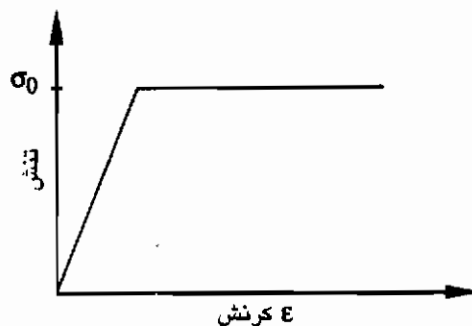
2) Zoutendijk

بخش ۳.۱: تحلیل حد و طراحی سازه‌هایی که به صورت مسائل LP رابطه سازی می‌شوند ۱۰۳

صحیح باشند بحث می‌کنیم.

### ۳.۱ تحلیل حد و طراحی سازه‌هایی که به صورت مسائل LP رابطه سازی می‌شوند

در بسیاری از مسائل طراحی سازه‌ها، شروع به تسلیم شدن نقطه‌ای از سازه به عنوان یک معیار شکست در نظر گرفته می‌شود، ولی این معیار همیشه یک معیار منطقی و معقول نیست. در حالت‌های بسیاری شروع شکست مورد نظر ما نیست، بلکه برای ما بار ماکزیمم، که بار حد یا بار فرو ریختگی نامیده می‌شود، و سازه می‌تواند بدون آنکه عملکردش را از دست بدهد آن را تحمل کند مطرح است. بار فرو ریختگی را می‌توان به عنوان بار مورد نیاز برای به وجود آوردن نقاط تسلیم پلاستیک (خمیری شکل) (که به عنوان نقاط لولای خمیری شکل برای عضوهای نوع خمشی شناخته می‌شوند) کافی که سبب شود سازه یک ساز و کار شود و عملکردش تغییر فاحش پیدا کند، تعریف کرد. هر چند محاسبه دقیق بار فرو ریختگی یک سازه به حل مسأله غیر خطی پر هزینه‌ای نیاز دارد، برای مصالح چکش خوار<sup>۱</sup> یک تخمین محافظه کارانه از آن بار با فرض این که مصالح مانند مصالح کاملاً ارتجاعی - خمیری عمل کنند، امکان پذیر است. یعنی فرض می‌شود مصالح از نمودار تنش - کرنش شکل ۳.۱.۱ تبعیت می‌کند که در تنش  $\sigma_0$  تسلیم می‌شود ولی بعد از حد ارتجاعی به عنوان یک مصالح حمل کننده تنش ثابت عمل می‌کند. این فرض مهم است که باعث می‌شود بتوان تحلیل حد انجام داد و مسائل طراحی را به عنوان مسائل LP رابطه سازی کرد.

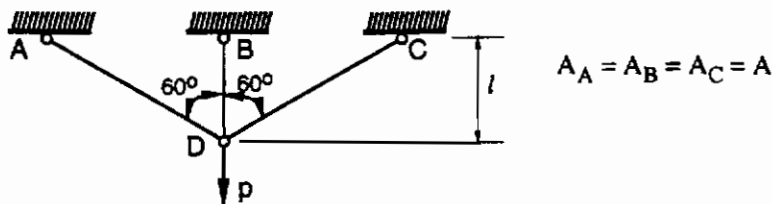


شکل ۳.۱.۱ منحنی تنش - کرنش برای مصالح نوع کاملاً ارتجاعی - خمیری

یک مثال ساده خرابی سه میله‌ای در مثال زیر استفاده می‌شود تا تفاوت بین بار شروع تسلیم و تخمین بار فرو ریختگی مشخص شود.

1) ductile

## مثال ۳.۱.۱



شکل ۳.۱.۲ فرو ریزشگی یک خرابای سه میله ای در اثر یک بار منفرد

برای خرابای با اتصالهای لولایی سه میله ای که دارای بار عمودی است و در شکل ۳.۱.۲ نشان داده شده تحلیل فرو ریزشگی می کنیم. هر سه میله مساحت سطح مقطع یکسان  $A$  داشته و از مصالحی با ضریب یانگ  $E$  و تنش تسلیم  $\sigma_0$  ساخته شده اند. با محاسبه بار  $p$  که سبب می شود اولین میله تسلیم شود شروع می کنیم. اگر تغییر مکان در اتصال مشترك  $D$  را به  $v$  نشان دهیم، کرنشهای سه عضو از رابطه های زیر بدست می آیند:

$$\epsilon_B = \frac{v}{l}, \quad \epsilon_A = \epsilon_C = \frac{v}{4l}. \quad (3.1.1)$$

نیروی مربوط به آنها در عضوها عبارتند از:

$$n_B = \frac{EA}{l}v, \quad n_A = n_C = \frac{EA}{4l}v = 0.25n_B. \quad (3.1.2)$$

با استفاده از معادله های تعادل در لولای  $D$ ، داریم:

$$n_A = n_C, \quad p = n_B + \frac{1}{2}(n_A + n_C) = 1.25n_B, \quad (3.1.3)$$

و بارهای داخلی در سه عضو عبارت است از:

$$n_A = n_C = 0.2p, \quad n_B = 0.8p. \quad (3.1.4)$$

روشن است که اگر بار از صفر افزایش یابد، ابتدا عضو  $B$  تسلیم می شود و وقتی که

بخش ۳.۱: تحلیل حد و طراحی سازه‌هایی که به صورت مسائل LP رابطه‌سازی می‌شوند ۱۰۵

$$n_B = \sigma_0 A, \quad \text{یا} \quad p = 1.25 A \sigma_0. \quad (۳.۱.۵)$$

با این وجود سازه در  $p = 1.25 A \sigma_0$  فرو نمی‌ریزد زیرا عضوهای  $A$  و  $C$  هنوز می‌توانند بار اعمال شده را بدون تغییر شکلهای فاحش تحمل کنند. می‌توانیم تا زمانی که عضو  $A$  یا  $C$  تسلیم شود بار را افزایش دهیم. چون رفتار مصالح را کاملاً ارتجاعی - خمیری فرض کرده‌ایم، با افزایش بار به بیش از بار تسلیم اولیه تنش در عضو  $B$  در  $\sigma_0$  باقی می‌ماند. به سبب وجود تقارن در این مسأله، تسلیم بعدی همزمان در عضوهای  $A$  و  $C$  اتفاق می‌افتد. بنابراین، در فرو ریختگی، هر سه عضو در نقطه تسلیم خواهند بود و داریم:

$$n_A = n_B = n_C = A \sigma_0, \quad (۳.۱.۶)$$

و از معادله‌های تعادل معادله (۳.۱.۴) داریم:

$$p_{\text{فرو ریختگی}} = 2 A \sigma_0. \quad (۳.۱.۷)$$

این مقدار نسبت به باری که اولین تسلیم شروع می‌شود 60% افزایش نشان می‌دهد. ...  
در مثال ۳.۱.۱ شناسایی ترتیب تسلیم اعضا و بدست آوردن حالت تنش در آنها به هنگام فرو ریختن، ساده بود. این واقعیت به ما این اجازه را داد که بار فرو ریختگی را بدون مشکل بدست آوریم. در حالت کلی، بدست آوردن ترکیب عضوهایی که در فرو ریختگی تسلیم می‌شوند ساده نیست و توزیع تنش در فرو ریختگی نیز مشخص نیست. خوشبختانه، این امکان وجود دارد که به منظور بدست آوردن بار فرو ریختگی [1] بر اساس یک قضیه کلی در نظریه پلاستیسیته (خمیری)، مسأله به عنوان یک مسأله LP در نظر گرفته شود. این قضیه، قضیه کران پایین است، و از مرجع [2] کلادین<sup>۱</sup> در زیر نقل می‌شود.  
قضیه کران پایین: اگر بتوان در هر جایی از سازه توزیع تنشی یافت که از نظر داخلی همه جا در تعادل باشد و بارهای خارجی را موازنه کند، و با این وجود شرایط تسلیم را نقض نکند، این بارها توسط سازه با ایمنی تحمل خواهند شد.

کاربرد این قضیه اکنون برای مسأله‌ای که در آن میزان تنش فرو ریختگی مانند مثال ۳.۱.۱ کم اهمیت

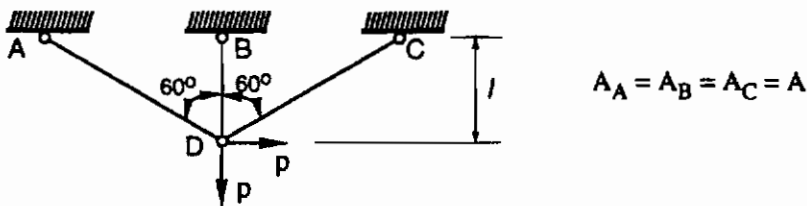
1) Calladine



۱۰۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۳: برنامه ریزی خطی)

نیست، تشریح خواهد شد. ما از همان سازه مثال قبلی استفاده می کنیم، ولی با یک نیروی افقی اضافی در نقطه  $D$ .

### مثال ۳.۱.۲



شکل ۳.۱.۳ تحلیل حد خرابی سه میله ای در اثر دو بار

تحلیل حد خرابی سه میله ای شکل ۳.۱.۱ را که دو نیروی عمودی و افقی مساوی  $p$  به آن اثر می کند، در نظر بگیرید. معادله های تعادل در این حالت عبارتند از:

$$\begin{aligned} n_B + \frac{1}{2}(n_A + n_C) - p &= 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(n_A - n_C) - p &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

و قیدهای زیر را داریم:

$$-A\sigma_0 \leq n_A, n_B, n_C \leq A\sigma_0. \quad (3.1.9)$$

تشخیص این که کدام یک از سه میله در فرو ریختگی تسلیم می شود دیگر آسان نیست. با این وجود می شود ترکیبهای مختلفی از  $n_A$  و  $n_B$  را که معادله های تعادل را برآورده می کنند در نظر بگیریم تا یک کران پایین برای بار فرو ریختگی بدست آوریم. به عنوان مثال، اگر  $n_C = 0$  را آزمایش کنیم، از رابطه تعادل (۳.۱.۸) داریم

$$n_A = \frac{2}{\sqrt{3}}p = 1.155p, \quad \text{و} \quad n_B = 0.423p. \quad (3.1.10)$$

بخش ۳.۱: تحلیل حد و طراحی سازه‌هایی که به صورت مسائل LP رابطه‌سازی می‌شوند ۱۰۷

روشن است که در این حالت،  $n_A$  قبل از  $n_B$  به مقدار تسلیم  $A\sigma_0$  می‌رسد که داریم:

$$n_A = A\sigma_0, \quad n_B = 0.366A\sigma_0, \quad \text{و} \quad p = \frac{\sqrt{3}}{2}A\sigma_0 = 0.866A\sigma_0. \quad (3.1.11)$$

با برآورده شدن تمامی ضرورتهای قضیه 'کران پایین'، می‌بینیم که بار فرو ریختگی از پایین کران  $0.366A\sigma_0$  را دارد. اکنون می‌توانیم ترکیبهای مختلفی از توزیع نیروی اعضا در نظر بگیریم تا برای  $p$  نسبت به آنچه در معادله (۳.۱.۱۱) داشتیم مقدار بیشتری بدست آوریم. برای بدست آوردن بهترین تخمین، مسأله را در قالب یک مسأله ماکزیمم سازی بیان می‌کنیم

$p$  را چنان ماکزیمم کنید که

$$(3.1.12) \quad \text{معادله های (3.1.8) و (3.1.9) برآورده شوند.}$$

روشن است که این یک مسأله LP است بر حسب متغیرهای  $n_A, n_B, n_C$  و  $p$ ، و می‌شود آن را با هر الگوریتم LP حل کرد. این مسأله آن قدر ساده است که در صورت نیاز یک حل ترسیمی نیز برای آن امکان پذیر است (تمرین ۱ را نگاه کنید). . . .

رابطه سازی کلی محاسبه 'بار حد برای سازه' خرابا مانند روشی است که در مثال ۳.۱.۲ استفاده شد. فرض می‌شود که هیچ قسمت از سازه خرابا قبل از رسیدن به بار فرو ریختگی پلاستیک (خمیری) در اثر کمناش از بین نمی‌رود. اگر سازه 'خرپایی' داشته باشیم که  $r$  عضو داشته باشد که بایک سیستم بار  $\lambda p$  بارگذاری شده باشد درحالی که  $p$  بردار بار داده شده و  $\lambda$  یک عدد اسکالر است، آن گاه بار حد را می‌توان با یافتن بیشترین مقدار  $\lambda$  که سازه می‌تواند تحمل کند بدست آورد. معادله های تعادل به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\sum_{j=1}^r e_{ij} n_j = \lambda p_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.1.13)$$

در حالی که  $n_j$  نیروهای هر یک از اعضای خرابا،  $e_{ij}$  کسینوسهای جهت، و  $m$  تعداد معادله های تعادل است. قیود تسلیم به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$A_j \sigma_{Cj} \leq n_j \leq A_j \sigma_{Tj}, \quad (3.1.14)$$

در حالی که  $A_j$ ،  $\sigma_{Tj}$  و  $\sigma_{Cj}$  به ترتیب مساحتهای سطح مقطع ها، تنشهای تسلیم در فشار و تنشهای

۱۰۸ سبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۳: برنامه ریزی خطی)

تسلیم در کشش اند، آن گاه بار حدّ یا فرو ریختگی جواب مسأله 'برنامه ریزی خطی زیر است.

$\lambda$  را مشروط به برآورده شدن

$$(۳.۱.۱۵) \quad \text{معادله های } (۳.۱.۱۳) \text{ و } (۳.۱.۱۴) \text{ ماکزیمم کنید}$$

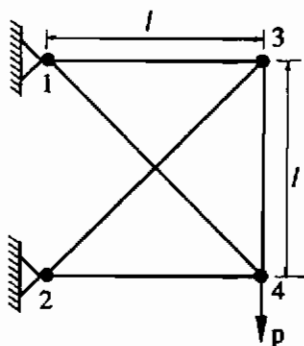
در حالی که  $\lambda$  و نیروهای اعضای  $n_j$  به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته می شوند. یک مسأله 'مرتبط مسأله' طراحی حدّ است که بار فرو ریختگی مشخص می شود و مساحت سطح مقطع بهین باید بدست آید. اغلب هدف عبارت است از مینیمم کردن جرم کل سازه یعنی:

$$(۳.۱.۱۶) \quad m = \sum_{j=1}^r \rho_j A_j l_j, \quad \text{را مینیمم کنید}$$

که در آن  $\rho_j$  و  $l_j$  به ترتیب چگالی و طول عضو  $j$ ام است. مسأله مینیمم سازی معادله '(۳.۱.۱۶)، مجموعه 'قیود، معادله های (۳.۱.۱۳) و معادله های (۳.۱.۱۴)، مشابه آنچه در مسأله 'تحلیل حدّ اعمال شد دارد، ولی  $n_j$  و  $A_j$  به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته می شود. به هر حال این بار، دامنه 'بار  $\lambda$  مشخص است.

### مثال ۳.۱.۳

تحلیل حدّی و طراحی خرابای پنج میله ای که به شکل (۴.۱.۳) نشان داده شده است را به صورت خطی رابطه سازی کنید. فرض کنید تمامی میله ها از یک نوع مصالح ساخته شده باشند و



شکل ۳.۱.۴ تحلیل حدّ و طراحی خرابای پنج میله ای

بخش ۳.۱: تحلیل حد و طراحی سازه‌هایی که به صورت مسائل LP رابطه‌سازی می‌شوند ۱۰۹

$$\sigma_C = -\sigma_T = \sigma_0$$

معادله‌های تعادل عمودی و افقی در گره‌های، نامقید سازه عبارتند از:

$$n_{13} + \frac{\sqrt{2}}{2}n_{23} = 0, \quad n_{24} + \frac{\sqrt{2}}{2}n_{14} = 0, \quad (3.1.17a)$$

$$n_{34} + \frac{\sqrt{2}}{2}n_{23} = 0, \quad n_{34} + \frac{\sqrt{2}}{2}n_{14} = p. \quad (3.1.17b)$$

قیدهای تسلیم عبارتند از:

$$\begin{aligned} -A_{13}\sigma_0 &\leq n_{13} \leq A_{13}\sigma_0, & -A_{23}\sigma_0 &\leq n_{23} \leq A_{23}\sigma_0, \\ -A_{14}\sigma_0 &\leq n_{14} \leq A_{14}\sigma_0, & -A_{24}\sigma_0 &\leq n_{24} \leq A_{24}\sigma_0, \\ -A_{34}\sigma_0 &\leq n_{34} \leq A_{34}\sigma_0. & & \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

مسئله بار حدی مانند آنچه قبلاً تعریف شد مشخص می‌شود: با تغییر نیروی اعضا،  $p$  را مشروط به برآورده شدن معادله‌های تعادل و قیدهای تسلیم ماکزیم کنید. مسئله طراحی حد عبارت است از:

$$\text{عبارت} \quad \frac{m}{pl} = A_{13} + A_{24} + A_{34} + \sqrt{2}(A_{14} + A_{23})$$

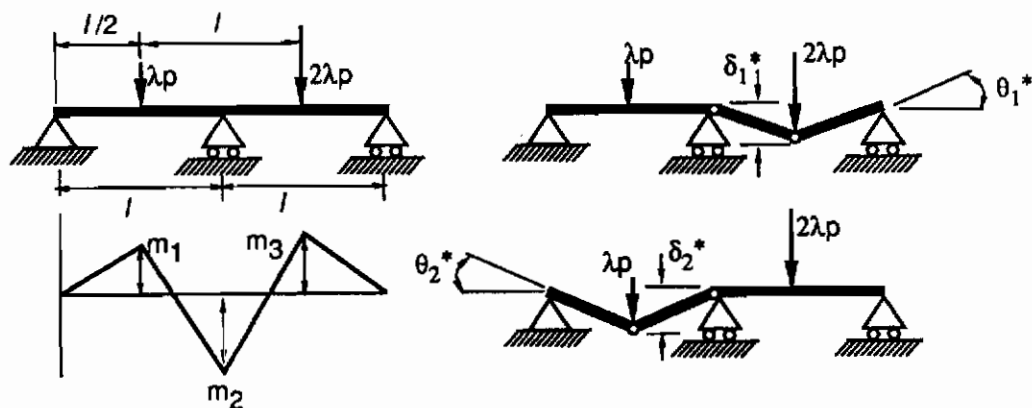
(۳.۱.۱۹) چنان مینیمم کنید که معادله‌های (۳.۱.۱۷) و (۳.۱.۱۸) برآورده شوند

برای مسئله طراحی حد، هم مساحت‌های سطح مقطع و هم نیروهای اعضا به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته می‌شوند. . . .

تحلیل و طراحی سازه‌هایی که عضوهای تحت تأثیر خمش دارند را می‌شود به عنوان مسائل LP رابطه‌سازی کرد مانند آنچه در مراجع [3-5] ارائه شده است. کوهن، گوش و پاریمی<sup>۱</sup> [3] راهکار ممتاز منحصر به فردی برای تحلیل و طراحی تیرها، قابها و طاق‌هایی که موقعیت مشخصی دارند و تحت تأثیر بارهای ثابت، متغیر، تکراری متغیر یا لرزشی اند ارائه کرده‌اند. ما در این جا توجهمان را به مشالهای ساده‌ای از این گروه از مسائل معطوف می‌کنیم.

فرض اساسی در ارتباط با مصالح تیر یا قاب این است که کاملاً ارتجاعی خمیری باشند. لنگر کاملاً خمیری،  $m_p$ ، سطح مقطع تیر، به عنوان لنگر خمشی،  $m$ ، مورد نیاز برای تسلیم شدن تمامی سطح مقطع آن چنان که یک لولا با ضخامت خمشی ثابت درست شود، تعریف می‌شود.

## مثال ۳.۱.۴



شکل ۳.۱.۵ تحلیل حدی تیر دو دهانه

تحلیل حدی اعضای خمشی به کمک یک تیر پیوسته تحت تأثیر نیرویی مطابق شکل ۳.۱.۵ تشریح می شود. به دنبال رابطه سازی کلی که قبلاً ارائه شد، بار حد بیشترین مقدار  $\lambda$  است که سازه می تواند تحمل کند، بدون آن که سازو کار شود. مانند حالت مثال ۳.۱.۲ ترتیب شکل گیری لولاها برای درست شدن یک ساز و کار تیر و توزیع لنگر خمشی در امتداد دهانه تیر خیلی روشن نیست. در حقیقت، توزیعهای لنگر خمشی بی شماری وجود دارند که از نظر ایستایی قابل قبولند و معادله های تعادل را برآورده می کنند. با این وجود، فقط دو امکان برای ساز و کار فرو ریختگی وجود دارد. دو ساز و کار ابتدایی و توزیع لنگر برای تیر در شکل ۳.۱.۵ ارائه شده است.

مسأله LP برای تحلیل خمیری عبارت است از

مقدار  $\lambda$  را

$$(۳.۱.۲۰) \quad \text{مشروط به } m_p \leq m_i \leq m_p, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{ماکزیمم کنید}$$

در حالی که  $m_1$ ،  $m_2$  و  $m_3$  مقادیر لنگر خمشی در نقاطی در امتداد تیر است که پتانسیل تشکیل لولاهای خمیری را دارند، در آن نقاط لنگرهای خمشی ماکزیمم محلی دارند. این سه لنگر نیز در مسأله مجهولند و باید آنها را بدست آورد. در شروع هر ساز و کار فرو ریختگی که در شکل ۳.۱.۵ نشان داده

بخش ۳.۱: تحلیل حد و طراحی سازه‌هایی که به صورت مسائل LP رابطه‌سازی می‌شوند ۱۱۱

شده است، می‌توان به کمک اصل تغییر مکان مجازی دو معادله برای تعادل نوشت. فرض اساسی در نوشتن تغییر مکانهای مجازی این است که لولاها در شکل لولاهای خمیری نیستند ولی برای این معرفی شدند تا تغییر مکانهای کوچکی را که با فرض مستقیم باقی ماندن عضو بین آنها به وجود می‌آید امکان‌پذیر نمایند. رابطه تعادل حاصل عبارت است از:

$$2m_3\theta_1^* + m_2\theta_1^* = 2\lambda p(l/2)\delta_1^*, \quad (3.1.21)$$

$$2m_1\theta_2^* + m_2\theta_2^* = \lambda p(l/2)\delta_2^*, \quad (3.1.22)$$

در حالی که  $\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$  چرخشهای مجازی اعضا در لولاهای خمیری مورد انتظار و  $\delta_1^*$ ,  $\delta_2^*$  تغییر مکانهای مجازی تیر در نقاط بار است. تغییر مکانها و چرخشهای مجازی توسط رابطه‌های جنبشی به هم مربوط می‌شوند و می‌توانند از معادله‌ها حذف شوند. به علاوه، به کمک معادله‌های تعادل، می‌توان دو متغیر  $m_3$  و  $m_1$  را حذف کرد و مسأله LP تعریف شده در (۳.۱.۲۰) به شکل زیر در می‌آید که  $\lambda$  و  $m_2$  را چنان بیابید که

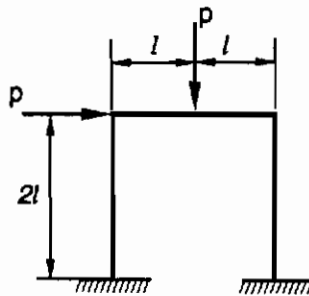
$$\begin{array}{ll} \lambda & \text{مشروط به قیود} \\ -m_p \leq \left(\frac{pl}{4}\lambda - \frac{1}{2}m_2\right) \leq m_p, \\ -m_p \leq m_2 \leq m_p, \\ \text{ماکزیمم شود.} & -m_p \leq \left(\frac{pl}{2}\lambda - \frac{1}{2}m_2\right) \leq m_p. \end{array} \quad (3.1.23)$$

این یک مسأله LP دو متغیره ( $\lambda$  و  $m_2$ ) است که می‌تواند به روش ترسیمی حل شود. . . .

### مثال ۳.۱.۵

به عنوان شرحی بر طراحی حد برای مسائل نوع خمشی، مسأله معروف مینیمم سازی وزن یک قاب صفحه‌ای برای تحمل مجموعه‌ای از بارهای نهایی را در نظر بگیرید. یک قاب سر در یک دهانه‌ای و یک طبقه‌ای با یک بار افقی و عمودی  $p$  مطابق شکل ۳.۱.۶ بارگذاری شده است، برای این مسأله طراحی، فرض می‌شود عضو افقی بالایی با ستونهای عمودی متفاوت است. بر این اساس فرض می‌کنیم سطح مقطعهای تیر و ستون به ترتیب لنگرهای کاملاً خمیری  $m_{pB}$  و  $m_{pC}$  دارند. این دو لنگر خمیری به خواص

سطح مقطعهای عضوهای مربوط بستگی دارند و بنابراین متغیرهای طراحی مسأله اند.



شکل ۳.۱۰۶ طراحی قاب سردر برای جلوگیری از فرو ریختگی خمیری

برای این که مسأله یک مسأله طراحی مینیمم سازی وزن باشد، باید متغیرهای طراحی را به وزن سازه مربوط کنیم. ماسونت و سیو<sup>۱</sup> [6] نشان داده اند که برای مقاطع تیر در خمش یک رابطه خطی تقریبی بین وزن بر واحد طول،  $wl$  و ضریب مقطع خمیری،  $m_p/\sigma_0$  وجود دارد. در محدوده مقاطعی که انتظار می رود برای یک قاب استفاده شود. خطای به وجود آمده به سبب این خطی سازی از مرتبه ۱% است. همین فرض است که مسأله طراحی خمیری را خطی می سازد.

بنابراین فرض خواهیم کرد که مسأله مینیمم سازی وزن یک قاب با مجموعه ای از بارهای نهایی به مینیمم سازی یک تابع مانند

$$w = 2m_{pC}l_C + m_{pB}l_B = 2m_{pC}(2l) + m_{pB}(2l) . \quad (3.1.24)$$

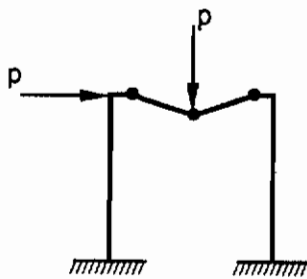
می انجامد. به سبب تمایلی که برای پی بعد سازی وجود دارد دو طرف معادله (۳.۱.۲۴) را بر  $2pl^2$  تقسیم می کنیم تا تابع هدف متناسب با وزن را بدست آوریم که عبارت است از

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{w}{2pl^2}\right) = 2\frac{m_{pC}}{pl} + \frac{m_{pB}}{pl} = 2x_1 + x_2 . \quad (3.1.25)$$

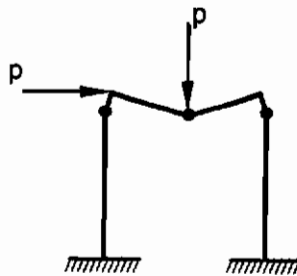
معادله های تعادل می تواند با استفاده از راهکاری مشابه مثال قبل بدست آید. شکل ۳.۱.۷ تمامی سازه و کارهای فرو ریختگی ممکن قاب را نشان می دهد. ظرفیت تحمل بار نهایی سازه برای هر سازه و کار

1) Massonet and Save

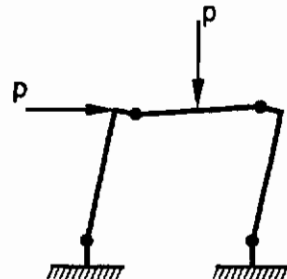
بخش ۳.۱: تحلیل حد و طراحی سازه‌هایی که به صورت مسائل LP رابطه‌سازی می‌شوند ۱۱۳



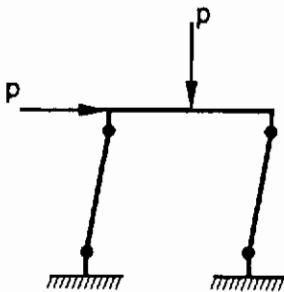
$$1. \quad 4m_b \geq pl$$



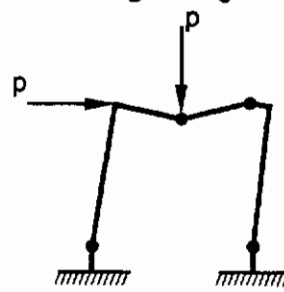
$$2. \quad 2m_b + 2m_c \geq pl$$



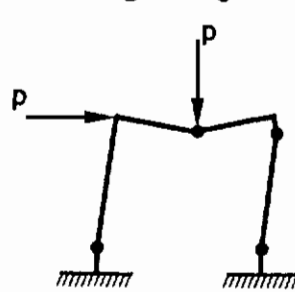
$$3. \quad 2m_b + 2m_c \geq 2pl$$



$$4. \quad 4m_c \geq 2pl$$



$$5. \quad 4m_b + 2m_c \geq 3pl$$



$$6. \quad 2m_b + 4m_c \geq 3pl$$

شکل ۳.۱.۷ سازه کارفرو ریختگی قاب سردر شکل ۳.۱.۶

فرو ریختگی مشخص با تعادل کار مجازی بین کار خارجی نیروهای اعمال شده و کار داخلی لنگرهای کاملاً خمیری اتفاق افتاده هنگام چرخش مجازی لولاهای خمیری، بدست می‌آید. بنابراین یک طراحی قابل قبول طراحی است که در آن ظرفیت کار مجازی داخلی بزرگتر یا مساوی کار خارجی باشد.

نشان دادن این که قیدهای عملکردی مربوط به سازه کارفرو ریختگی شکل ۳.۱.۷ به شکل زیر

است به عنوان تمرین باقی گذاشته می‌شود (به تمرین ۴ نگاه کنید)

$$4x_2 \geq 1, \quad \text{سازه کار تیر ۱} \quad (3.1.26)$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 1, \quad \text{سازه کار تیر ۲} \quad (3.1.27)$$

$$x_1 + x_2 \geq 1, \quad \text{سازه کار مایل ۱} \quad (3.1.28)$$

$$2x_1 \geq 1, \quad \text{سازه کار مایل ۲} \quad (3.1.29)$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 3, \quad \text{سازه کار ترکیبی ۱} \quad (3.1.30)$$



۱۱۴ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۳: برنامه ریزی خطی)

$$(۳.۱.۳۱) \quad \text{ساز و کار ترکیبی ۲} \quad 4x_1 + 2x_2 \geq 3,$$

به علاوه چون  $x_1$  و  $x_2$  نشانگر متغیرهای سطح مقطع هستند لازم است که داشته باشیم:

$$(۳.۱.۳۲) \quad x_2 \geq 0 \quad \text{و} \quad x_1 \geq 0,$$

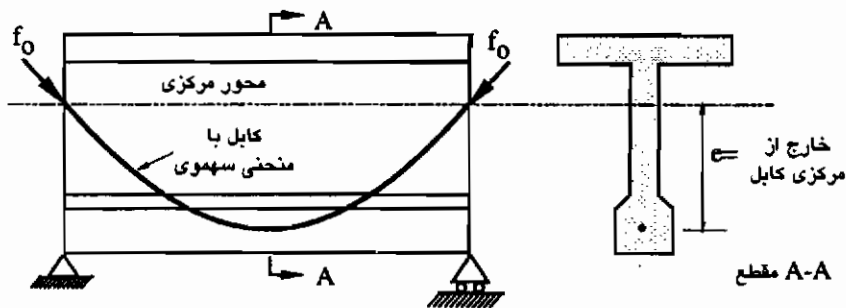
بنابراین مسأله مینیمم سازی وزن تحت تأثیر مجموعه بار نهایی به بدست آوردن مقادیر نامنفی  $x_1$  و  $x_2$  می انجامد که در آن مقادیر  $f$  معادله (۳.۱.۲۵) با شرطهای معادله های (۳.۱.۳۲) - (۳.۱.۲۶) مینیمم شود. روشن است که مسأله یک مسأله LP است. حل تحلیلی این مسأله را تا فرصت دیگر به تعویق می اندازیم. . . .

### ۳.۲ طراحی بتن پیش تنیده به کمک برنامه ریزی خطی

از آن جا که بتن در کشش ضعیف است، پیش تنیدگی کمک می کند تا تنشهای کششی نامطلوب در بتن حذف شود و در نتیجه مقاومتش در خمش بهبود یابد. یک کابل یا میله پیش تنیده یک بار فشاری خارج از مرکز به سطح مقطع تیر اعمال می کند که باری محوری و احتمالاً لنگری خمشی به سبب انحراف کابل به وجود می آید. در ارزیابی تنشها در هر سطح مقطع باید تنشهای در اثر بارهای مرده و زنده (دینامیکی) را به تنشهای به سبب نیروی میله اعمال شده خارج از مرکز اضافه کنیم. برای تیری که ابعاد سطح مقطع آن ثابت است، هزینه کلی تیر را می شود فرض کرد که تقریباً متناسب با هزینه ساخت یک نیروی پیش تنیده مطلوب است. بنابراین مسأله بهینه سازی طراحی یک تیر پیش تنیده به مینیمم سازی مقدار نیروی پیش تنیدگی  $f_0$  می انجامد.

مسأله ساده زیر که طراحی بهین یک تیر با تکیه گاههای ساده است و در شکل ۳.۲.۱ نشان داده شده را در نظر بگیرید. مقدار اولیه نیروی پیش تنیدگی  $f_0$  و خارج از مرکزی  $e$  باید چنان تعیین شود که  $f_0$  مشروط به قیودی روی تنش نرمال، تغییر مکان جانبی، و قیدهای کران بالا و پایین روی متغیرهای طراحی، مینیمم شود. به علاوه، در طراحی یک تیر بتنی پیش تنیده که انتظار می رود برای چند سالی کار کند، باید اجازه دهیم مقداری از نیروی پیش تنیدگی در اثر انقباض وابسته به زمان و اثرات خزش از دست برود. برای سادگی فرایند طراحی اغلب فرض می شود که نیروی پیش تنیدگی فعلی قابل بهره برداری یک کسر ثابت  $\alpha$  از نیروی پیش تنیدگی اولیه  $f_0$  است. در محاسبه توزیع لنگر خمشی یا شکل تغییر یافته یک تیر

بخش ۳.۲: طراحی بتن پیش تنیده به کمک برنامه ریزی خطی ۱۱۵



شکل ۳.۲.۱ تیر پس-تنشی<sup>۱</sup> با تکیه گاههای ساده

پیش تنیده، علاوه بر نیروهای مرده و زنده معمول، باید بار گسترده معادل (تمرین ۶a را نگاه کنید) و بارهای انتهایی که در اثر شکل منحنی میله های خارج از مرکز جاسازی شده به وجود می آید را نیز در نظر داشته باشیم. می توان نشان داد [7,8] که برای شکل سهموی کابل (شکل ۳.۲.۱ را نگاه کنید) لنگر حاصل و خیزها به شکل خطی با کمیت  $f_0 e$  با ضریب ثابت  $k$  که تابعی از خواص مصالح و سطح مقطع است متناسب است. با این فرضها، تنشهای ماکزیمم و خیزهای یک تیر با تکیه گاههای ساده در مرکز تیر اتفاق می افتند. اگر لنگر خمشی مثبت ماکزیمم و خیز ماکزیمم در مرکز تیر با تکیه گاههای ساده شکل ۳.۲.۱ به سبب نیروهای خارجی در  $\bar{z}$  امین شرایط بارگذاری به ترتیب با  $m_{ei}$  و  $\delta_{ei}$  نشان داده شود. آن گاه مسأله بهینه سازی تیر عبارت می شود از:

$$f(f_0, e) = f_0 \quad \text{را مشروط به} \quad (۳.۱.۲۶)$$

$$\sigma^{li} \leq -\frac{\alpha f_0}{a} \pm \frac{m_{ei} - \alpha f_0 e}{z} \leq \sigma^{ui}, \quad (۳.۱.۲۷)$$

$$\delta^{li} \leq \delta_{ei} + \alpha k f_0 e \leq \delta^{ui}, \quad (۳.۱.۲۸)$$

$$e^l \leq e \leq e^u, \quad (۳.۱.۲۹)$$

$$f_0 \geq 0, \quad i = 1, \dots, nl. \quad \text{مینیمم کنید} \quad (۳.۱.۳۰)$$

در این جا  $nl$  نشانگر تعداد شرایط بارگذاری مختلف؛  $e^l, e^u, \delta^l, \delta^u, \sigma^l, \sigma^u$  و کرانهای پایین و بالای تنش، خیز و خارج از مرکزی میله؛  $a$  و  $z$  مساحت مؤثر و ضریب مقطع سطح مقطع می باشد.

مسئله ای که در معادله های (۳.۲.۱) تا (۳.۲.۵) رابطه سازی شد یک مسئله LP نیست، زیرا حاوی ضرب  $f_0 e$  از دو متغیر است. با این وجود، به سادگی می توان با فرض:

$$m = f_0 e \quad (3.2.6)$$

آن را با متغیرهای جدید  $f_0$  و  $m$  به شکل مسئله LP در آورد. مسئله تبدیل شده به LP به شکل زیر خواهد بود:

$$f(f_0, m) = f_0 \quad \text{را مشروط به} \quad (3.2.7)$$

$$\sigma^{li} \leq -\frac{\alpha f_0}{a} \pm \frac{m_{ei} - \alpha m}{z} \leq \sigma^{ui}, \quad (3.2.8)$$

$$\delta^{li} \leq \delta_{ei} + \alpha k m \leq \delta^{ui}, \quad (3.2.9)$$

$$m^l \leq m \leq m^u, \quad (3.2.10)$$

$$f_0 \geq 0, \quad i = 1, \dots, nl, \quad \text{مینیمم کنید} \quad (3.2.11)$$

در حالی که  $m^l$  و  $m^u$  کرانهای بالا و پایین  $f_0 e$  هستند.

موریس<sup>۱</sup> [9] مسئله مشابهی را مورد بررسی قرار داد، ولی با قیدهای اضافی روی ظرفیت لنگر نهایی. او همچنین به منظور اعمال حد مؤسسه<sup>۲</sup> بتن آمریکا روی نیروی پیش تنیدگی برای جلوگیری از شکست زودرس تیر در اثر خرد شدن بتن، قید (۳.۲.۱۱) را بهبود بخشید. موریس بخشی از مسئله را با استفاده از وارون نیروی پیش تنیدگی به عنوان یک متغیر طراحی خطی می کند؛ این تبدیل قید ظرفیت لنگر نهایی را نمی تواند خطی کند. به سبب تمایلی که به خطی سازی وجود دارد، این قید غیر خطی با تعدادی قوس متصل شده که به طور قطعه قطعه خطی و در محل اتصالشان مقادیر واقعی دارند جایگزین می شود. کیرش<sup>۲</sup> [10] نشان داده است که برای تبدیل تیرهای بتنی پیش تنیده<sup>۳</sup> پیوسته به مسائل برنامه ریزی خطی تبدیلهای مناسبی می تواند به کار رود. این مسائل نه تنها شامل بهینه سازی موقعیت نیروی پیش تنیدگی و میله ها می شود بلکه بهینه سازی ابعاد سطح مقطع تیر را نیز در بر می گیرد.

### ۳.۳ طراحی خرپاهای از نظر ایستایی معین. با کمترین وزن

به عنوان مثالی دیگر از مسائل طراحی که می تواند به مسائل LP تبدیل شود، طراحی خرپاهای از نظر

1) Morris

2) Kirsch

بخش ۳.۳: طراحی خراباهای از نظر ایستایی معین، با کمترین وزن ۱۱۷

ایستایی معین با کمترین وزن و با قیدهای تنش و خیز را در نظر می‌گیریم. در این مسائل مشکلی که به وجود می‌آید این است که خیزها به عنوان تابعی از متغیرهای طراحی که مساحت‌های سطح مقطع اعضای خراباست، طبیعتی غیر خطی دارند. این نوع مسأله، به دسته‌ای از مسائل که مسائل برنامه‌ریزی جدایی پذیر [11] معروفند تعلق دارد. در این دسته از برنامه‌ریزی، تابع هدف و قیود را می‌توان به عنوان مجموع توابعی از یک متغیر طراحی تنها بیان کرد. هر کدام از چنین توابعی را می‌توان با توابع قطعه قطعه خطی یا یک مجموعه از قطاعهای خط یا قوسهای متصل به هم که در محل تقاطع قوسها تابع واقعی درونیابی می‌شود تقریب زد.

یک تابع جدایی پذیر غیر خطی  $n$  متغیره،

$$f = f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n), \quad (3.3.1)$$

را می‌توان به شکل:

$$f = \sum_{k=0}^m \eta_{1k} f_{1k} + \sum_{k=0}^m \eta_{2k} f_{2k} + \dots + \sum_{k=0}^m \eta_{nk} f_{nk}, \quad (3.3.2)$$

با

$$x_1 = \sum_{k=0}^m \eta_{1k} x_{1k}, \quad \dots, \quad x_n = \sum_{k=0}^m \eta_{nk} x_{nk}, \quad (3.3.3)$$

$$\sum_{k=0}^m \eta_{1k} = \sum_{k=0}^m \eta_{2k} = \dots = \sum_{k=0}^m \eta_{nk} = 1, \quad (3.3.4)$$

$$\eta_{jk} \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad \text{و} \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (3.3.5)$$

خطی کرد. در این جا  $f_{jk}$  و  $x_{jk}$  مقادیر توابع  $f_1, f_2, \dots, f_n$  و متغیرهای طراحی  $x_1, x_2, \dots, x_n$  در نقطه  $m+1$  از پیش تعیین شده در امتداد هر یک از متغیرهای طراحی؛ و  $\eta_{nk}$  ها توابع درونیابی متغیرهای طراحی اند. دقت کنید که تعداد  $m$ ، نقاط از پیش تعیین شده برای هر متغیر طراحی، در حالت کلی، می‌توانند متفاوت باشند ( $m_1, m_2, \dots, m_n$ , etc)، اما به خاطر سادگی در این جا مساوی در نظر گرفته می‌شوند.

استفاده از  $m$  بازه با  $m+1$  مقدار از متغیرهای طراحی به این سبب است که تمامی محدوده فضای

طراحی ممکن دقیقاً پوشش داده شود. تعداد قطعاتی  $m$ ، درجه تقریب در مسأله اصلی را مشخص می کند- هر چه  $m$  بزرگتر باشد جواب مسأله خطی به جواب واقعی نزدیکتر است. با این وجود، در هر نقطه طراحی داده شده، تقریب خطی برای تابع غیر خطی به مقدار تابع در دو مقدار متغیر طراحی نیاز دارد. بنابراین برای هر متغیر طراحی  $j (j = 1, \dots, n)$  حداقل باید دو  $\eta_{jk}$  متوالی مثبت باشد. این نتیجه ایجاب می کند که به عنوان مثال اگر  $\eta_{pq}$  و  $\eta_{p(q+1)}$  غیر صفر باشند و دیگر  $\eta_{pk}$  ها صفر باشند؛ آن گاه مقدار  $x_p$  در بازه ای بین  $x_{pq}$  و  $x_{p(q+1)}$  قرار دارد و مقدارش برابر است

$$x_p = \eta_{pq}x_{pq} + \eta_{p(q+1)}x_{p(q+1)}, \quad \text{و} \quad \eta_{pq} + \eta_{p(q+1)} = 1. \quad (3.3.6)$$

بنابراین متغیرهای  $(x_1, \dots, x_n)$  تابع با توابع میان یابی  $\eta_{jk}$  جایگزین می شوند و برای هر متغیر طراحی تنها دو تا از آنها مقید به غیر صفر بودند، بنابراین برای تابع در هر متغیر طراحی یک تقریب خطی داریم.

### مثال ۳.۳.۱

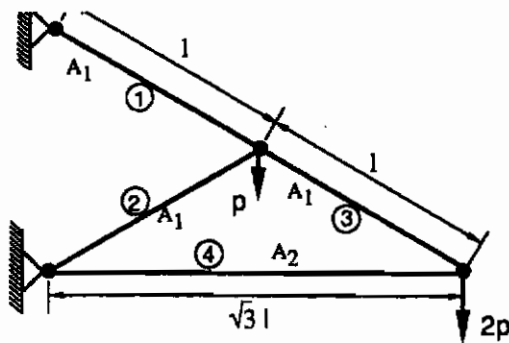
برای توضیح مسأله ای مشابه آنچه مجید<sup>۱</sup> [12] حل کرد در نظر می گیریم. هدف عبارت است از طراحی یک خرپای چهار عضوی نشان داده شده در شکل ۳.۳.۱ که از نظر ایستایی معین است، چنان که وزن آن مینیمم باشد و قیودی روی تنش اعضا و قیدی برای تغییر مکان در لولای نوک خرپا وجود داشته باشد. به منظور ساده سازی مسأله فرض می کنیم اعضای ۱ تا ۳ مساحت سطح مقطع یکسان  $A_1$ ، و عضو ۴ مساحت سطح مقطع  $A_2$  داشته باشد. در اثر بار مشخص شده، نیروی اعضا و تغییر مکان عمودی در لولای ۲ را می توان به سادگی نشان داد که عبارتند از:

$$F_1 = 5p, \quad F_2 = -p, \quad F_3 = 4p, \quad \text{و} \quad F_4 = -2\sqrt{3}p, \quad (3.3.7)$$

$$\delta_2 = \frac{6pl}{E} \left( \frac{3}{A_1} + \frac{\sqrt{3}}{A_2} \right), \quad (3.3.8)$$

در حالی که مقادیر منفی نیروها نشانگر فشاری بودن آنهاست. تنشهای مجاز در کشش و فشار به ترتیب فرض می شود که  $7.73 \times 10^{-4} E$  و  $4.833 \times 10^{-4} E$  باشند که  $E$  ضریب ارتجاعی مصالح است

بخش ۳.۳: طراحی خرابی‌های از نظر ایستایی معین، با کمترین وزن ۱۱۹



شکل ۳.۳.۱ خرابی چهار میله‌ای از نظر ایستایی معین

و تغییر مکان عمودی نوک خرپا مقید است که از  $3 \times 10^{-3}$  بیشتر نباشد. مسأله طراحی برای مینیمم بودن وزن مشروط به قیدهای تنش و تغییر مکان را می‌توان بر حسب متغیرهای بی بعد

$$x_1 = \left( \frac{p}{A_1 E} \right) 10^3, \quad \text{و} \quad x_2 = \left( \frac{p}{A_2 E} \right) 10^3, \quad (3.3.9)$$

به شکل زیر رابطه سازی کرد:

$$\text{را مشروط به} \quad f(x_1, x_2) = \frac{3}{x_1} + \frac{\sqrt{3}}{x_2} \quad (3.3.10)$$

$$18x_1 + 6\sqrt{3}x_2 \leq 3, \quad (3.3.11)$$

$$0.05 \leq x_1 \leq 0.1546, \quad (3.3.12)$$

$$\text{مینیمم کنید} \quad 0.05 \leq x_2 \leq 0.1395, \quad (3.3.13)$$

در حالی که حد کران پایین برای  $x_1$  و  $x_2$  را فرض کرده ایم ۰.۰۵ باشد. به جز تابع هدف که یک تابع غیر خطی جدایی پذیر است، بقیه مسأله خطی است. تابع هدف را می‌توان با استفاده از رابطه‌های (۳.۳.۲) و (۳.۳.۳) به شکل قطعه به قطعه خطی در آورد. به منظور شروع، بازه متغیر طراحی معادله‌های (۳.۳.۱۲) و (۳.۳.۱۳) را به دو قطاع مساوی ( $m=2$ ) تقسیم می‌کنیم که در نتیجه داریم:

$$x_{10} = 0.05, \quad x_{11} = 0.1023, \quad x_{12} = 0.1546,$$

$$x_{20} = 0.05, \quad x_{21} = 0.09475, \quad x_{22} = 0.1395. \quad \text{و}$$

مقادیر تابع هدف برای این نقاط عبارت است از:

۱۴۰ سبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۳: برنامه ریزی خطی)

$$f_{10} = 20, \quad f_{11} = 9.76, f_{12} = 6.47, \\ f_{20} = 34.64, \quad f_{21} = 18.28, f_{22} = 12.42. \quad \text{و}$$

بنابراین تابع هدف خطی شده عبارت است از:

$$f(x_1, x_2) = 20\eta_{10} + 9.76\eta_{11} + 6.47\eta_{12} + 34.64\eta_{20} + 18.28\eta_{21} + 12.42\eta_{22}.$$

بعد از جایگزینی

$$x_1 = 0.05\eta_{10} + 0.1023\eta_{11} + 0.1546\eta_{12}, \\ x_2 = 0.05\eta_{20} + 0.09475\eta_{21} + 0.1546\eta_{22},$$

در معادله های قید (۳.۳.۱۱) تا (۳.۳.۱۳)، یک الگوریتم LP را می توان به کاربرد، مشروط به این که دو  $\eta_{ik}$  متوالی برای هر متغیر طراحی  $x_i$  مثبت باشد. • • •

### ۳.۴ حل ترسیمی مسائل LP ساده

برای مسائل ساده ای که بیش از دو متغیر طراحی ندارند، برای یافتن جواب مسأله LP می توان از روش حل ترسیمی بهره جست. روش ترسیمی نه تنها جواب مسأله را می دهد، بلکه در فهم طبیعت مسأله LP نیز به ما کمک می کند. مثال بعدی به منظور تشریح طبیعت فضای طراحی و جواب بهین آورده شده است.

#### مثال ۳.۴.۱

مسأله طراحی حد قاب سردر مثال ۳.۱.۵ را در نظر بگیرید. مسأله به مینیمم شدن تابع هدف

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2, \quad (۳.۴.۱)$$

نسبت به قیدهای نامساوی معادله های (۳.۱.۲۶) تا (۳.۱.۳۲) انجامید.

از آن جا که مسأله یک مسأله LP در فضای دو بعدی است، می توان یک جواب ترسیمی بدست آورد. قیدهای (۳.۱.۳۲) ایجاب می کنند که ما بتوانیم خود را به ربع نامنفی صفحه  $x_1 - x_2$  در شکل ۳.۴.۱ محدود کنیم، تمامی خطوط مستقیم مربوط به معادله های (۳.۱.۲۶) تا (۳.۱.۳۱) به عنوان

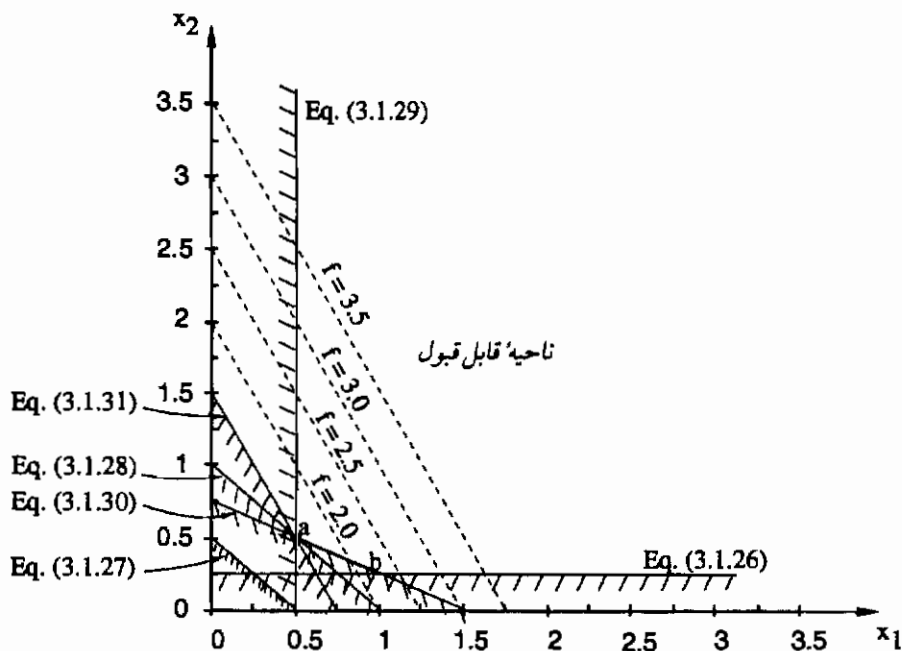
## بخش ۳.۴: حل تریسمی مسائل LP ساده ۱۴۱

تساویهای مؤکد را رسم می کنیم (این خطوط مرزهای قید را مشخص می کنند). به منظور مشخص کردن قسمت قابل قبول و غیر قابل قبول هر طرف یک خط قید داده شده، نقطه ای در هر طرف انتخاب می کنیم و مختصاتش را در نامساوی می گذاریم. اگر نامساوی برآورده شد، آن گاه آن طرف از خط قید که شامل این نقطه است، قسمت قابل قبول و اگر برآورده نشد قسمت غیر قابل قبول است. به عنوان مثال اگر مختصات  $x_1=0$  و  $x_2=0$  در نامساوی (۳.۱.۲۷) جایگزین شود، نامساوی نقض می شود و این بر عدم تعلق مرکز مختصات به حوزه قابل قبول دلالت دارد. اگر این فرایند را برای تمامی قیود نامساوی ادامه دهیم، به سرعت به ناحیه ای می رسیم که یک چند ضلعی محدب است؛ گوشه ها نقاط رأس نامیده می شوند. ناحیه قابل قبول قیدها در شکل ۳.۴.۱ تشریح شده است.

بعد از آن، ترازهای تابع هدف را با مساوی قرار دادن تابع  $2x_1 + x_2$  با یک عدد و رسم خطوطی که با مقادیر مختلف آن عدد بدست می آید، رسم می کنیم. نقطه بهین با یافتن تراز از تابع هدف که تازه به ناحیه قابل قبول رسیده بدست می آید. جهت کاهش  $f$  در شکل ۳.۴.۱ نشان داده شده است و جواب بهین به شکل زیر مشخص شده

$$x_1 = x_2 = 1/2,$$

$$(۳.۴.۲)$$



شکل ۳.۴.۱ حل تریسمی مسأله LP قاب سردر



## ۱۲۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۳: برنامه ریزی خطی)

که مقدار تابع هدف در این نقطه عبارت است از  $f_{\min} = 1.5$ . . . .  
 صرف نظر از حالت تباهیده، جواب بهین در یک مسأله LP همیشه روی یک گوشه یا نقطه رأس قرار دارد. حالت تباهیده وقتی پیش می آید که گرادیان تابع هدف ضریب ثابتی از گرادیان یکی از قیودی باشد که جواب بهین در امتداد آن قرار دارد. آن گاه، هر نقطه در امتداد این قید که نقطه رأس را نیز در بر می گیرد، یک جواب بهین است. به عنوان مثال اگر مسأله ای که تازه بحث کردیم تابع هدفی به شکل زیر داشت:

$$f = c(2x_1 + 4x_2), \quad (3.4.3)$$

که در آن  $C$  یک عدد ثابت است، آن گاه هر نقطه در امتداد خط  $[a, b]$  در شکل ۳.۴.۱ یک جواب بهین است.

مفهوم چند ضلعی محدب با گوشه ها یا رأسهایش در دو بعدی به یک چند وجهی محدب با نقاط فرین در  $R^n$  عمومیت داده می شود. به عنوان مثال، یک چند وجهی محدب [11] مجموعه ای است که از تقاطع تعداد محدودی نیم فضای بسته بدست می آید. به طور مشابه، یک نقطه فرین از یک مجموعه به این شکل تعریف می شود که: نقطه ای مانند  $x$  در  $R^n$  است که نمی تواند به عنوان یک ترکیب محدب  $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$  ( $0 < \alpha < 1$ ) از دو نقطه  $x_1$  و  $x_2$  از مجموعه بیان شود. در نهایت، مانند حالت دو بعدی شکل ۳.۴.۱، با چشم پوشی از تباهیدگی، یک تابع هدف خطی در  $R^n$  تنها در یکی از نقطه های فرین یک چند ضلعی محدب کراندار قرار خواهد داشت. به خوانندگان علاقمند توصیه می شود که برای آگاهی بیشتر در این باره، به مرجع [11] یا [13] مراجعه نمایند.

روشن است که روش ترسیمی بالا نمی تواند برای مسائل برنامه ریزی خطی که بیش از دو متغیر دارند به کار رود. برای حل چنین مسائلی باید دنبال روشهای جایگزین باشیم. روش سیمپلکس که اول بار توسط دنتزیک<sup>۱</sup> [13] پیشنهاد شد برای حل مسائلی که تعداد زیادی متغیر طراحی و قید دارند روشی مؤثر و کاراست. در آینده روش سیمپلکس را مطالعه خواهیم کرد ولی اکنون چند تعریف و مفهوم بسیار مهم در برنامه ریزی خطی را مطرح می کنیم.

1) Dantzing

## ۳.۵ یک برنامه خطی به شکل استاندارد

یک برنامه خطی را به شکل استاندارد گویند اگر به شکل زیر باشد:

$$f = c^T x \quad (۳.۵.۱)$$

$$Ax = b, \quad \text{را مشروط به} \quad (۳.۵.۲)$$

$$x \geq 0, \quad \text{و} \quad \text{مینیمم کنید} \quad (۳.۵.۳)$$

در حالی که  $c$  یک بردار  $1 \times n$ ،  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  و  $b$  یک بردار  $m \times 1$  است. هر برنامه خطی که قیدهای نامساوی دارد را می توان با استفاده از متغیرهای کمبود و زیادتی به شکل استاندارد درآورد. به عنوان مثال، برنامه خطی تعریف شده در معادله های (۳.۱.۲۶) تا (۳.۱.۳۲) را در نظر بگیرید. آن نامساویها را می توانیم به تساویهای اکید به شکل زیر تبدیل کنیم.

$$4x_2 - x_3 = 1, \quad (۳.۵.۴)$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_4 = 1, \quad (۳.۵.۵)$$

$$x_1 + x_2 - x_5 = 1, \quad (۳.۵.۶)$$

$$2x_1 - x_6 = 1, \quad (۳.۵.۷)$$

$$2x_1 + 4x_2 - x_7 = 3, \quad (۳.۵.۸)$$

$$4x_1 + 2x_2 - x_8 = 3, \quad (۳.۵.۹)$$

که در آنها متغیرهای زیادتی  $x_3$  تا  $x_8$  به کار رفته است. این متغیرها باید نامنفی باشند یعنی:

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 8. \quad (۳.۵.۱۰)$$

اگر نوع نامساویهای معادله های (۳.۱.۲۶) تا (۳.۱.۳۱) از نوع مخالف آنها بود، برای تبدیل به قیود تساوی متغیرهای نامنفی  $x_3$  تا  $x_8$  را اضافه می کنیم. در این حالت متغیرهای  $x_3$  تا  $x_8$  را متغیرهای کمبود می گویند. اگر مقادیر اصلی متغیرهای طراحی لازم نباشد که نامنفی باشند باز هم می توانیم با یکی از تعریفهای زیر مسأله را به شکل استاندارد معادله های (۳.۵.۱) تا (۳.۵.۳) تبدیل کنیم.

$$x_1 = u_1 - v_1, \quad \text{و} \quad x_2 = u_2 - v_2, \quad (۳.۵.۱۱)$$

۱۲۲ میانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۳: برنامه ریزی خطی)

که در آن  $u_1, u_2, v_1, v_2 \geq 0$ ، یا با اضافه کردن یک عدد مثبت به اندازه کافی بزرگ  $M$  به متغیر طراحی

$$\bar{x}_1 = M + x_1, \quad (3.5.12)$$

که در این صورت متغیر جدید هنگام طراحی هرگز منفی نمی شود. این متغیرهای مصنوعی اغلب در مسائل طراحی سازه استفاده می شوند که در آنها کمیت‌هایی مانند تنشها به عنوان متغیرهای طراحی به کار می رود. تنشها بسته به شرایط بارگذاری می توانند مثبت یا منفی باشند. از معادله (3.5.11) روشن است که تبدیل مسأله LP به شکل استاندارد ممکن است به افزایش ابعاد فضای طراحی بینجامد. استفاده از معادله (3.5.12) ابعاد مسأله را افزایش نمی دهد ولی تشخیص قبلی مقدار ثابت  $M$  که متغیر طراحی را مثبت خواهد ساخت ممکن است مشکل باشد (انتخاب یک عدد بسیار بزرگ ممکن است به بدخیم شدن عددی بینجامد).

دوباره به معادله (3.5.2) بر می گردیم و توجه می کنیم که اگر  $m=n$  باشد و همه معادله ها به طور خطی مستقل باشند، برای دستگاه معادلات یک جواب یگانه خواهیم داشت، در حالی که با  $m > n$ ، در حالت کلی، یک دستگاه معادلات ناسازگار داریم. تنها در صورتی که  $m < n$  باشد جوابهای متعددی خواهیم داشت. از تمامی این جوابها، جوابی که قیدهای نامنفی بودن را برآورده می کند و تابع هدف  $f$  را مینیمم می سازد مورد نظر ماست.

#### ۳.۵.۱ جواب اصلی

فرض می کنیم رتبه ماتریس  $A$ ،  $m$  باشد و از میان  $n$  ستون  $A$ ، مجموعه ای از  $m$  ستون را که مستقل خطی اند، انتخاب می کنیم. این ماتریس  $m \times m$  را با  $D$  نشان می دهیم. آن گاه  $D$  نامفرد (ناکین) است و می توانیم جواب را به شکل زیر بدست آوریم:

$$\begin{matrix} x_D & = & D^{-1} & b_D, \\ m \times 1 & & m \times m & m \times 1 \end{matrix} \quad (3.5.13)$$

در حالی  $x_D$  که بردار متغیرهای مستقل و  $b_D$  بردار طرف راست مربوط به آن است. آن گاه به سادگی می توان نشان داد که

$$x = \begin{Bmatrix} x_D \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.5.14)$$

## بخش ۳.۶: روش سیمپلکس ۱۲۵

یک جواب دستگاه معادلات (۳.۵.۲) است. چنین جوابی را جواب اصلی می گویند و  $x_D$  بردار متغیرهای اصلی نامیده می شود. یک جواب اصلی لازم نیست قیدهای نامنفی بودن (۳.۵.۳) را برآورده کند. آن جوابهای اصلی که این قیدها را برآورده کنند، جوابهای قابل قبول اصلی اند و می توان نشان داد که نقاط فرین اند. به سخن دیگر تمامی جوابهای قابل قبول اصلی معادلات (۳.۵.۲) مربوط به گوشه های نقاط فرین چند وجهی محدبند [13].

تعداد کل جوابهای اصلی معادله (۳.۵.۲) را می توان با مشخص کردن تعداد ممکن انتخاب  $m$  متغیر اختیاری از یک گروه  $n$  متغیره تخمین زد. از قضیه 'جایگشتها و ترکیبها' می دانیم که این تعداد برابر است با

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (3.5.14)$$

تمامی این امکانها قابل قبول نخواهند بود و تنها بعضی از آنها قابل قبولند.

## ۳.۶ روش سیمپلکس

پنداره 'روش سیمپلکس' عبارت است از کاهش پیوسته مقدار تابع هدف با رفتن از یک جواب قابل قبول اصلی به جواب دیگر، تا زمانی که به مقدار مینیمم تابع هدف برسیم. بحث چگونگی دست یافتن به یک جواب قابل قبول اصلی را به تعویق می اندازیم و فرض می کنیم برای شروع الگوریتم یک جواب قابل قبول اصلی داریم. در واقع اگر قیدهای نامساوی زیر را می داشتیم:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.6.1)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.6.2)$$

که در آن برای هر قید  $b_i \geq 0$  است، آن گاه فرآیند تبدیل مجموعه قید به شکل استاندارد عبارت است

از:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + y_i = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.6.3)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.6.4)$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.6.5)$$

و بی درنگ متوجه می شویم که

$$y_i = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{و} \quad x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (۳.۶.۶)$$

یک جواب قابل قبول اصلی است. یک طرح رسمی برای یافتن یک جواب قابل قبول اصلی بعداً در این بخش بحث خواهد شد. پرسش فوری مورد علاقه در این لحظه این است که چگونه از یک جواب قابل قبول اصلی به جواب قابل قبول اصلی دیگر برویم. بدون اینکه کلی بودن بحث را خدشه دار کنیم می توانیم فرض کنیم که یک دستگاه معادلات به شکل کانونی که در زیر نشان داده شده است داریم (چنان شکلی به کمک طرح حذفی گوس برای یک ماتریس  $A$  از رتبه  $m$  همیشه قابل وصول است).

$$\begin{array}{cccccccccccl} x_1 & +0 & +\dots & +0 & +\dots & +0 & +a_{1,m+1}x_{m+1} & +\dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ 0 & +x_2 & +\dots & +0 & +\dots & +0 & +a_{2,m+1}x_{m+1} & +\dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & +0 & +\dots & +x_s & +\dots & +0 & +a_{s,m+1}x_{m+1} & +\dots & +a_{s,n}x_n & = & b_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & +0 & +\dots & +0 & +\dots & +x_m & +a_{m,m+1}x_{m+1} & +\dots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \quad (۳.۶.۷)$$

که جواب قابل قبول اصلی عبارت است از:

$$x_1 = b_1, \quad x_2 = b_2, \quad \dots \quad x_s = b_s, \quad \dots \quad x_m = b_m, \\ x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = 0. \quad (۳.۶.۸)$$

متغیرهای  $x_1$  تا  $x_m$  را اصلی و  $x_{m+1}$  تا  $x_n$  را غیر اصلی می نامند.

### ۳.۶.۱ تغییر متغیرهای اصلی

روش سیمپلکس همزمان با بهبود تابع هدف مجموعه متغیرهای اصلی را تغییر می دهد. در حال حاضر برای روشن شدن بحث ابتدا روش رفتن از یک جواب قابل قبول اصلی به جواب دیگر را تشریح می کنیم. بهبود تابع هدف در بخش بعدی مورد بحث قرار خواهد گرفت.

می خواهیم یکی از متغیرهای غیر اصلی فعلی معادله (۳.۶.۷)، به عنوان مثال  $x_t$  ( $m < t \leq n$ ) را اصلی بسازیم. فرایند سبب می شود که یک متغیر اصلی،  $x_s$  ( $1 \leq s \leq m$ ) غیر اصلی شود. هم اکنون فرض می کنیم متغیر  $x_t$  که می خواهیم به مجموعه اصلی بیاوریم معلوم است. تنها باید تصمیم بگیریم که

## بخش ۳.۶: روش سیمپلکس ۱۲۷

کدام متغیر باید از مجموعه اصلی حذف شود. جمله‌های انتخابی نشان داده شده در زیر برای  $s$  امین معادله و یک معادله اختیاری دیگر را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & i & & s & & t & \\
 i & 1 & \dots & 0 & \dots & a_{it} & \dots = b_i \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 s & 0 & \dots & 1 & \dots & a_{st} & \dots = b_s
 \end{array} \quad (3.6.9)$$

چون می‌خواهیم  $x_i$  اصلی شود، باید آن را با صفر کردن ضریب  $a_{it}$  ( $i = 1, \dots, n; i \neq s$ ) و واحد کردن ضریب  $a_{st}$ ، با تقسیم  $s$  امین معادله به  $a_{st}$ ، از بقیه معادلات به جز  $s$  امین حذف کنیم. این کار را زمانی می‌توانیم انجام دهیم که  $a_{st}$  صفر نباشد. همچنین در صورتی که  $a_{st}$  مثبت نباشد، فرایند تقسیم  $s$  امین معادله بر  $a_{st}$  یک جمله منفی در طرف راست به وجود می‌آورد زیرا  $b_s$  به دلیل این که جواب فعلی یک جواب قابل قبول اصلی است مثبت است. برای حذف متغیر اصلی جدید  $x_i$  از  $i$  امین معادله ( $i = 1, \dots, n; i \neq s$ ) باید معادله  $s$  ام را در ضریب  $(a_{it} / a_{st})$  ضرب کنیم و معادله حاصل را از تمامی معادله‌ها کم کنیم. ضرایب بدست آمده در طرف راست  $i$  امین معادله برابر است با:

$$b'_i = b_i - b_s \left( \frac{a_{it}}{a_{st}} \right). \quad (3.6.10)$$

برای تضمین این که جواب بدست آمده یک جواب قابل قبول اصلی باشد باید کاری کنیم که  $b'_i \geq 0$  باشد، یا با مرتب کردن مجدد معادله (3.6.10) داریم:

$$\left( \frac{b_s}{a_{st}} \right) \leq \left( \frac{b_i}{a_{it}} \right). \quad (3.6.11)$$

معادله (3.6.11) و شرط

$$a_{st} > 0. \quad (3.6.12)$$

دو شرطی هستند که  $s$  امین سطر را در رفتن از یک جواب قابل قبول اصلی به جواب دیگر مشخص می‌کند. بنابراین برای متغیر غیر اصلی داده شده  $x_i$  که باید اصلی شود، ضریب همه جملات را در  $i$  امین ستون بررسی می‌کنیم. به سبب نقض شرط (3.6.12) درایه‌هایی که در ستون  $i$  ام ضرایب نامثبت دارند در نظر

۱۴۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۳: برنامه ریزی خطی)

گرفته نمی شوند. در میان آنهایی که ضریب مثبت دارند نسبت  $b_i/a_{ii}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) را محاسبه می کنیم. سطری را انتخاب می کنیم، سطر  $s$  ام، که نسبت  $b_i/a_{is}$  در آن کمترین باشد و آن مقدار مینیمم را  $b_s/a_{ss}$  می نامیم همچنان که در معادله (۳.۶.۱۱) نشان داده شده است. این متغیر اصلی مربوط به سطری است که در فرایند اصلی ساختن  $x_i$  غیر اصلی خواهد شد.

### مثال ۳.۶.۱

بحث قبلی را با یک مثال تشریح می کنیم. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 10,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 4. \quad (3.6.13)$$

دستگاه در حال حاضر به شکل کانونی است و جواب قابل قبول اصلی عبارت است از:

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 10, \quad x_5 = 4. \quad (3.6.14)$$

متغیرهای  $x_1$  و  $x_2$  متغیرهای غیر اصلی اند در حالی که  $x_3$ ،  $x_4$  و  $x_5$ ، متغیرهای اصلی اند. اکنون فرض می کنیم می خواهیم  $x_1$  را اصلی کنیم. با نوشتن دوباره معادله (۳.۶.۱۳) به شکل ماتریسی داریم

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{Bmatrix}. \quad (3.6.15)$$

چون  $x_1$  می خواهد اصلی شود آن را ستون اول در نظر می گیریم. برای انتخاب متغیری که می خواهد غیر اصلی شود نسبت  $(b_i/a_{i1})$ ،  $i = 1, 2, 3$  را تشکیل می دهیم.

$$\frac{b_1}{a_{11}} = 3, \quad \frac{b_2}{a_{21}} = 3\frac{1}{3}, \quad \frac{b_3}{a_{31}} = 4.$$

کمترین نسبت  $b_i/a_{i1}$  است، بنابراین  $a_{11}$  را به عنوان لولا می گیریم. آن گاه دستگاه معادلات جدید عبارت است از:

بخش ۳.۶: روش سیمپلکس ۱۴۹

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.6.16)$$

و فرایند اصلی ساختن  $x_1$  به غیر اصلی شدن متغیر  $x_3$  انجامیده است. جواب قابل قبول عبارت است از:

$$x_2 = x_3 = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 1.$$

خواننده می تواند نشان دهد که اگر غیر از  $a_{11}$  را به عنوان لولا انتخاب می کردیم به یک جواب اصلی غیر قابل قبول می رسیدیم. به عنوان مثال، اگر  $a_{13}$  را به عنوان لولا انتخاب کنیم داریم.

$$x_2 = x_5 = 0, \quad x_1 = 4, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = -2,$$

که قابل قبول نیست زیرا  $x_3 < 0$  و  $x_4 < 0$  است. • • •

## ۳.۶.۲ بهبود بخشیدن تابع هدف

در بخش گذشته اصلی ساختن متغیر غیر اصلی  $x_1$  بدون از دست دادن قابل قبولی را مورد توجه قرار دادیم. ما باید در مورد متغیری که باید اصلی شود نیز تصمیم بگیریم. باید تنها متغیری را برای اصلی شدن بیاوریم که هم تابع هدف را کاهش دهد و هم به جواب قابل قبول اصلی بینجامد. دقت کنید که تابع هدف یک معادله خطی مانند دیگر معادله هاست و بنابراین می تواند با دیگر معادله ها در نظر گرفته شود. معادله تابع هدف را می توان به شکل زیر نوشت:

$$c^T x = f. \quad (3.6.17)$$

فرض کنید دستگاه معادلات (۳.۵.۲) به شکل کانونی است و معادله (۳.۶.۱۷) در انتهای دیگر معادله ها اضافه شده است، به این شکل معادله ها که در آنها تابع هدف نیز گنجانده شده اغلب تابلو سیمپلکس گفته می شود. اکنون تمامی متغیرهای اصلی را از معادله آخر با کم کردن  $c_i$  برابر هر معادله در شکل کانونی حذف می کنیم. آن گاه طرف راست معادله (۳.۶.۱۷) به شکل  $(f - c_1 b_1 - c_2 b_2 - c_3 b_3 - \dots - c_m b_m)$  در می آید. بنابراین اگر از وجود  $f$  صرف نظر کنیم، طرف راست



منفی مقدار تابع هدف است زیرا:  $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$ . طرف چپ این آخرین معادله تنها متغیرهای غیر اصلی را شامل می شود. اکنون فرض کنید ضریب یکی از متغیرهای غیر اصلی در طرف چپ آخرین معادله منفی باشد. اگر این متغیر را اصلی کنیم آن گاه مقدار این متغیر را از مقدار فعلی اش که صفر است به یک مقدار مثبت افزایش می دهیم. چون آخرین معادله تنها یکی از معادله ها است، وقتی روی یکی از معادله ها ( $S$  امین) عمل لولایی انجام می دهیم و متغیر مربوط را ( $x_j$ ) از مجموعه اصلی حذف می کنیم، عملیاتی را که در بخش گذشته شرح دادیم روی تمامی  $m+1$  معادله انجام می دهیم. وقتی متغیر مشخص، با ضریب منفی در آخرین معادله، حذف شد، طرف راست این معادله افزایش می یابد؛ زیرا مقدار متغیر از صفر به یک مقدار مثبت افزایش یافته است. چون طرف راست نشانگر منفی مقدار تابع هدف است، کاهش در تابع تضمین می شود. بنابراین معیار تضمین شدن یک بهبود در تابع هدف این است که متغیر در معادله تابع هدف بعد از پاک شدن از تمامی متغیرهای اصلی ضریب منفی داشته باشد. این نتیجه را می شود با مثال زیر نشان داد:

## مثال ۳.۶.۲

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \quad (۳.۶.۱۸)$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \quad \text{را مشروط به} \quad (۳.۶.۱۹)$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 10, \quad (۳.۶.۲۰)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 4. \quad \text{مینیمم کنید.} \quad (۳.۶.۲۱)$$

همچنان که در بالا بیان شد معادله های قید (۳.۶.۲۱) را دوباره به شکل ماتریسی می نویسیم و تابع

هدف را به عنوان آخرین سطر ماتریس در نظر می گیریم.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \\ - \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۳.۶.۲۲)$$

یک جواب اصلی عبارت است از:

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 10, \quad x_5 = 4. \quad (۳.۶.۲۳)$$

متغیر  $x_3$  متغیر اصلی است که در آخرین معادله (۳.۶.۲۲) ظاهر شده است و باید از آن حذف شود.

در نتیجه طرف راست برابر می شود با منفی مقدار تابع هدف.

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \\ \hline -6 = -f \end{Bmatrix} \quad (۳.۶.۲۴)$$

می توان در ستون (1) یا (2) عمل لولا را انجام داد. یعنی با اصلی ساختن  $x_1$  یا  $x_2$  تابع هدف کاهش می یابد. اگر عمل لولایی را روی ستون (1) انجام دهیم ( $x_1$  را اصلی سازیم) عنصر لولا  $a_{11}$  است زیرا نسبت  $(b_i / a_{i1})$  آن کمترین خواهد بود. تابلوی سیمپلکس جدید به شکل زیر است

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ \hline -3 = -f \end{Bmatrix} \quad (۳.۶.۲۵)$$

مقدار تابع هدف از 6 به 3 کاهش یافته است. از آنجا که معادله آخر هیچ متغیر غیر اصلی با ضریب منفی ندارد، کاهش بیشتر مقدار تابع هدف امکان پذیر نیست. بنابراین مقدار مینیمم تابع هدف برابر 3 است که مربوط به جواب اصلی زیر است.

$$x_2 = x_3 = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 1. \quad (۳.۶.۲۶)$$

اگر تصمیم داشتیم که اول  $x_2$  را اصلی کنیم، تابع هدف را از 6 به 4 کاهش می دادیم، و یک عدد منفی در معادله آخر و در ستون اول می بود که یک دور دیگر از عمل لولایی برای اصلی ساختن  $x_1$  باید انجام می دادیم. . . .

این مطلب بحث روش سیمپلکس را کامل می کند به جز این که ما برای شروع نیاز به یک جواب قابل قبول اصلی داریم که ممکن است به سادگی در دسترس نباشد. این عنوان بحث بعدی ماست.

۳.۶.۳ تولید یک جواب قابل قبول اصلی - استفاده از متغیرهای مصنوعی

در فرایند تبدیل یک مسأله LP داده شده به شکل معادله های (۳.۶.۴) و (۳.۶.۵)

۱۳۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۳: برنامه ریزی خطی)

$$Ax \leq b, \quad \text{که} \quad b > 0, \quad \text{و} \quad x \geq 0, \quad (۳.۶.۲۷)$$

به شکل استاندارد که با اضافه کردن متغیرهای کمبود صورت می گرفت، یک جواب قابل قبول اصلی برای شروع روش سیمپلکس بدست آوردیم. اما وقتی ما یک برنامه خطی داریم که به شکل استاندارد معادله های (۳.۵.۲) و (۳.۵.۳) است در حالت کلی نمی توانیم یک جواب قابل قبول اصلی را شناسایی کنیم. در چنین حالتی از فن زیر می توان استفاده کرد:

مسئله مینیم سازی زیر را در نظر بگیرید

$$\sum_{i=1}^m y_i \quad (۳.۶.۲۸)$$

$$Ax + y = b, \quad \text{را نسبت به قیود} \quad (۳.۶.۲۹)$$

$$\text{مینیمم کنید} \quad x \geq 0, \quad \text{و} \quad y \geq 0, \quad (۳.۶.۳۰)$$

در حالی که  $y$  بردار متغیرهای مصنوعی است. با فرض  $b > 0$  خللی به کلیت مسئله وارد نمی شود و به موجب آن برای مسئله LP (۳.۶.۲۹) یک جواب قابل قبول اصلی معلوم داریم.

$$y = b, \quad \text{و} \quad x = 0, \quad (۳.۶.۳۱)$$

بنابراین روش سیمپلکس می تواند به سادگی برای حل مسئله LP معادله های (۳.۶.۲۹) به کار رود. دقت کنید که اگر یک جواب قابل قبول اصلی برای مسئله LP اصلی (۳.۶.۲۸) وجود داشته باشد آن گاه در جواب بهین مسئله بهبود یافته (۳.۶.۲۹) باید  $y_i$  ها به عنوان متغیرهای غیر اصلی ( $y = 0$ ) باشد. اما اگر برای مسئله اصلی جواب قابل قبول اصلی وجود نداشته باشد، آن گاه مقدار مینیمم معادله (۳.۶.۳۰) از صفر بزرگتر خواهد بود.

### مثال ۳.۶.۳

استفاده از متغیرهای مصنوعی را با مثال زیر تشریح می کنیم. در این مثال دنبال یک جواب قابل قبول اصلی برای دستگاه

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13,$$

بخش ۳.۶: روش سیمپلکس ۱۳۳

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \quad (3.6.32)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

هستیم. متغیرهای مصنوعی  $y_1$  و  $y_2$  را معرفی می‌کنیم؛ مسأله مینیم سازی زیر را خواهیم داشت

$$f = y_1 + y_2 \quad (3.6.33)$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + y_1 = 13, \quad \text{رانشیت به}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + y_2 = 7,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{و} \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, 2. \quad (3.6.34)$$

با جواب قابل قبول اصلی  $y_1=13, y_2=7$  و  $x_1=x_2=x_3=0$ ، تابع هدف (۳.۶.۳۳) را اضافه کرده و متغیرهای طراحی اصلی  $y_1$  و  $y_2$  را از آن حذف می‌کنیم تا تابلوی سیمپلکس اولیه را بدست آوریم.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline -3 & -3 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13 \\ 7 \\ \hline - \\ -20 \end{Bmatrix}. \quad (3.6.35)$$

چون ستون (3) بزرگترین عدد منفی را دارد، آن را برای عمل لولایی انتخاب می‌کنیم و عنصر لولا  $a_{13}$  است زیرا  $13/3 < 7/1$ ،

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 2/3 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 5/3 & 0 & -1/3 & 1 \\ \hline -1/3 & -5/3 & 0 & 4/3 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13/3 \\ 8/3 \\ \hline - \\ -8/3 \end{Bmatrix} \quad (3.6.36)$$

آن گاه  $a_{22}$  را به عنوان عنصر لولا در نظر می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 9/15 & 0 & 1 & 6/15 & -1/5 \\ 1/5 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 19/5 \\ 8/5 \\ \hline - \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.6.37)$$

فرایند به جواب قابل قبول اصلی زیر برای مسأله اصلی همگرا می‌شود.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 8/5, \quad \text{و} \quad x_3 = 19/5. \quad (3.6.38)$$

...

## ۳.۷ دوگانگی در برنامه ریزی خطی

توسط دنتزیگ [13] نشان داده شده است که مسأله 'ابتدایی' مینیمم سازی یک تابع خطی مشروط به مجموعه ای از قیود خطی معادل است با مسأله 'دوگان' ماکزیمم سازی یک تابع خطی دیگر مشروط به یک مجموعه قیود دیگر. تابع هدف دوگان و قیدهای آن از تابع هدف و قیدهای مسأله 'ابتدایی' بدست می آیند. بنابراین اگر مسأله 'ابتدایی' به شکل زیر تعریف شود.

$$\begin{aligned} f_p &= c_1x_1 + \dots + c_nx_n = \mathbf{c}^T \mathbf{x} && (n \text{ متغیر}) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, && (m \text{ قید}) \text{ را مشروط به} \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n, && (3.7.1) \end{aligned}$$

مینیمم کنید

آن گاه مسأله دوگان به شکل زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} f_d &= b_1\lambda_1 + \dots + b_m\lambda_m = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\lambda} && (m \text{ متغیر}) \\ \sum_{i=1}^m a_{ij}\lambda_i &\leq c_j, \quad j = 1, \dots, n, && (n \text{ قید}) \text{ را مشروط به} \\ \lambda_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m. && (3.7.2) \end{aligned}$$

مینیمم کنید

انتخاب رابطه سازی ابتدایی و دوگان به تعداد متغیرهای طراحی و قید بستگی دارد. تلاش محاسباتی حل یک مسأله 'LP' با افزایش تعداد قیود افزایش می یابد. بنابراین، اگر تعداد رابطه های قید در مقایسه با تعداد متغیرهای طراحی بیشتر باشد، آن گاه حل مسأله 'دوگان' که به تلاش محاسباتی کمتری نیاز دارد راحت تر است. دسته بندی مسائل به ابتدایی و دوگان اختیاری است زیرا اگر مسأله 'ماکزیمم سازی' به عنوان ابتدایی تعریف شود، آن گاه مسأله مینیمم سازی دوگان آن خواهد بود. می توان نشان داد [13] که مقدار بهین متغیرهای اصلی ابتدایی را می توان از جواب دوگان بدست آورد و  $(f_p)_{\min} = (f_d)_{\max}$ . بنابراین اگر  $x_j$  یک متغیر اصلی در مسأله 'ابتدایی' باشد، آن گاه آن دلالت بر فعال بودن  $j$  امین قید مسأله 'دوگان' دارد و بر عکس.

اگر مسأله 'ابتدایی' به شکل استانداردش نوشته شود؛ یعنی با قیدهای تساوی، داریم:

$$\begin{aligned} f_p &= c_1x_1 + \dots + c_nx_n = \mathbf{c}^T \mathbf{x} && (n \text{ متغیر}) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &= b_i, \quad i = 1, \dots, m, && (m \text{ قید}) \text{ را مشروط به} \end{aligned}$$

بخش ۳.۷: دوگانی در برنامه ریزی خطی ۱۳۵

$$(۳.۷.۳) \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{مینیمم کنید}$$

آن گاه مسأله 'دوگان' مربوط عبارت است از:

$$(۳.۷.۴) \quad \begin{aligned} f_d &= b_1 \lambda_1 + \dots + b_m \lambda_m = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (m \text{ متغیر}) \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i &\leq c_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (n \text{ قید}) \end{aligned} \quad \text{را مشروط به} \quad \text{ماکزیمم کنید}$$

در حالی که  $\lambda_i$  از نظر علامت محدودیتی ندارد [11].

باید به این نکته توجه شود که در عمل، بندرت مسأله 'LP' را به عنوان یک مسأله 'ابتدایی' یا دوگان حل می کنند. بیشتر نرم افزارهای LP مدرن و پیشرفته الگوریتم ابتدایی - دوگان را به کار می برند. این الگوریتم با یک جواب قابل قبول مسأله 'دوگان' شروع می کند که این جواب قدم به قدم با بهینه سازی یک مسأله ابتدایی محدود شده 'مربوط بهبود می یابد'. جزئیات این الگوریتم فراتر از هدف این کتاب است و خوانندگان علاقمند می توانند به مرجع [11] مراجعه کنند.

### مثال ۳.۷.۱

به عنوان یک مثال از روش سیمپلکس برای حل یک مسأله 'LP' به وسیله 'رابطه سازی دوگان'، ما مسأله 'قالب سردر' که در مثال ۳.۱.۵ رابطه سازی شد را با شرط بارگذاری کمی متفاوت در نظر می گیریم. شرط بارگذاری جدید این است که 25% مقدار بار افقی افزایش یافته ولی مقدار بار عمودی همان اندازه نگهداشته می شود. معادله های قید مربوط نسبت به معادله های (۳.۵.۴) تا (۳.۵.۹) طرفهای راست متفاوتی خواهند داشت، یعنی:

$$(۳.۷.۵) \quad \begin{aligned} 4x_2 &\geq 1, \\ 2x_1 + 2x_2 &\geq 1, \\ x_1 + x_2 &\geq 1.25, \\ 2x_1 &\geq 1.25, \\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 3.5, \\ 4x_1 + 2x_2 &\geq 3.5. \end{aligned}$$

با این وجود، هنگامی که به شکل استاندارد نوشته شود، نه تنها مسأله ۸ متغیر دارد بلکه یک جواب قابل قبول اصلی برای مسأله نیز فوراً در دست نیست. چون تابع هدف (۳.۱.۲۵) تنها دو متغیر  $x_1$  و  $x_2$

۱۳۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۳: برنامه ریزی خطی)

دارد، جواب مسأله 'دوگان ممکن است بازده' بالاتری داشته باشد. مسأله 'دوگان عبارت است از:

$$f_d = \lambda_1 + \lambda_2 + 1\frac{1}{4}\lambda_3 + 1\frac{1}{4}\lambda_4 + 3\frac{1}{2}\lambda_5 + 3\frac{1}{2}\lambda_6 \quad (3.7.7)$$

$$2\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 + 4\lambda_6 \leq 2, \quad \text{رانبست به}$$

$$4\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_5 + 2\lambda_6 \leq 1, \quad (3.7.8)$$

$$\text{ماکزیمم کنید} \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6.$$

ماکزیمم سازی  $f_d$  مانند مینیمم سازی  $-f_d$  است و فرآیند تبدیل مسأله 'خطی فوق به شکل استاندارد

عبارت است از:

$$-f_d = -\lambda_1 - \lambda_2 - 1\frac{1}{4}\lambda_3 - 1\frac{1}{4}\lambda_4 - 3\frac{1}{2}\lambda_5 - 3\frac{1}{2}\lambda_6 \quad (3.7.9)$$

$$2\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 + 4\lambda_6 + \lambda_7 = 2, \quad \text{رانبست به}$$

$$4\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_5 + 2\lambda_6 + \lambda_8 = 1, \quad (3.7.10)$$

$$\text{مینیمم کنید} \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 8,$$

که جواب قابل قبول اصلی آن برابر است با

$$\lambda_i = 0, \quad i = 1, \dots, 6, \quad \text{و} \quad \lambda_7 = 2, \quad \lambda_8 = 1.$$

می توانیم با تابلوی سیمپلکس اولیه که متغیرهای اصلی از معادله آخر آن، که نشانگر تابع هدف است،

حذف شده، شروع کنیم.

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5/4 & -5/4 & -7/2 & -7/2 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\}.$$

(3.7.11)

هر چند توصیه می شود که ستون پنجم یا ششم را برای عملیات لولایی انتخاب کنیم، چون بیشترین

مقدار منفی را دارند، ولی انجام عمل لولایی روی ستون سوم جواب نهایی یکسانی را با یک تابلوی

سیمپلکس کمتر به دست می دهد. با انجام عمل لولایی روی عنصر  $a_{23}$  داریم:

بخش ۳.۷: دوگانی در برنامه ریزی خطی ۱۳۷

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 3/2 & 0 & -5/4 & 3/2 & -1 & 0 & 5/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \hline -5/4 \end{Bmatrix} \quad (۳.۷.۱۲)$$

به سبب وجود جملات منفی در معادله 'آخر، روشن است که تابع هدف هنوز می تواند بیشتر کاهش یابد. با انجام عمل لولایی روی عنصر  $a_{14}$  داریم:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 3/2 & 3/2 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 5/8 & 5/8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ \hline 15/8 \end{Bmatrix} \quad (۳.۷.۱۳)$$

بنابراین نتیجه می گیریم که  $(f_p)_{\min} = 15/8$  یا  $(f_d)_{\max} = -15/8$  و جواب عبارت است از:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0, \quad \text{و} \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = 1/2. \quad (۳.۷.۱۴)$$

$\lambda$ های غیر صفر دلالت بر فعال بودن قیود سوم و چهارم در مسأله 'ابتدایی دارد، یعنی:

$$2x_1 = 1.25, \quad \text{و} \quad x_1 + x_2 = 1.25, \quad (۳.۷.۱۵)$$

• • • جواب معادلات (۳.۷.۱۵) عبارت است از  $x_1 = x_2 = 5/8$ .

در پایان بخش، جالب است یادآور شویم که متغیرهای دوگان را می توان به عنوان قیمت های قیود تفسیر و تعبیر کرد. برای یک تغییر داده شده در طرف راست  $b$  از روابط قیود معادله (۳.۷.۵)، تغییر مقدار بهین تابع هدف می تواند از رابطه زیر بدست آید.

$$\Delta f^* = \lambda^T \Delta b. \quad (۳.۷.۱۶)$$

برای اینکه معادله (۳.۷.۱۶) برقرار باشد، تغییر در بردار  $b$  باید چنان باشد که به تغییر در مجموعه



قید فعال نینجامد. مسأله دوگان را نیز می توان ماکزیمم سازی یک سود، مشروط به محدودیتهایی از نظر در دسترس بودن منابع در نظر گرفت. آن گاه روشن است که متغیرهای دوگان نامنفی را می شود به عنوان افزایش هزینه ها در اثر نقض قیدهای روی در دسترس بودن منابع تلقی کرد. به همین شکل یک مسأله ابتدایی را می توان به عنوان یک مینیمم سازی هزینه کلی در نظر گرفت در حالی که همه قیود برآورده شده باشند. نقش کامل متغیرهای دوگان تنها در بحث شرایط کان-تاکر و حساسیت جواب بهین به تغییرات پارامترهای طراحی روشتر خواهد شد که در فصل (۵) بحث خواهد شد. مثال بعدی کاربرد متغیرهای دوگان در یافتن حساسیت جواب بهین در اثر تغییر در پارامتری از مسأله را تشریح می کند.

### مثال ۳.۷.۲

مسأله طراحی قاب سردر که در مثال ۳.۷.۱ با استفاده از متغیرهای دوگان حل شد را در نظر بگیرید. تغییر مقدار تابع هدف بهین  $1.875 = f^*$  را در اثر 25% کاهش در مقدار نیروی افقی را بدست خواهیم آورد در صورتی که نیروی عمودی در  $p$  به همان میزان نگهداشته می شود. این نیروها مربوط به مسأله ای بودند که در مثال ۳.۱.۵ رابطه سازی شد و به روش ترسیمی در مثال ۳.۴.۱ حل شد. برای معادله های (۳.۷.۵) و (۳.۱.۲۶) تا (۳.۱.۳۱) تغییر در طرف راست عبارت است از  $\Delta b_3 = \Delta b_4 = -\frac{1}{2}$  و  $\Delta b_5 = \Delta b_6 = -\frac{1}{4}$ . با استفاده از مقادیر متغیرهای دوگان مثال ۳.۷.۱ که در معادله (۳.۷.۱۵) بدست آمد داریم:

$$\Delta f^* = -\left(\frac{1}{4}\right)1 + -\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -0.375.$$

بنابراین مقدار بهین تابع هدف در اثر این بارگذاری جدید برابر است با  $f^* = 1.5$ ، البته فرض شده قیود فعال (آنهايي که مربوط به متغیرهای دوگان غیر صفرند) فعال باقی می مانند. خوشبختانه، آن فرض برای مثال فعلی صحیح است. با این وجود، علاوه بر دو قیدی که در ابتدا فعال بودند دو قید دیگر نیز در نقطه طراحی جدید فعال می شوند (به شکل ۳.۴.۱ نگاه کنید). هر کاهشی بیشتر از 25% در مقدار بار افقی تغییری را در مجموعه قید فعال به وجود خواهد آورد و به یک جواب نادرست می انجامد.

بنابراین، بر این حقیقت تأکید می کنیم که در کاربرد معادله (۳.۷.۱۵) شخص باید آگاه باشد که پارامتر طراحی را آن قدر تغییر ندهد که مجموعه قید فعال تغییر کند. این کار عموماً با محدود کردن

## بخش ۳.۸: روش داخلی - الگوریتم کارمارکار ۱۳۹

تغییرات پارامتر به اندازه 'کوچک امکان پذیر است. با این همه، اگر طراحی مثال ۳.۴.۱ را به عنوان طراحی نمونه انتخاب می کردیم، هر اندازه تغییرات مقدار نیروی افقی را کوچک هم می گرفتیم، مجموعه قید فعال تغییر می کرد. این به خاطر زائد بودن قیدها در جواب بهین مثال ۳.۴.۱ است. . . .

۳.۸ روش داخلی - الگوریتم کارمارکار<sup>۱</sup>

در استفاده از الگوریتم سیمپلکس که در بخش ۳.۶ بحث شد، عملیات کاملاً روی مرز چند وجهی در  $R^n$  و حرکت از یک نقطه 'فرین (رأس) به فرین دیگر با انتخاب کوتاهترین مسیر بین آنها، یعنی یک پال چند وجهی، انجام می شد. انتخاب رأس بعدی از میان تمامی رأسهای مجاور رأسی که شروع کرده ایم، بر اساس بیشترین کاهش در تابع هدف انجام می گیرد. با این فرضهای اساسی، الگوریتم سیمپلکس تنها یک راهبرد نظام مند برای مشخص کردن و بررسی جوابهای نامزد مسأله LP است. تعداد عملیات مورد نیاز برای همگرایی به شکل نمایی با تعداد متغیرها افزایش می یابد. در بدترین حالت، تعداد عملیات برای همگرایی برای یک مسأله با  $n$  متغیر با یک مجموعه  $S$  از قیدها برابر است با  $|S|/n!$  (۳-۸). با این همه، انتخاب یک جهت حرکت به جز پال چند وجهی که با روابط قید سازگار باشد و منفعت بیشتری در تابع هدف داشته باشد امکان پذیر است. گرچه چنان انتخابی می تواند به یک کاهش سریع به طرف رأس بهین بینجامد، ولی این کار توسط نقاط میانی غیر رأس انجام می شود.

روشهای داخلی حل مسائل LP از زمان معرفی الگوریتم کارمارکار [14] توسط آزمایشگاه AT&T بل<sup>۲</sup> توجه زیادی را به خود جلب کرده است. این الگوریتم جدید در اصل مدعی بود که ۵۰ برابر از روش سیمپلکس سریعتر است. از آن زمان کارهای زیادی در تعمیم و بهبود بخشیدن الگوریتم کارمارکار صورت گرفته است. بهبود شامل تشریح چگونگی به وجود آوردن جواب دوگان در این الگوریتم است [15]، و تصمیم الگوریتم کارمارکار این بوده که کرانهای بالا و پایین را با حذف متغیرهای کمبود، که معمولاً در چنان کرانهایی در الگوریتم سیمپلکس به کار می رود، به شکل مؤثرتری [16] مورد توجه قرار دهد.

از آن جا که توسعه های اخیر الگوریتم همراه با مباحث ریاضی است و از هدفهای این کتاب فراتر است، تنها یک حالت کلی از الگوریتم کارمارکار در بخشهای بعدی ارائه می شود. در این لحظه خواننده

1) Karmarkar

2) Bell

را به این نکته توجه می دهیم که ابزاری که در الگوریتم استفاده شده در اصل برای مینیمم سازی توابع غیر خطی مقید و نامقید در فصلهای (۴) و (۵) معرفی شده اند. بنابراین، به خواننده توصیه می شود که این فصلها را قبل از مطالعه بخش بعدی مرور کند.

### ۳.۸.۱ جهت حرکت

جهت بیشترین کاهش در تابع هدف جهت تندترین کاهش است که جهت منفی گرادیان تابع هدف  $\nabla f$  است (به بخش ۴.۲.۲ مراجعه کنید). برای یک مسأله LP به شکل استاندارد، معادله (۳.۵.۱) را ببینید، جهت گرادیان عبارت است از:

$$\nabla f = c. \quad (3.8.1)$$

گرچه ما جهت حرکت را محدود به یال چند وجهی سطح قید نکرده ایم، در مسأله LP جهت حرکت نمی تواند به سادگی منفی جهت گرادیان انتخاب شود. جهت باید چنان انتخاب شود که حرکت به نقطه ای در ناحیه قابل قبول بینجامد. این کار با استفاده از ماتریس تصویر  $P$

$$P = I - N(N^T N)^{-1} N^T, \quad (3.8.2)$$

که در بخش ۵.۳ بدست آورده شده، انجام می شود که در آن ماتریس  $N$  مربوط به گرادیان معادله های قید است. از آن جا که قیود توابع خطی از متغیرهایند داریم  $N = A^T$ .  $P$  با عمل روی بردار گرادیان  $c$  جهت تندترین کاهش را روی فضای تهی ماتریس  $A$  تصویر می کند. یعنی، اگر با یک نقطه طراحی اولیه  $x_0$  شروع کنیم که معادله قید  $Ax_0 = b$  را برآورده می کند، و در جهت  $-Pc$  حرکت کنیم در زیر فضایی که به وسیله معادله قید تعریف می شود خواهیم ماند. دقت کنید که در کاربردهای عددی این تصویر ماتریس، حاصل ضرب  $AA^T$  ممکن است وارون نشود؛ ولی در عوض سیستم خطی  $AA^T y = Ac$  را می شود حل کرد و آن گاه گرادیان تصویر شده از رابطه  $-Pc = c - A^T y$  محاسبه گردد. یک روش کارا تر و با شرایط بهتر بر اساس عامل گیری  $QR$  ماتریس  $A$  برای جواب ماتریس تصویر در بخش ۵.۵ تشریح شده است. مثال ساده بعدی که توسط استرنج<sup>۱</sup> ارائه شده و از مرجع [17] آورده شده جهت حرکت را در

بخش ۳.۸: روش داخلی- الگوریتم کارمارکا ۱۴۱

فضای طراحی سه بعدی به شکل ترسیمی تشریح می کند.

### مثال ۳.۸.۱

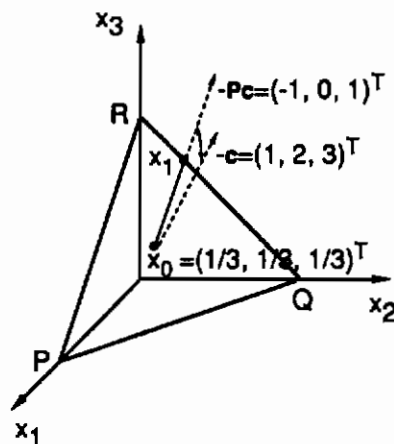
مسئله مینیم سازی زیر که بر حسب سه متغیر طراحی است در نظر بگیرید،

$$f = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \quad (۳.۸.۳)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad \text{را مشروط به} \quad (۳.۸.۴)$$

$$x \geq 0 \quad \text{مینیم کنید} \quad (۳.۸.۵)$$

با شروع از یک نقطه شروع  $x^{(0)} = (1/3, 1/3, 1/3)^T$  جهت حرکت را بدست آورید.



شکل ۳.۸.۱ فضای طراحی و جهت حرکت

فضای طراحی و رویه قید مسئله در شکل ۳.۸.۱ نشان داده شده است. جهت منفی بردار گرادیان با  $-c$  مشخص شده است. ماتریس تصویر برای مسئله را می توان از معادله (۳.۸.۲) بدست آورد در حالی که  $A = [1 \ 1 \ 1]$ . دستگاه  $AA^T y = Ac$  یک مقدار اسکالر برای  $y$  بدست می دهد

$$\{1 \ 1 \ 1\} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} y = \{1 \ 1 \ 1\} \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{Bmatrix}, \quad (۳.۸.۶)$$

$$y = -2.$$

۱۴۴ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۳: برنامه ریزی خطی)

آن گاه جهت تصویر شده  $Pc$  عبارت است از:

$$Pc = c - yA^T, \quad (3.8.7)$$

$$Pc = \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}. \quad (3.8.8)$$

حرکت در جهت  $Pc$  - بیشترین کاهش در تابع هدف را تضمین می کند در صورتی که حرکت در صفحه  $PQR$  که با معادله قید تشکیل شده انجام شده باشد. کمترین مقدار تابع هدف برای این مسأله در رأس  $R$  خواهد بود که روشن است که با یک چرخه نمی توان به آن رسید. بنابراین، قبل از این که شرط نامنفی بودن نقض شود (که در نقطه  $x^{(1)} = (2/3, 1/3, 0)^T$  است) باید حرکت قطع شود، و روش باید تا رسیدن به یک همگرایی منطقی به نقطه مینیمم تکرار شود. . . .

در مثال قبلی هیچ توضیحی در مورد انتخاب نقطه طراحی شروع و برای طول مسافت طی شده در جهت انتخاب شده داده نشد. کار مارکار [14] حرکت را قبل از برخورد به مرز چند وجهی متوقف می کند مثلاً در نقطه  $x^{(1)} = (19/30, 1/3, 1/30)^T$  در مثال قبلی، بنابراین جایی برای حرکت در چرخه بعدی باقی می ماند. یعنی با شروع از چند وجهی یا نزدیک به آن احتمال برخورد به مرز دیگر قبل از منتفع شدن حقیقی از تابع هدف را افزایش می دهد. جواب این مشکل در تبدیل فضای طراحی که در بخش بعدی بحث می شود است.

## ۳.۸.۲ تبدیل مختصات

به منظور متمرکز شدن روی پنداره هایی که برای الگوریتم مهم است، کار مارکار [14] فرضهای متعددی درباره مسأله LP در نظر می گیرد. در شکل نمایش کانونی او، مسأله LP شکل زیر را می گیرد،

$$f = c^T \hat{x} \quad (3.8.9)$$

$$A\hat{x} = 0, \quad \text{را مشروط به} \quad (3.8.10)$$

$$e^T \hat{x} = 1, \quad (3.8.11)$$

$$\hat{x} \geq 0, \quad \text{مینیم کنید} \quad (3.8.12)$$

بخش ۳.۸: روش داخلی - الگوریتم کارمارکار ۱۴۳

در حالی که  $e$  یک بردار  $1 \times n$  به شکل  $e = (1, \dots, 1)^T$  است. متغیر  $\hat{x}$  نشانگر مختصات تبدیل یافته است به شکلی که نقطه شروع مرکز،  $\hat{x}^{(0)} = e/n$ ، یک سیمپلکس واحد، و یک نقطه قابل قبول،  $Ax^{(0)} = 0$ ، است. یک سیمپلکس عبارت است از تعمیم یک مثلث دو بعدی و چهار وجهی سه بعدی به  $n$  بعد. سیمپلکس واحد در امتداد هر یک از جهتهای مختصات طول یال واحد دارد. کارمارکار همچنین فرض کرد برای هر نقطه متعلق به سیمپلکس  $e^T \hat{x} \geq 0$  است، و مقدار مینیمی که باید تابع هدف به آن برسد صفر است. تبدیل یک شکل استاندارد مسأله LP به این شکل کانونی از راه انجام یک سری از عملیات که شامل ترکیب شکلهای ابتدایی و دوگان رابطه سازی استاندارد، معرفی متغیرهای کمبود و مصنوعی و تبدیل مختصات می باشد، امکان پذیر است. ترکیب رابطه سازی های ابتدایی و دوگان از این سبب لازم است که فرض صفر بودن مقدار مینیم نهایی تابع هدف عملی شود. جزئیات تشکیل این شکل کانونی جدید در مرجع [14] ارائه شده است. در این بخش ما تبدیل مختصات را که به آن تبدیل دوباره مقیاس بندی شده تصویری می گویند تشریح خواهیم کرد. این تبدیل مانند تبدیلی است که به جا باز کردن برای حرکت از یک چرخه به چرخه دیگر کمک می کنند.

یک نقطه شروع دلخواه  $x^{(a)}$  در فضای طراحی در نظر بگیرید، و رابطه زیر را تعریف کنید:

$$D_x = \text{Diag}(x_1^{(a)}, \dots, x_n^{(a)}) . \quad (3.8.13)$$

تبدیل  $T_x$ ، که توسط کارمارکار استفاده شد هر مقطع از سیمپلکس را که با  $x_i = 0$  داده می شود به مقطع مربوط  $\hat{x}_i = 0$  در فضای تبدیل یافته منتقل می کند و عبارت است از:

$$\hat{x} = \frac{1}{e^T D_x^{-1} x} D_x^{-1} x . \quad (3.8.14)$$

وقتی سیمپلکس واحد را به خودش منتقل کنیم، این تبدیل نقطه  $x^{(a)}$  را به مرکز سیمپلکس،  $\hat{x}^{(0)} = (1/n)e$  منتقل می کند. کارمارکار نشان داد که کاربرد مجدد این انتقال، در بدترین حالت، در کمتر از  $O(n^{\frac{1}{2}})$  عملیات اصلی حساب به گوشه بهین همگرا می شود.

تبدیل کارمارکار غیر خطی است و یک شکل ساده تر از این تبدیل ارائه شده است. تبدیل خطی

$$\hat{x} = D_x^{-1} x , \quad (3.8.15)$$

نشان داده که در عمل مانند الگوریتم کارما کار است و از جنبه نظری همگراست [18].

## ۳.۸.۳ فاصله حرکت

بعد از عمل تبدیل، کارمارکار تابع هدف تبدیل یافته را روی کره ای به شعاع  $r = 1/(\sqrt{n(n-1)})$  و مرکز  $\hat{x}^{(0)}$  بهینه می کند. این بزرگترین شعاع کره ای است که در داخل سیمپلکس قرار می گیرد. به عنوان مثال، برای فضای طراحی سه بعدی مثال ۳.۸.۱، که در آن یک سطح قید وجود دارد، کره یک دایره در صفحه 'معادله' قید است. در عمل طول گام در امتداد جهت تصویر شده که توسط کارمارکار استفاده شده است کسری،  $\alpha$ ، از شعاع است. بنابراین نقطه جدید در انتهای حرکت عبارت است از:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{x}}^{(k)} - \alpha r^{(k)} \mathbf{Pc}^{(k)}, \quad (3.8.16)$$

در حالی که  $0 < \alpha < 1$ . مقدار نمونه  $\alpha$  که توسط کارمارکار استفاده شد برابر است با 1/4. هنگام کار الگوریتم، بهینگی جواب در هر دور با تبدیل جواب داخلی به یک جواب نقطه فرین در نزدیکترین رأس بررسی می شود. اگر نقطه جواب فرین بهتر از جواب داخلی فعلی بود آن گاه، برای بهینگی آزمایش می شود.

## ۳.۹ برنامه ریزی خطی عدد صحیح

فنون حل مسائل LP که تاکنون مورد توجه قرار گرفتند، با فرض این که متغیرهای طراحی مقادیر مثبت و پیوسته ای دارند ارائه شدند؛ بنابراین متغیرها می توانستند هر مقداری را بین کرانه های پایین و بالا داشته باشند. در موقعیتهای طراحی دیگری، بعضی یا همه متغیرهای یک مسأله LP محدود به گرفتن مقادیر گسسته هستند. یعنی، شکل استاندارد مسأله LP معادله (۳.۵.۳ - ۳.۵.۱) به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} & (3.9.1) \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}, & \text{را مشروط به} \\ x_i \in X_i &= \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{iI}\}, & i \in I_d, \end{aligned}$$

مینیم کنید

در حالی که  $I_d$  مجموعه متغیرهای طراحی است که تنها مقادیر گسسته اختیار می کند و  $X_i$  مجموعه مقادیر گسسته مجاز است. متغیرهای طراحی مانند مساحت سطح مقطع خرابها و ضخامت لایه صفحات مرکب لایه ای در این دسته بندی جای می گیرند. آن دسته از مسائل که متغیرهای طراحی با

مقدار گسسته دارند، مسائل برنامه ریزی گسسته نامیده می شوند.

به طور کلی، یک مسأله 'برنامه ریزی گسسته' را می توان به شکلی که متغیرهای طراحی فقط مقادیر صحیح بگیرند تبدیل کرد. این تبدیل با داشتن  $x_i$  به عنوان متغیر طراحی که نشانگر اندیس  $i$  از  $d_{ij}$ ،  $j=1, \dots, l$ ، معادله (۳.۹.۱) است امکان پذیر است. اگر مقادیر در مجموعه 'گسسته' با فاصله های یکنواخت از همدیگر قرار داشته باشند، می توان مجموعه را چنان مقیاس بندی کرد که مجموعه فقط مقادیر صحیح داشته باشد، آن گاه مسأله یک مسأله 'برنامه ریزی خطی عدد صحیح (ILP)' نامیده می شود. اکنون مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= c_1^T x + c_2^T y & (3.9.2) \\ A_1 x + A_2 y &= b, & \text{را مشروط به} \\ x_i &\geq 0 & \text{صحیح} \\ y_j &\geq 0 & \text{مینیم کنید} \end{aligned}$$

این شکل که در آن متغیرهای طراحی مشخصی می توانند پیوسته باشند را مسأله 'برنامه ریزی خطی عدد صحیح مخلوط (MILP)' می گویند. مسائلی که در آنها تمامی متغیرها صحیح هستند مسائل ILP محض و یا باختصار مسائل ILP نامیده می شوند. داشتن مسائلی که متغیرهای طراحی آن برای تعیین تصمیم سازی از 0/1 استفاده می کنند نیز معمول است. چنان مسائلی را مسائل ILP صفر یا یک یا دوتایی می نامند. به عنوان مثال، مسأله 'طراحی خرابایی که وجود و یا نبود یک عضو مشخص با یک متغیر دوتایی تعیین می شود در این دسته قرار می گیرد. هر مسأله 'ILP' که روی متغیرهای طراحی  $x_i$  کران بالای  $2^K - 1$  داشته باشد را می توان با جایگزینی متغیر با  $K$  متغیر دوتایی  $x_{i1}, \dots, x_{iK}$  به عنوان مسأله 'ILP' دوتایی در نظر گرفت. یعنی

$$x_i = x_{i1} + 2x_{i2} + \dots + 2^{K-1}x_{iK}. \quad (3.9.3)$$

تبدیل مسأله 'برنامه ریزی گسسته' خطی به یک ILP دوتایی با استفاده از متغیرهای دوتایی  $(x_{ij} \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, l)$  نیز امکان پذیر است، به شکلی که

$$x_i = d_{i1}x_{i1} + d_{i2}x_{i2} + \dots + d_{il}x_{il}, \quad (3.9.4)$$

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{il} = 1. \quad (3.9.5)$$



بیشتر بحثهای بعد با فرض این که مسائل و ILP خالص هستند انجام می شود.

یک رویکرد عملی برای حل مسائل ILP گرد کردن مقادیر بهین به نزدیکترین مقدار صحیح قابل قبول متغیرهایی است که با فرض پیوسته بودن بدست آمده اند. برای مسائل با  $n$  متغیر،  $2^n$  طراحی های ممکن گرد شده وجود دارد، و برای  $n$  های بزرگ انتخاب بهترین آنها مشکل است. افزون بر این، برای بعضی از مسائل ممکن است هیچ کدام از این طراحیهای گرد شده طرح بهین نباشد و برای بعضی دیگر ممکن است هیچ کدام از طراحیهای گرد شده قابل قبول نباشد. یک روش نظام مند برای درست کردن ترکیبهای ممکن که الزامهای مسأله را برآورده کند، می تواند با استفاده از مثال درخت شمارش گارفینکل و نموزر<sup>۱</sup> [19] تشریح شود.

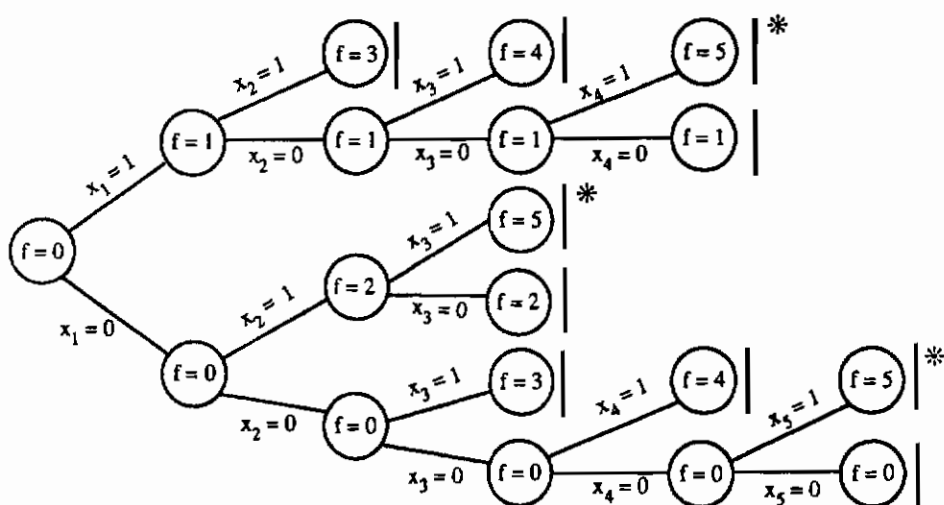
### ۳.۹.۱ مثال

مسأله ILP دوتایی انتخاب پنج متغیر به شکلی که جمع زیر برآورده شود را در نظر بگیرید.

$$f = \sum_{i=1}^5 ix_i = 5.$$

یک درخت تصمیم که بیانگر پیشرفت حل این مسأله است از گره ها و شاخه هایی تشکیل شده که بترتیب جوابها و ترکیبهایی از متغیرها که به آن جوابها می انجامد را نشان می دهد (شکل ۳.۹.۱). گره 'سر درخت مربوط به جوابی است که همه متغیرها خاموش شده اند ( $x_i = 0, i = 1, \dots, 5$ ) و مقدار تابع عبارت است از  $f = 0$ . از این جواب دو مسیر مربوط به دو حالت متغیر اول منشعب می شود. شاخه ای که  $x_1 = 1$  دارد مقدار تابعی برابر  $f = 1$  دارد و تحمل روشن شدن متغیرهای دیگر را دارد، به شرط این که مقدار تابع از 5 بیشتر نشود. بدیهی است که بقیه شاخه ها مانند جواب اولیه اند و می توانند انشعابهای بیشتری داشته باشند. بعد از آن این دو گره با در نظر گرفتن خاموش و یا روشن بودن متغیر دوم شاخه شاخه می شود. گرهی که از  $x_1 = x_2 = 1$  به آن می رسیم  $f = 3$  دارد و قطع می شود، همچنان که با یک خط عمودی نشان داده شده است. چنان رأسی به انتها رسیده نامیده می شود، زیرا انشعاب بیشتر به معنی اضافه کردن یک عدد است که سبب افزایش  $f$  از مقدار مشخص 5 می شود. سه رأس دیگر رازنده گویند و می توانند با در نظر گرفتن ترتیبی از حالت های مختلف متغیرهای دیگر انشعابهایی داشته باشند تا

1) Garfinkel and Nemhauser



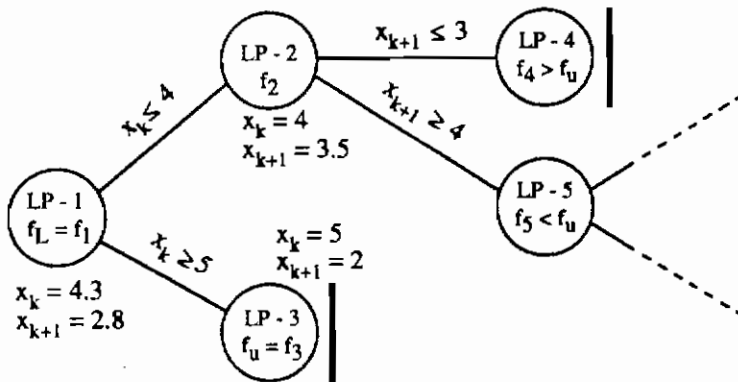
شکل ۳.۹.۱ درخت شمارش برای مسأله  $ILP$  دوتایی  $f = \sum_{i=1}^5 ix_i = 5$

این که گره به وجود آمده به انتها رسیده باشد و یا شاخه به جوابهای قابل قبول مسأله برسد. برای مسأله فعلی، بعد از در نظر گرفتن ۱۹ ترکیب ممکن متغیرها، سه جواب قابل قبول را شناسایی می کنیم که با ستاره مشخص شده اند. این تعداد ترکیب ۴۰٪ از تعداد کل ترکیبها یعنی  $2^5 = 32$  که برای شناسایی تمام جوابهای قابل قبول لازم است کمتر است. برای یک مسأله طراحی سازه که ترکیبهای مختلف متغیرها تحلیل پر هزینه ای نیاز دارد، درخت شمارش می تواند به صرفه جویی قابل توجهی بینجامد. ...

#### ۳.۹.۱ الگوریتم شاخه و کران

مفهوم اساسی زیربنای فن شمارش، زیربنای این الگوریتم توانمند که برای مسائل  $MILP$  و مسائل صحیح مخلوط غیرخطی مناسب است را تشکیل می دهد [20,21]. الگوریتم اصلی که توسط لند و دوینگ [22] تدوین شد بر اساس کرانهای بالا و پایین تابع هدف قرار دارد که به موجب آن گره هایی که به طراحیهای با توابع هدف خارج از کران ختم می شوند را می توان به انتها رسیده قلمداد کرد و، بنابراین،

تعداد تحلیل‌های مورد نیاز را می‌توان کوتاه کرد. مسأله ILP مخلوط معادله (۳.۹.۲) را در نظر بگیرید. اولین گام الگوریتم عبارت است از حل مسأله LP که از مسأله MILP با فرض پیوسته بودن متغیرها بدست آمده است. اگر تمامی  $x$  متغیر جواب بدست آمده مقادیر صحیح داشته باشند، نیازی به ادامه کار نیست و مسأله حل شده است. فرض کنید تعدادی از متغیرها مقادیر غیر صحیح دارند و مقدار تابع هدف  $f_1$  است. این مقدار  $f_1$  یک کران پایین برای MILP است،  $f_L = f_1$ ، زیرا اعمال شرایط صحیح بودن هر یک از متغیرهای غیر صحیح باعث افزایش مقدار تابع هدف می‌شود. این مسأله اولیه را با LP-1 نمایش می‌دهیم و در گره سر درخت شمارش قرار می‌دهیم، مانند آنچه در شکل (۳.۹.۲) نشان داده شده است. به منظور تشریح روش، فرض می‌شود تنها دو متغیر  $x_k$  و  $x_{k+1}$  شرط صحیح بودن را نقض کرده‌اند که مقدارشان  $x_k = 4.3$  و  $x_{k+1} = 2.8$  بوده است.



شکل ۳.۹.۲ درخت تصمیم شاخه و کران برای مسائل ILP

گام دوم الگوریتم شاخه شدن از گره به دو مسأله LP جدید با اضافه کردن یک قید جدید به LP-1 است که تنها یکی از متغیرهای غیر صحیح را، مثلاً  $x_k$ ، در بر می‌گیرد. یکی از آن دو مسأله، LP-2، به این صورت خواهد بود که متغیر شاخه شده  $x_k$  کمتر یا مساوی بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از  $x_k$  باشد، و مسأله دیگر، LP-3، قیدی به این صورت خواهد داشت که  $x_k$  بزرگتر از کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از  $x_k$  باشد. مانند آنچه در مثال ۳.۹.۲ توضیح داده خواهد شد، این دو مسأله در واقع فضای طراحی قابل قبول LP-1 را به دو ناحیه تقسیم می‌کنند. برای حل این دو مسأله جدید امکانات مختلفی وجود

## بخش ۳.۹: برنامه ریزی خطی عدد صحیح ۱۲۹

دارد. یکی از آن امکانات این است که مسأله 'جدید جواب قابل قبولی نداشته باشد. در این حالت 'گره' جدید به انتها رسیده خواهد بود. امکان دیگر رسیدن به یک جواب با مقدار صحیح قابل قبول است (به LP-3 از شکل ۳.۹.۲ توجه کنید) که در این حالت گره باز هم به انتها رسیده خواهد بود، ولی مقدار تابع هدف یک کران بالای  $f_U$  برای مسأله 'MILP خواهد بود. یعنی فراتر از این نقطه 'جواب، هر گره که یک جواب LP با مقدار بزرگتری برای تابع هدف دارد به انتها رسیده خواهد بود، و تنها آن جوابهایی که پتانسیل تولید تابع هدفی بین  $f_U$  و  $f_L$  داشته باشند دنبال می شوند. اگر جوابی با مقدار تابع هدف کمتر از  $f_U$  وجود نداشت، آن گاه گره یک جواب بهین است. اگر جوابهای دیگری با تابع هدفی کوچکتر از  $f_U$  وجود داشت، هنوز ممکن است متغیرهای غیر صحیحی وجود داشته باشند (LP-2 از شکل ۳.۹.۲)، که به عنوان گرههای زنده در نظر گرفته می شوند. گرههای زنده دوباره با در نظر گرفتن یکی از مقادیر غیر صحیح باقیمانده دو مرتبه شاخه می شوند و جوابهای بدست آمده تحلیل می شوند تا زمانی که تمامی گره ها به انتها برسند.

## مثال ۳.۹.۲

مسأله 'قاب سردر مثال ۳.۱.۵ (معادله های (۳.۱.۲۵) تا (۳.۱.۳۱) را ببینید) را با شرط  $x_i \in \{0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$ ,  $i = 1, 2$  در نظر بگیرید. متغیرهای طراحی را با ضریب 5 مقیاس بندی می کنیم تا مسأله را به صورت یک مسأله 'برنامه ریزی خطی صحیح در آوریم،

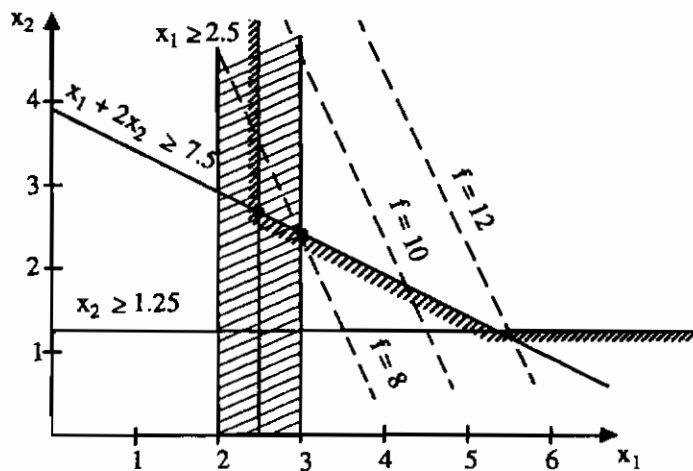
$$\begin{aligned} f &= (2x_1 + x_2) && \text{را مشروط به} \\ x_2 &\geq 1.25, \\ x_1 + x_2 &\geq 2.5, \\ x_1 + x_2 &\geq 5, \\ x_1 &\geq 2.5, \\ x_1 + 2x_2 &\geq 7.5, \\ 2x_1 + x_2 &\geq 7.5, \\ x_i &\geq 0 \quad \text{صحیح} \quad , \quad i = 1, 2. && \text{مینیمم کنید} \end{aligned}$$

جواب ترسیمی این مسأله 'مقیاس بندی شده (که در مثال ۳.۴.۱ بدون در نظر گرفتن متغیر طراحی صحیح و قبل از مقیاس بندی ارائه شد) عبارت است از:

$$x_1 = x_2 = 2.5, \quad f = 7.5,$$

که یک کران پایین برای تابع هدف است،  $f_L = 7.5$  یعنی جواب صحیح بهین نمی تواند تابع هدفی کمتر از  $f_L = 7.5$  داشته باشد. سپس  $x_1$  را انتخاب می کنیم و جوابهایی را مورد بحث قرار می دهیم که در آنها  $x_1 \leq 2$  و  $x_1 \geq 3$  است و دو LP جدید با اضافه کردن هر یک از این قیود به مجموعه اصلی قیودها تشکیل می دهیم چون مجموعه اصلی قیدی دارد که ایجاب می کند  $x_1 \geq 2.5$  باشد، لذا اولین مسأله LP با  $x_1 \leq 2$  جواب ندارد. جواب LP دوم در شکل (۳.۹.۳) به شکل ترسیمی نشان داده شده است. قیودهای فعال در بهین عبارتند از،  $x_1 \leq 3$  و  $x_1 + 2x_2 \geq 7.5$ ، و جواب عبارت است از:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2.25, \quad f = 8.25.$$



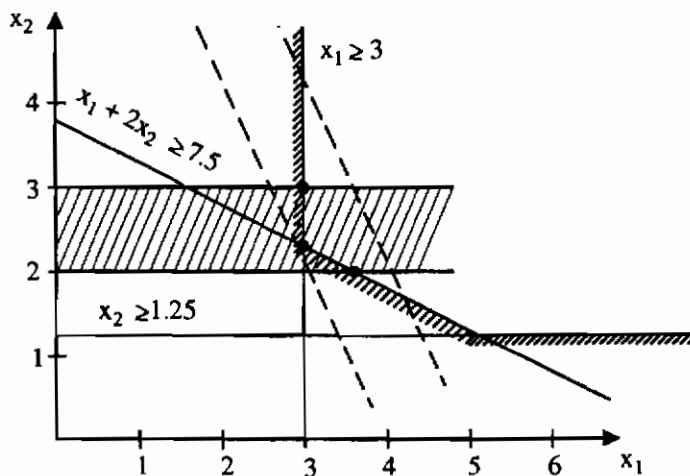
شکل ۳.۹.۳ حل شاخه و کران برای  $x_1 \leq 2$  و  $x_1 \geq 3$  مثال ۳.۹.۳

چون  $x_2$  هنوز غیر صحیح است، دو LP دیگر می سازیم، این بار به ترتیب با اعمال  $x_2 \leq 2$  و  $x_2 \geq 3$ . جواب ترسیمی LP جدید در شکل (۳.۹.۴) نشان داده شده است. جواب حالت  $x_2 \geq 3$  در رأس  $x_1 = 3$  و  $x_2 = 3$  قرار دارد و یک جواب قابل قبول برای مسأله مقدار صحیح است با مقدار تابع هدف  $f = 9$ . بنابراین، این مقدار تابع هدف یک حد بالایی،  $f_u = 9$  برای مسأله است. از طرف دیگر، جواب حالت  $x_2 \leq 2$ ، در محل تلاقی  $x_2 = 2$  و  $x_1 + 2x_2 = 7.5$  قرار دارد و عبارت است از

$$x_1 = 3.5, \quad x_2 = 2, \quad \text{و} \quad f = 9.$$

این جواب گسسته نیست و می توان آن را با شاخه کردن  $x_1$  (یعنی ساختن LP های جدید با اضافه

## بخش ۳.۹: برنامه ریزی خطی عدد صحیح ۱۵۱

شکل ۳.۹.۴ حل شاخه و کران برای  $x_2 \geq 3$  و  $x_2 \leq 2$  مثال ۳.۹.۲

کردن  $x_1 \geq 3$  و  $x_1 \leq 4$ ) ادامه داد. اما چون تابع هدف آن برابر کران بالاست، نمی توانیم تابع هدف را بیشتر بهبود بخشیم. برای شاخه کردن باید قیدهای بیشتری را معرفی کنیم که تنها می تواند تابع هدف را افزایش دهد. بنابراین، جواب بهین عبارت است از  $f=9$  و  $x_1 = x_2 = 3$ ...

همچنان که در مثال می توان مشاهده کرد، عملکرد الگوریتم شاخه و کران به طور چشمگیری به انتخاب متغیر غیر صحیحی که برای شاخه شدن استفاده می شود و انتخاب گره ای که شاخه می شود بستگی دارد. اگر گره و متغیر شاخه انتخاب شده به یک کران بالای تابع هدف LP-1 قبلی طرح شمارش نزدیک باشد، آن گاه صرفه جویی محاسباتی قابل ملاحظه ای خواهد شد زیرا شاخه هایی که قابلیت تولید جوابهای پایین تر از کران بالا را ندارند، حذف شده اند. یک قاعده بدیهی برای انتخاب متغیر غیر صحیح که باید شاخه شود این است که متغیر با اعشار بزرگتر انتخاب گردد. برای انتخاب گره ای که باید شاخه شود، از میان گره های زنده، مسأله LP را انتخاب می کنیم که تابع هدف کوچکتری دارد؛ این گره به احتمال زیاد طراحی قابل قبولی خواهد ساخت که کران بالای با اختلاف کمتری داشته باشد.

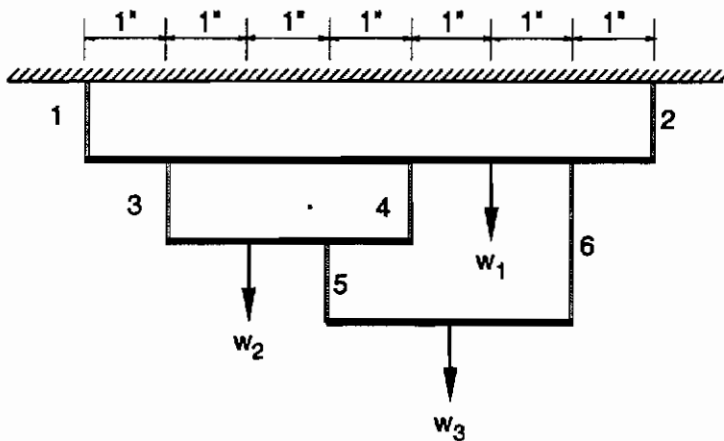
شاخه و کران تنها یکی از الگوریتمهای حل مسائل ILP یا MILP است. با این وجود، به سبب ساده بودن آن در بسیاری از برنامه های رایانه ای تجاری گنجانده شده و در دسترس است [23, 24]. تعداد دیگری از فنون نیز وجود دارند که قابلیت حل مسائل مقدار گسسته عمومی را دارند (به عنوان مثال به

مرجع [25] نگاه کنید). بعضی از این الگوریتمها نه تنها برای مسایل ILP بلکه برای مسایل NLP با متغیرهای صحیح نیز خوب و مناسبند. به ویژه، روشهایی که بر اساس الگوریتمهای جست و جوی احتمالی کار می کنند برای بسیاری از کاربردها از قبیل کاربردهای طراحی سازه درست شده اند که مسائل برنامه ریزی خطی و غیر خطی را دارا هستند. دو فن از چنین فنونی به نامهای سرد شدن تدریجی شبیه سازی شده و الگوریتمهای ژنتیکی در فصل ۴ مورد بحث قرار می گیرد. رویکرد دیگر که بر اساس تعمیمی از رویکرد تابع جریمه برای مسائل NLP مقید قرار دارد در فصل ۵ ارائه می شود. در خاتمه، استفاده از متغیرهای دوگان (که در بخش ۳.۷ به عنوان قیمت قیدها مفید قلمداد شده) در مسایل ILP در فصل ۹ بحث می شود.

یکی از کاربردهای طراحی جالب ILP توسط هفتکه و والش<sup>۱</sup> [26] برای طراحی ترتیب قرار دادن صفحات مرکب لایه ای به منظور بهبود بخشیدن به پاسخ کماتش ارائه شده است. از آن جا که رابطه سازی این مسأله شامل مطالبی می شود که در فصل ۱۱ ارائه شده، بحث و تشریح این کاربرد در آن فصل می آید.

### ۳.۱۰ تمرینها

۱. بار حد برای خرپای سه میله ای مثال ۳.۱.۲ را با استفاده از یک رویکرد ترسیمی برآورد کنید، درستی جوابتان را با استفاده از روش سیمپلکس آزمایش کنید.
۲. سیستم تکیه گاهی جایگاه شکل ۳.۱۰.۱ را در نظر بگیرید که در آن کابل ۱ و ۲ می توانند هر کدام تا 400 lb و کابلهای ۳ و ۴ هر کدام تا 150 lb و کابلهای ۵ و ۶ هر کدام تا 75 lb بار تحمل کنند. از وزن جایگاه و کابلها صرف نظر کنید و وزنه های  $w_1$ ،  $w_2$ ،  $w_3$  را در محل های نشان داده شده در شکل فرض کنید. همچنین از شکست خمشی جایگاه صرف نظر کنید. با استفاده از برنامه ریزی خطی بار کل ماکزیممی که سیستم می تواند تحمل کند را بدست آورید.
۳. مسأله طراحی حد خرپای شکل ۳.۱.۴ را با استفاده از الگوریتم سیمپلکس حل کنید. فرض کنید  $A_{13} = A_{24} = A_{34}$ ،  $A_{14} = A_{23}$  و از بی بعد سازی مناسب استفاده کنید.
۴. با استفاده از روش تغییر مکانهای مجازی نشان دهید که ساز و کار فرو ریختگی قاب سردر شکل ۳.۱.۶ به معادله های (۳.۱.۲۶) تا (۳.۱.۳۱) بر حسب متغیرهای بی بعد  $x_1$  و  $x_2$  می انجامد.



شکل ۳.۱۰.۱ سیستم تکیه گاهی جایگاه

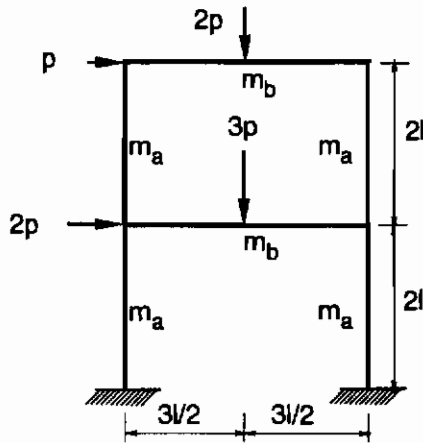
۵. قاب سردر دو طبقه یک دهانه ای نشان داده شده در شکل (۳.۱۰.۲) تحت تأثیر یک بارگذاری که از ۴ بار متمرکز تشکیل شده قرار دارد. پیرو مثال ۳.۱.۵، مسأله LP برای طراحی با وزن مینیمم برای قاب را در برابر فرو ریختگی خمیری (پلاستیک) رابطه سازی کنید.

۶. تیر بتنی پیش تنیده پیوسته نشان داده شده در شکل (۳.۱۰.۳) را در نظر بگیرید، الف) نشان دهید که نیروی رو به بالای گسترده یکنواخت معادل که روی تیر بتنی توسط یک کابل پیش تنیده با نیروی  $f$  و یک منحنی سهموی که با خارج از مرکزهای  $y_1$ ،  $y_2$ ،  $y_3$  به ترتیب در سه نقطه  $x=0$ ،  $x=l/2$  و  $x=l$  تعریف می شود اعمال می شود از رابطه زیر بدست می آید.

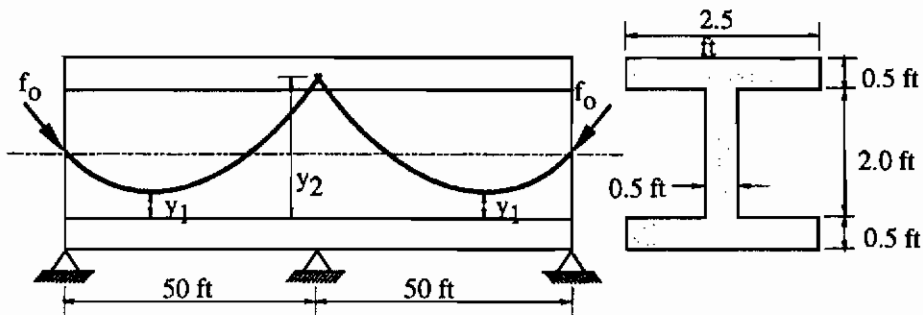
$$q = \frac{4f}{l^2}(y_3 - 2y_2 + y_1).$$

ب) تیر در شکل تحت تأثیر دو شرط بارگذاری قرار دارد: اولین بارگذاری از یک بار مرده  $1 \text{ kip/ft}$  و یک بار معادل به خاطر یک کابل پیش تنیده با نیروی  $f$  تشکیل شده و دومین بارگذاری عبارت است از یک بار زنده اضافی  $2.5 \text{ kips/ft}$ . با این همه فرض می شود هنگام کار کردن نیروی پیش تنیده  $f$ ، یک افت ۱۵٪ داشته باشد. مسأله LP را برای طراحی هزینه مینیمم تیر با فرض  $y_1$ ،  $f$ ،  $y_2$  به عنوان متغیرهای طراحی رابطه سازی کنید. فرض کنید که تنش مجاز برای هر دو شرط بارگذاری عبارت است از  $\sigma_1^t = 200 \text{ psi}$ ،  $\sigma_1^c = -3000 \text{ psi}$ ،  $\sigma_2^c = 0 \text{ psi}$ ،  $\sigma_2^t = -2000 \text{ psi}$  و حد کرانهای بالا و پایین





شکل ۳.۱۰.۲ قاب سردر دو طبقه



شکل ۳.۱۰.۳ تیر بتنی پیش تنیده پوسته

برای خارج از مرکزهای  $y_1$  و  $y_2$  عبارت است از  $0.4 \text{ ft} \leq y_i \leq 2.6 \text{ ft}$ ,  $i = 1, 2$

ج) مسأله LP را به کمک الگوریتم سیمپلکس حل کرده و جواب نیروی پیش تنیده، مینیمم و منحنی میله را بدست آورید.

۷. خرابای از نظر ایستایی معین شکل ۳.۳.۱ و رابطه سازی طراحی برای مینیمم شدن وزن آن را که توسط معادله های (۳.۳.۹) تا (۳.۳.۱۳) بیان شد را در نظر بگیرید. با استفاده از طرح خطی سازی ارائه شده در معادله های (۳.۳.۲) تا (۳.۳.۵) مسأله LP را برای  $m = 3$  رابطه سازی کنید. LP را با الگوریتم سیمپلکس حل کرده و حل تقریبی را با ترسیمی یا یک حل دقیق مقایسه کنید.

بخش ۳.۱۱ : مراجع ۱۵۵

۸. با استفاده از الگوریتم شاخه و کران مسأله طراحی حد تمرین ۳ را با فرض این که سطح مقطعهای اعضا مقادیری از مجموعه های زیر را می گیرند حل کنید.

- a)  $\{0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0\}P/\sigma_0$   
 b)  $\{0.0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8, 2.1\}P/\sigma_0$

### ۳.۱۱ مراجع

- [1] Charnes, A. and Greenberg, H. J., "Plastic Collapse and Linear Programming," Bull. Am. Math. Soc., 57, 480, 1951.
- [2] Calladine, C.R., Engineering Plasticity. Pergamon Press, 1969.
- [3] Cohn, M.Z., Ghosh, S.K. and Parimi, S.R., "Unified Approach to Theory of Plastic Structures," Journal of the EM Division, 98 (EM5), pp. 1133-1158, 1972.
- [4] Neal, B. G., The Plastic Methods of Structural Analysis, 3rd edition, Chapman and Hall Ltd., London, 1977.
- [5] Zeman, P. and Irvine, H. M., Plastic Design, An Imposed Hinge-Rotation Approach, Allen and Unwin, Boston, 1986.
- [6] Massonet, C.E. and Save, M.A., Plastic Analysis and Design, Beams and Frames, Vol. 1. Blaisdell Publishing Co., 1965.
- [7] Lin, T.Y. and Burns, N.H., Design of Prestressed Concrete Structures, 3rd ed. John Wiley and Sons, New York, 1981.
- [8] Parme, A.L. and Paris, G.H., "Designing for Continuity in Prestressed Concrete Structures," J. Am. Concr. Inst., 23 (1), pp. 45-64, 1951.
- [9] Morris, D., "Prestressed Concrete Design by Linear Programming," J. Struct. Div., 104 (ST3), pp. 439-452, 1978.
- [10] Kirsch, U., "Optimum Design of Prestressed Beams," Computers and Structures 2, pp. 573-583, 1972.
- [11] Luenberger, D. G., Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1973.
- [12] Majid, K.I., Nonlinear Structures, London, Butterworths, 1972.
- [13] Dantzig, G., Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.
- [14] Karmarkar, N., "A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming," Combinatorica, 4 (4), pp. 373-395, 1984.
- [15] Todd, M. J. and Burrell, B. P., "An Extension of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming Using Dual Variables," Algorithmica, 1, pp. 409-424, 1986.

- [16] Rinaldi, G., "A Projective Method for Linear Programming with Box-type Constraints," *Algorithmica*, 1, pp. 517-527, 1986.
- [17] Strang, G., "Karmarkar's Algorithm and its Place in Applied Mathematics," *The Mathematical Intelligencer*, 9, 2, pp. 4-10, 1987.
- [18] Vanderbei, R. F., Meketon, M. S., and Freedman, B. A., "A Modification of Karmarkar's Linear Programming Algorithm," *Algorithmica*, 1, pp. 395-407, 1986.
- [19] Garfinkel, R. S., and Nemhauser, G. L., *Integer Programming*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1972.
- [20] Lawler, E. L., and Wood, D. E., "Branch-and-Bound Methods—A Survey," *Operations research*, 14, pp. 699-719, 1966.
- [21] Tomlin, J. A., "Branch-and-Bound Methods for Integer and Non-convex Programming," in *Integer and Nonlinear Programming*, J. Abadie (ed.), pp. 437-450, Elsevier Publishing Co., New York, 1970.
- [22] Land, A. H., and Doig, A. G., "An Automatic Method for Solving Discrete Programming Problems," *Econometrica*, 28, pp. 497-520, 1960.
- [23] Johnson, E. L., and Powell, S., "Integer Programming Codes," in *Design and Implementation of Optimization Software*, Greenberg, H. J. (ed.), pp. 225-240, 1978.
- [24] Schrage, L., *Linear, Integer, and Quadratic Programming with LINDO*, 4th Edition, The Scientific Press, Redwood City CA., 1989.
- [25] Kovács, L. B., *Combinatorial Methods of Discrete Programming*, Mathematical Methods of Operations Research Series, Vol. 2, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.
- [26] Haftka, R. T., and Walsh, J. L., "Stacking-sequence Optimization for Buckling of Laminated Plates by Integer Programming," *AIAA J.* (in press).

در این فصل فنون برنامه ریزی ریاضی که برای اکستریم کردن توابع غیر خطی با یک یا چند ( $n$ ) متغیر طراحی و مقید به هیچ گونه قیدی به کار می رود را مورد مطالعه قرار می دهیم. هر چند بیشتر مسائل بهینه سازی سازه ها مقید به قیدهایی هستند که فضای طراحی را محدود می کنند، مطالعه 'روشهای بهینه سازی نامقید به دلایل متعددی اهمیت دارد. اول از همه، اگر طراحی در وضعیتی است که هیچ قیدی فعال نیست آن گاه فرایند تعیین جهت جست و جو و اندازه گام برای مینیمم سازی تابع هدف در واقع یک الگوریتم مینیمم سازی تابع نامقید است. البته در چنان حالتی طراح باید هنگام حرکت در فضای طراحی دائماً نقض قید را زیر نظر داشته باشد. دلیل دوم اهمیت مطالعه 'روشهای بهینه سازی نامقید این است که یک مسأله 'بهینه سازی مقید می تواند در قالب یک مسأله 'مینیمم سازی نامقید مطالعه شود هر چند قیدها فعال هم باشند. روشهای تابع جریمه و ضربگر که در فصل ۵ بحث می شوند مثالهایی از چنین روشهای غیر مستقیمی هستند که مسأله 'مینیمم سازی مقید را تبدیل به یک مسأله 'نامقید معادل می کنند. در نهایت، راهبرد مینیمم سازی مقید به شکل فزاینده ای به عنوان فنون مناسب برای مسائل تحلیل سازه 'خطی و غیر خطی شهرت پیدا کرده اند (به مرجع کامات و هیداک<sup>۱</sup> [1] رجوع کنید) که می توانند جواب دستگاه معادله های خطی و غیر خطی را بیابند. جواب چنین سیستمهایی ممکن است به شکل مینیمم سازی انرژی پتانسیل سیستم یا مینیمم کردن باقیمانده معادلات در یک حالت مجذور مربعات مطرح شود.

#### ۴.۱ مینیمم سازی توابع يك متغیره

در بیشتر مسائل طراحی سازه ها، هدف مینیمم سازی یک تابع با چندین متغیر است ولی مطالعه

1) Kamat and Hayduk

مینیم سازی توابع با یک متغیر طراحی به دلایل متعددی مهم است. اول، بعضی از جنبه های نظری و عددی مینیم سازی توابع  $n$  متغیره را می توان به شکل مطلوبی، به ویژه ترسیمی، در یک فضای یک بعدی تشریح کرد. دوم، بیشتر روشهای مینیم سازی مقید توابع  $f(x)$  با  $n$  متغیر بر اساس دنباله ای از مینیم سازی های یک بعدی تابع در امتداد مجموعه ای از جهتهای اعمال شده،  $s_k$ ، در فضای طراحی چند بعدی  $R^n$  قرار دارند. یعنی برای یک نقطه طراحی داده شده  $x_0$  و یک جهت جست و جوی مشخص  $s_0$  در آن نقطه، تمام نقاطی که در امتداد آن جهت قرار دارند را می توان بر حسب تنها یک متغیر  $\alpha$  به صورت زیر بیان کرد:

$$x = x_0 + \alpha s_0 \quad (4.1.1)$$

در حالی که  $\alpha$  معمولاً به عنوان اندازه گام شناخته می شود. بنابراین تابع  $f(x)$  که باید مینیم شود را می توان به شکل زیر بیان کرد:

$$f(x) = f(x_0 + \alpha s_0) = f(\alpha). \quad (4.1.2)$$

بنابراین، مسأله مینیم سازی به یافتن مقدار  $\alpha^*$  که تابع  $f(x)$  را مینیم می کند می انجامد. در حقیقت، یکی از ساده ترین روشهایی که در مینیم سازی توابع  $n$  متغیره به کار می رود عبارت است از جست و جوی مینیم تابع هدف با تغییر نوبه ای یک متغیر و ثابت نگهداشتن تمامی متغیرهای دیگر، و انجام یک مینیم سازی یک بعدی در امتداد هر یک از جهتهای مختصات از یک فضای طراحی  $n$  بعدی. این روش فن جست و جوی یک تغییری نامیده می شود.

در دسته بندی الگوریتمهای مینیم سازی برای هر یک از مسائل یک بعدی و چند بعدی، ما عموماً از سه گروه جداگانه استفاده می کنیم. این گروهها عبارتند از: روشهای مرتبه صفر، اول و دوم. روشهای مرتبه صفر در خراپند مینیم سازی تنها از مقدار تابع استفاده می کنند. روشهای مرتبه اول مقدار تابع و اولین مشتق آن نسبت به متغیرها را به کار می گیرند. در نهایت، روشهای مرتبه دوم از مقدار تابع و مشتق اول و دوم استفاده می کنند. در بحث مینیم سازی توابع یک متغیره، فرض می شود تابع به شکل  $f = f(\alpha)$  باشد. روشهایی که بحث می شود به طور یکسان برای مینیم سازی یک مسأله چند متغیره در امتداد یک جهت از پیش انتخاب شده  $s$ ، به کمک معادله (4.1.1) به کار می رود.

## ۴.۱.۱ روشهای مرتبه صفر

روش محصور کردن. همچنان که از نام این روش بر می آید، این روش مینیم تابعی را که باید مینیم شود را با استفاده از تعدادی ارزیابی تابع بین دو نقطه محصور می کند. روش با یک نقطه 'اولیه'  $\alpha_0$ ، یک مقدار تابع  $f(\alpha_0)$ ، یک اندازه گام  $\beta_0$ ، و یک پارامتر بسط گام  $\gamma > 1$  شروع می شود. گامهای الگوریتم [2] به طور خلاصه به شرح زیرند:

۱.  $f(\alpha_0)$  و  $f(\alpha_0 + \beta_0)$  را محاسبه کنید.

۲. اگر  $f(\alpha_0 + \beta_0) < f(\alpha_0)$ ، فرض کنید  $\alpha_1 = \alpha_0 + \beta_0$  و  $\beta_1 = \gamma\beta_0$  و  $f(\alpha_1 + \beta_1)$  را محاسبه کنید. در غیر این صورت به گام ۴ بروید.

۳. اگر  $f(\alpha_1 + \beta_1) < f(\alpha_1)$  است،  $\alpha_2 = \alpha_1 + \beta_1$  و  $\beta_2 = \gamma\beta_1$  قرار داده و اندیسها را هربار یکی اضافه کنید تا زمانی که  $f(\alpha_k + \beta_k) > f(\alpha_k)$  شود. آن گاه به گام ۸ بروید.

۴.  $\alpha_1 = \alpha_0$  و  $\beta_1 = -\xi\beta_0$  قرار دهید، در حالی که  $\xi$  که یک عدد ثابت است که در شرط  $0 < \xi < 1/\gamma$  صدق می کند، و  $f(\alpha_1 + \beta_1)$  را ارزیابی کنید.

۵. اگر  $f(\alpha_1 + \beta_1) > f(\alpha_1)$  به گام ۷ بروید.

۶.  $\alpha_2 = \alpha_1 + \beta_1$  و  $\beta_2 = \gamma\beta_1$  قرار داده و اندیسها را هربار یکی اضافه کنید تا  $f(\alpha_k + \beta_k) > f(\alpha_k)$  شود. آن گاه به گام ۸ بروید.

۷. مینیم بین نقاط  $(\alpha_0 - \xi\beta_0)$  و  $(\alpha_0 + \beta_0)$  محصور شده است. به گام ۹ بروید.

۸. سه نقطه 'آخر روابط'  $f(\alpha_{k-2}) > f(\alpha_{k-1})$  و  $f(\alpha_k) < f(\alpha_{k-1})$  را برآورده می کنند و بنابراین مینیم محصور شده است.

۹. از یکی از دو نقطه 'انتهای بازه' حصار به عنوان نقطه 'اولیه' استفاده کنید. با یک اندازه 'گام کاهش یافته' شروع و گامهای ۱ تا ۸ را تکرار کنید تا مینیم را با درجه 'دقت دلخواه' بیابید.

درون یابی درجه دوم. روشی که به نام درون یابی درجه دوم شناخته می شود، اولین بار به وسیله 'پاول' [3] مطرح شد و از مقادیر تابع  $f$  که باید مینیم شود در سه نقطه استفاده می کند تا یک سهمی

$$p(\alpha) = a + b\alpha + c\alpha^2, \quad (4.1.3)$$

۱۶۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۴: بهینه سازی نامقید)

از آن نقطه ها بگذراند. روش از یک نقطه اولیه مثلاً  $\alpha = 0$  با مقدار تابع  $p_0 = f(x_0)$  و یک اندازه گام  $\beta$  شروع می شود. بر اساس گامهای زیر دو ارزیابی دیگر تابع انجام می شود تا نقاط لازم برای گذراندن چند جمله ای بدست آید. به طور کلی، ما از وضعیتی شروع می کنیم که از پیش مینیمم را با استفاده از روش محصور کردن که پیشتر تشریح شد بین  $\alpha_1 = \alpha_u$  و  $\alpha_2 = \alpha_v$  محصور کرده ایم، در آن حالت ما تنها به یک نقطه میانی  $\alpha_0$  در بازه  $(\alpha_1, \alpha_u)$  نیاز خواهیم داشت.

۱.  $p_1 = p(\beta) = f(x_0 + \beta s)$  را ارزیابی کنید

۲. اگر  $p_1 < p_0$  است آن گاه  $p_2 = p(2\beta) = f(x_0 + 2\beta s)$  را ارزیابی کنید. در غیر این صورت

$p_2 = p(-\beta) = f(x_0 - \beta s)$  را ارزیابی کنید. اعداد ثابت  $a, b$  و  $c$  در معادله (۴.۱.۳)، اکنون

می تواند بر حسب مقادیر تابع  $p_0, p_1$  و  $p_2$  به شکل یکتا بیان شود یعنی

$$a = p_0,$$

$$b = \frac{4p_1 - 3p_0 - p_2}{2\beta}, \quad \text{و} \quad c = \frac{p_2 + p_0 - 2p_1}{2\beta^2}, \quad \text{اگر} \quad p_2 = f(x_0 + 2\beta s), \quad (4.1.4)$$

یا

$$b = \frac{p_1 - p_2}{2\beta}, \quad \text{و} \quad c = \frac{p_1 - 2p_0 + p_2}{2\beta^2}, \quad \text{اگر} \quad p_2 = f(x_0 - \beta s). \quad (4.1.5)$$

۳. مقدار  $\alpha^* = \alpha$  که در آن  $p(\alpha)$  برای دور فعلی اکستروموم شده برابر است با

$$\alpha^* = -\frac{b}{2c}. \quad (4.1.6)$$

۴. اگر  $c > 0$  باشد  $\alpha^*$  به یک مینیمم  $p$  تعلق دارد، و پیش بینی بر اساس معادله (۴.۱.۳) با

استفاده از  $(x_0 + \alpha^* s)$  به عنوان نقطه شروع برای دور بعدی با  $p_0 = f(x_0 + \alpha^* s)$  تکرار می شود تا زمانی که دقت مورد نظر بدست آید.

۵. اگر  $\alpha^* = \alpha$  به جای تعلق به مینیمم  $p$  به ماکزیمم آن تعلق داشته باشد، یا به مینیممی از  $p$  تعلق

داشته باشد که در فاصله ای بیشتر از یک مقدار ماکزیمم  $\beta_{\max}$  قرار داشته باشد (احتمالاً به این معنی است که  $\alpha^*$  خارج از نقاط محصور شده است)، آن گاه ماکزیمم گام مجاز در جهت کاهش  $f$  برداشته می شود و نقطه ای که از این نقطه جدید از همه دورتر است کنار گذاشته می شود تا فرایند تکرار شود.

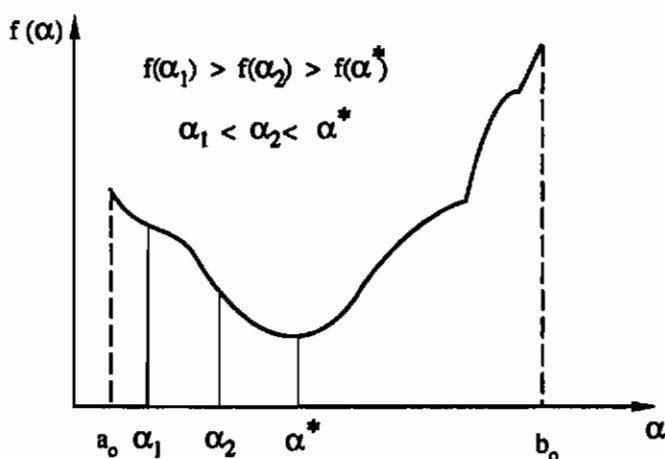
## بخش ۴.۱: مینیم سازی توابع یک متغیره ۱۶۱

در گام ۴، به جای شروع از  $(x_0 + \alpha^*s)$  به عنوان نقطه اولیه و تکرار گامهای گذشته، از نظر تعداد ارزیابی تابع یک جایگزین کم هزینه تر وجود دارد. نقطه  $(x_0 + \alpha^*s)$  و دو نقطه نزدیکتر به آن از طرف چپ و راست را می توان در یک درون یابی درجه دوم دیگر استفاده کرد تا یک مقدار بهتر برای  $\alpha^*$  بدست آید. راهبردهای دیگری برای بهبود بخشیدن به پیش بینی بعداً در بخش ۴.۱.۱ بحث خواهد شد.

**جست وجوی فیوناچی و بخش طلایی.** مانند محصور کردن، فنون جست وجوی فیوناچی و بخش طلایی اگر نگوئیم کاراترین دست کم قابل اعتمادترین فنون جست وجوی خط برای بدست آوردن مینیم نامقید تابع  $f(\alpha)$  در بازه  $a_0 \leq \alpha \leq b_0$  هستند. فرض می شود تابع  $f$  تک حالتی، یا در بازه تنها یک مینیم داشته باشد. توابع تک حالتی لزوماً پیوسته یا مشتق پذیر نیستند و ممکن است محدب نیز نباشند. (به شکل ۴.۱.۱ نگاه کنید). یک تابع را تک حالتی [3] در بازه  $I_0$  گویند اگر یک  $\alpha^* \in I_0$  وجود داشته باشد آن چنان که  $\alpha^*$  تابع  $f$  را در  $I_0$  مینیم سازد، و برای هر دو نقطه  $\alpha_1, \alpha_2 \in I_0$  با  $\alpha_1 < \alpha_2$  داشته باشیم.

$$\alpha_2 \leq \alpha^* \quad \text{ایجاب می کند} \quad f(\alpha_1) > f(\alpha_2), \quad (4.1.7)$$

$$\alpha_1 \geq \alpha^* \quad \text{ایجاب می کند} \quad f(\alpha_2) > f(\alpha_1). \quad (4.1.8)$$



شکل ۴.۱.۱ یک تابع تک حالتی نمونه



فرض تک حالتی بودن در فن جست و جوی فیبوناچی، که به دنبال کاهش بازه 'عدم اطمینان'، که مینیمم تابع  $f$  در آن قرار دارد، است نقش اساسی دارد.

پنداره' مهمی که فنون جست و جوی فیبوناچی و بخش طلایی بر آن بنا شده اند را می توان به شکل زیر بیان کرد. مینیمم سازی  $f$  را در بازه  $(a_0, b_0)$  در نظر بگیرید. دو نقطه در بازه  $(a_0, b_0)$  در  $\alpha = \alpha_1$  و  $\alpha = \alpha_2$  چنان انتخاب می کنیم که  $\alpha_1 < \alpha_2$  باشد، و تابع  $f$  را در آن نقاط ارزیابی می کنیم. اگر  $f(\alpha_1) > f(\alpha_2)$  باشد آن گاه چون تابع تک حالتی است، مینیمم نمی تواند در بازه  $(a_0, \alpha_1)$  قرار داشته باشد، بازه' جدید  $(\alpha_1, b_0)$  است که از بازه' اصلی کوچکتر است. به همین شکل، اگر  $f(\alpha_2) > f(\alpha_1)$  باشد. آن گاه بازه' جدید  $(a_0, \alpha_2)$  خواهد بود. فرایند را می توان تا زمانی که بازه تا سطح دقت مورد نظر کوچک شود ادامه داد. در هر چرخه' بعد از چرخه' اول تنها یک ارزیابی تابع مورد نیاز است، ولی ما مشخص نکرده ایم چگونه باید جایی را که  $f$  ارزیابی می شود انتخاب کرد. بهترین محل این نقاط، تعداد ارزیابی های تابع را برای یک دقت مشخص مینیمم می سازد (یعنی، کاهش بازه' عدم اطمینان به یک اندازه' مشخص). اگر تعداد ارزیابی های تابع  $n$  باشد، پر بازده ترین فرایند با یک جایابی متقارن نقاط توسط رابطه' زیر بدست می آید [4]:

$$\alpha_1 = a_0 + \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}} l_0, \quad (4.1.9)$$

$$\alpha_2 = b_0 - \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}} l_0, \quad (4.1.10)$$

و

$$\alpha_{k+1} = a_k + \frac{f_{n-(k+1)}}{f_{n-(k-1)}} l_k = b_k - \frac{f_{n-(k+1)}}{f_{n-(k-1)}} l_k, \quad (4.1.11)$$

که در آن  $f_n$  اعداد فیبوناچی هستند که با دنباله  $f_1 = 1, f_0 = 1$  و  $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$  تعریف می شود و  $l_k$  طول بازه  $k$ ام  $(a_k, b_k)$  است. تعداد کل ارزیابی تابع  $n$  را می شود از سطح دقت مورد نظر بدست آورد. می توان نشان داد که بازه' عدم اطمینان بعد از  $n$  بار ارزیابی تابع برابر  $2\epsilon l_0$  است که

$$\epsilon = \frac{1}{f_{n+1}} \quad (4.1.12)$$

## بخش ۴.۱: مینیم سازی توابع یک متغیره ۱۶۳

یک نقص این فن این است که تعداد ارزیابی های تابع باید از پیش مشخص شده باشد، تاجست و جوی فیبوناچی را بتوان انجام داد. برای جبران این نقص یک فن شبه بهین که به عنوان فن جست و جوی بخش طلایی معروف است، تدوین شده است. فن جست و جوی بخش طلایی براساس این یافته شکل گرفته که برای یک  $n$  به اندازه 'کافی بزرگ، داریم.

$$\frac{f_{n-1}}{f_{n+1}} \rightarrow 0.382. \quad (4.1.13)$$

بنابراین، محل بهین نقاط داده شده با معادله های (۴.۱.۹) تا (۴.۱.۱۱) را می شود به کمک رابطه های زیر تقریب زد:

$$\alpha_1 = a_0 + 0.382l_0, \quad (4.1.14)$$

$$\alpha_2 = b_0 - 0.382l_0, \quad (4.1.15)$$

و

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + 0.382l_k = b_k - 0.382l_k. \quad (4.1.16)$$

## مثال ۴.۱.۱

مقدار  $\alpha$  را با دقت  $\epsilon = \pm 0.1$  و با استفاده از فن جست و جوی بخش طلایی چنان بدست آورید که تابع  $f(\alpha) = \alpha(\alpha - 3)$  در بازه  $0 \leq \alpha \leq 2$  مینیم شود.

از معادله های (۴.۱.۱۴) و (۴.۱.۱۵) می توانیم مقادیر زیر را محاسبه کنیم.

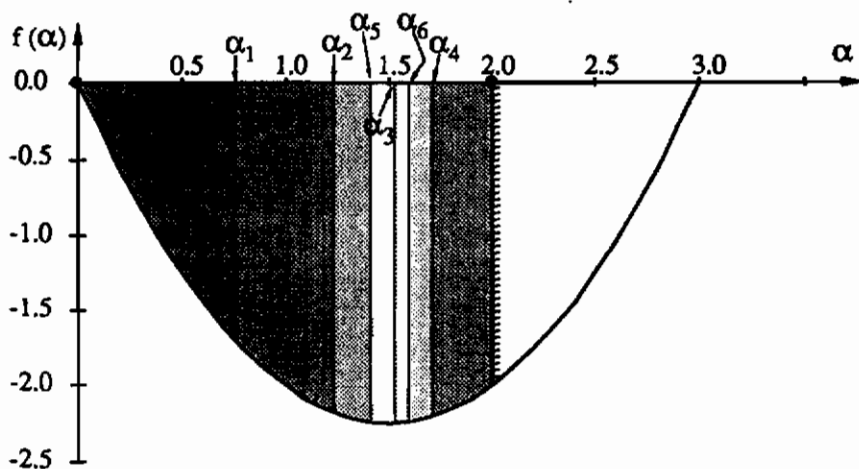
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 + 0.382(2) = 0.764, & f(\alpha_1) &= -1.708, \\ \alpha_2 &= 2 - 0.382(2) = 1.236, & f(\alpha_2) &= -2.180. \end{aligned}$$

چون  $f(\alpha_2) < f(\alpha_1)$  است،  $(\alpha_1, 2)$  را نگاه می داریم. بنابراین، محل نقطه 'بعدی عبارت است از:

$$\alpha_3 = 2 - 0.382(2 - 0.764) = 1.5278, \quad f(\alpha_3) = -2.249$$

چون  $f(\alpha_3) < f(\alpha_2)$  است، بازه  $(\alpha_1, \alpha_2)$  را رد می کنیم. بازه 'جدید عبارت است از  $(\alpha_2, 2)$ .

محل نقطه 'جدید عبارت است از:



شکل ۴.۱.۲ تاریخچه چرخه ها برای مینیم سازی  $f(\alpha) = \alpha(\alpha - 3)$

$$\alpha_4 = 2 - 0.382(2 - 1.236) = 1.7082, \quad f(\alpha_4) = -2.207.$$

چون  $f(\alpha_4) < f(\alpha_2) < f(2)$  است بازه  $(\alpha_4, 2)$  را رد کرده و  $(\alpha_2, \alpha_4)$  را نگاه می داریم و محل نقطه  $\alpha_5$  می یابیم.

$$\alpha_5 = 1.236 + 0.382(1.7082 - 1.236) = 1.4164, \quad f(\alpha_5) = -2.243$$

چون  $f(\alpha_5) < f(\alpha_4) < f(\alpha_2)$  بازه  $(\alpha_5, \alpha_4)$  را نگاه می داریم، محل نقطه بعدی عبارت است از:

$$\alpha_6 = 1.7082 + 0.382(1.7082 - 1.4164) = 1.5967, \quad f(\alpha_6) = -2.241$$

چون  $f(\alpha_6) < f(\alpha_4)$  است، بازه  $(\alpha_6, \alpha_4)$  را رد کرده و بازه  $(\alpha_5, \alpha_6)$  را به طول 0.18 نگاه می داریم که از بازه با دقت مشخص شده  $2\epsilon = 0.2$  کوچکتر است. تاریخچه چرخه مسأله در شکل ۴.۱.۲ نشان داده شده است. بنابراین، مینیم با یک دقت  $\pm 0.1$  محصور شده است. یعنی، مینیم بین  $\alpha_5 = 1.4164$  و  $\alpha_6 = 1.5967$  قرار دارد. می توان وسط بازه را  $\alpha = 1.5066 \pm 0.0902$  به عنوان جواب گرفت. محل دقیق مینیم در  $\alpha = 1.5$  است که مقدار تابع در آن -2.25 است. ...

بخش ۴.۱: مینیم سازی توابع یک متغیره ۱۶۵

## ۴.۱.۲ روشهای مرتبه اول

روش دو بخشی. مانند فنون محصور کردن جست و جوی بخش طلایی که به شکل فزاینده ای بازه ای که مینیم در آن قرار دارد را کاهش می دهند، فن دو بخشی محل صفر تابع  $f$  را با کاهش بازه 'عدم اطمینان' می یابد. با شروع از بازه 'معلوم'  $(a, b)$  که در آن  $f'(a)f'(b) < 0$  است، تقریبی برای ریشه ' $f$ ' از رابطه

$$\alpha^* = \frac{a+b}{2} \quad (4.1.17)$$

بدست می آید که نقطه ای در فاصله 'میان' بین  $a$  و  $b$  است. آن گاه مقدار ' $f$ ' در  $\alpha^*$  ارزیابی می گردد. اگر علامت ' $f(\alpha^*)$ ' با علامت ' $f'(a)$ ' یکسان است، آن گاه نقطه  $a$  با  $\alpha^*$  جایگزین می شود و بازه 'عدم اطمینان' جدید عبارت است از  $(\alpha^*, b)$ . از طرف دیگر اگر ' $f(\alpha^*)$ ' با ' $f'(b)$ ' هم علامت است، آن گاه نقطه ' $b$ ' با  $\alpha^*$  جایگزین می شود و بازه 'عدم اطمینان' جدید عبارت است از  $(a, \alpha^*)$ . این فرآیند با استفاده از رابطه (۴.۱.۱۷) تکرار می شود.

روش درون یابی درجه سوم دیویدان<sup>۱</sup>. این یک تقریب چند جمله ای است که در یافتن محل مینیم هم مقادیر تابع و هم مشتقات آنها را به کار می برد. این روش به ویژه برای فنون بهینه سازی چند متغیره که ارزیابی تابع و گرادیانهای آنها مورد نیاز است مفید است.

با این فرض که تابع مینیم شونده ' $f(x_0 + \alpha s_0)$ ' را می شود با یک چند جمله ای به شکل زیر تقریب زد شروع می کنیم.

$$p(\alpha) = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3, \quad (4.1.18)$$

که اعداد ثابت  $a, b, c$  و  $d$  از مقادیر تابع  $p_0$  و  $p_1$ ، مشتقاتش،  $g_0$  و  $g_1$  در دو نقطه، یکی در  $\alpha = 0$  و دیگری در  $\alpha = \beta$  بدست می آیند.

$$p_0 = p(0) = f(x_0), \quad p_1 = p(\beta) = f(x_0 + \beta s), \quad (4.1.19)$$

و

$$g_0 = \frac{dp}{d\alpha}(0) = s^T \nabla f(x_0), \quad g_1 = \frac{dp}{d\alpha}(\beta) = s^T \nabla f(x_0 + \beta s). \quad (4.1.20)$$

1) Davidson

۱۶۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۴: بهینه سازی نامقید)

بعد از جایگزینی، معادله (۴.۱.۱۸) به شکل زیر در می آید.

$$p(\alpha) = p_0 + g_0\alpha - \frac{g_0 + e}{\beta}\alpha^2 + \frac{g_0 + g_1 + 2e}{3\beta^2}\alpha^3, \quad (4.1.21)$$

در حالی که

$$e = \frac{3}{\beta}(p_0 - p_1) + g_0 + g_1. \quad (4.1.22)$$

اکنون می توانیم محل مینیمم  $\alpha = \alpha_m$  را با استفاده از معادله (۴.۱.۲۱) با برابر صفر قرار دادن مشتقاتش نسبت به  $\alpha$  تعیین کنیم. این کار به نتیجه زیر می انجامد:

$$\alpha_m = \beta \left( \frac{g_0 + e \pm h}{g_0 + g_1 + 2e} \right), \quad (4.1.23)$$

که در آن

$$h = (e^2 - 2g_0g_1)^{1/2}. \quad (4.1.24)$$

به راحتی می توان با بررسی  $d^2p/d\alpha^2$  نشان داد که برای  $\alpha_m$  در معادله (۴.۱.۲۳) علامت مثبت باید نگاه داشته شود، تا این که یک مینیمم باشد و نه ماکزیمم. بنابراین، الگوریتم درون یابی درجه سوم دیویدان [5] را می توان به شکل زیر خلاصه کرد:

۱.  $p_0 = f(\mathbf{x}_0)$  و  $g_0 = \mathbf{s}^T \nabla f(\mathbf{x}_0)$  را ارزیابی کرده و مطمئن شوید که  $g_0 < 0$  است.
۲. در غیاب یک حدس ابتدایی از طول گام اولیه  $\beta$ ، می شود آن را بر اساس یک درون یابی درجه دوم که با استفاده از  $p_0$ ،  $g_0$  و یک حدس از  $p_{\min}$  بدست می آید محاسبه کرد. بنابراین،

$$\beta = \frac{2(p_{\min} - p_0)}{g_0}. \quad (4.1.25)$$

۳.  $p_1 = f(\mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{s})$  و  $g_1 = \frac{df(\mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{s})}{d\beta}$  را ارزیابی کنید.

۴. اگر  $g_1 > 0$  یا اگر  $p_1 > p_0$  است به گام ۶ بروید، در غیر این صورت به گام ۵ بروید.

۵.  $\beta$  را با  $2\beta$  جایگزین کرده و به گام ۳ بروید.

۶.  $\alpha_m$  را با استفاده از معادله (۴.۱.۲۳) با علامت مثبت محاسبه کنید.

بخش ۴.۱: مینیم سازی توابع یک متغیره ۱۶۷

۷. اگر

$$g_{\alpha_m} = \frac{df(x_0 + \alpha_m s)}{d\alpha_m} \geq 0, \quad (4.1.26)$$

از بازه  $(0, \alpha_m)$  استفاده کنید، در غیر این صورت بازه  $(\alpha_m, \beta)$  را استفاده کنید و به گام ۴ برگردید.  
۸. اگر  $\alpha_m$  متعلق به یک ماکزیمم است، الگوریتم را با استفاده از نقطه های جدیدی دوباره شروع کنید. انتخاب نقاط جدید را می شود با استفاده از یک راهبرد مشابه که در فن درون یابی درجه دوم شرح داده شد انتخاب کرد.

۳. ۱. روش مرتبه دوم

مسأله 'مینیم سازی تابع  $f(\alpha)$  معادل بدست آوردن ریشه معادله 'غیر خطی زیر است.

$$f'(\alpha) = 0, \quad (4.1.27)$$

زیرا این شرط لازم برای اکستروم بودن  $f$  است. یک روش راحت برای حل (۴.۱.۲۷) روش نیوتن<sup>۱</sup> است. این روش تشکیل شده از خطی سازی  $f'(\alpha)$  حول نقطه  $\alpha_i = \alpha$  و آن گاه بدست آوردن نقطه  $\alpha_{i+1}$  که در آن تقریب خطی

$$f'(\alpha_{i+1}) = f'(\alpha_i) + f''(\alpha_i)(\alpha_{i+1} - \alpha_i), \quad (4.1.28)$$

صفر شود. این نقطه

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \frac{f'(\alpha_i)}{f''(\alpha_i)}, \quad (4.1.29)$$

به عنوان یک تقریب جدید برای کاربرد مجدد معادله (۴.۱.۲۹) با جایگزینی  $i$  با  $i+1$  تلقی می شود.  
برای یک همگرایی موفق به مینیمم، لازم است که مشتق دوم تابع  $f$  از صفر بزرگتر باشد. راهبردهای متعددی وجود دارد [6] که روش نیوتن را بهبود می بخشد و آن را به شکل فراگیر برای توابع چند متغیره همگرا می سازد (یعنی این که بدون اعتنا به نقطه 'شروع به یک مینیمم همگرا می شود)؛ بعضی از این روشها در بخش آینده مطرح می شوند.

1) Newton

## ۱۶۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۴: بهینه سازی نامقید)

سبب آنکه این روش به عنوان یک روش مرتبه دوم شناخته می شود نه تنها استفاده اش از اطلاعات مشتق دوم تابع  $f$ ، بلکه به سبب نرخ همگرایی درجه دومش به مینیمم نیز هست، به سخن دیگر، الگوریتم نیوتن به مینیمم  $\alpha^*$  به شکلی همگرا می شود که

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{i+1} - \alpha^*|}{(\alpha_i - \alpha^*)^2} = \beta, \quad (۴.۱.۳۰)$$

در حالی که  $\alpha_i$  و  $\alpha_{i+1}$ ،  $i$ امین و  $i+1$ امین تخمین از مقدار مینیمم  $\alpha^*$ ، و  $\beta$  یک عدد ثابت غیر صفر است.

## ۴.۱.۳ درون یابی چند جمله ای حفاظت شده [7]

درون یابی های چند جمله ای مانند درون یابی درجه دوم و درون یابی درجه سوم دیویدان گاهی در تعیین مینیمم یک تابع در امتداد خط بسیار ناکارا و نامطمئنند. اگر تابع درون یابی نشانگر رفتار تابع مینیمم شونده در بازه 'عدم اطمینان نباشد، ممکن است مینیمم در خارج از بازه بیفتد، یا یی کران پایین شود، یا چرخه های پشت سر هم به هم زیاد نزدیک باشند و به بهبود قابل توجهی در مقدار تابع نینجامد. این روشها از ترکیب درون یابی چند جمله ای با یک فن دو بخشی ساده یا فن جست و جوی بخش طلایی که پیشتر تشریح شدند تشکیل شده اند. در پایان درون یابی چند جمله ای، فن دو بخشی برای یافتن محل صفر مشتق تابع  $f$  به کار می رود. از طرف دیگر، جست و جوی بخش طلایی با خود تابع  $f$  کار می کنند و با استفاده از بازه 'عدم اطمینان معلوم  $(a, b)$  نقطه  $\alpha^*$  را که مینیمم تابع  $f$  در بازه است را تعیین می کند.

## ۴.۲ مینیمم سازی توابع چند متغیره

## ۴.۲.۱ روشهای مرتبه صفر

روشهای متعددی برای مینیمم سازی یک تابع چند متغیره تنها با استفاده از مقدار تابع وجود دارد. با این همه، تنها دو روش از این روشها مفید هستند. این دو روش، روش سیمپلکس دنباله ای اسپندلی، هگزرت و هیمسورث<sup>۱</sup> [8] و جهت مزدوج پاول [3] است. هر دو روش نیاز به این دارند که تابع

1) Spendley, Hext and Himsworth

بخش ۴.۲: مینیمم سازی توابع چند متغیره ۱۶۹

$f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  تک حالتی باشد؛ یعنی تابع  $f$  تنها یک مینیمم داشته باشد. روش سیمپلکس دنباله ای نیاز به مشتق پذیر بودن  $f$  ندارد، در صورتی که مشتق پذیری  $f$  در جست و جوی خط دقیق روش پاول لازم است. به کمک آزمایش آقایان نلدر و مید<sup>۱</sup> [9] روشن شده است که برای بیشتر مسائل، عملکرد روش سیمپلکس دنباله ای اگر از روش پاول بهتر نباشد، قابل مقایسه است. هر دو این روشها برای  $n \geq 10$  ناکارایند؛ روش پاول برای  $n \geq 30$  همگرا نیست. یک بهبود اخیر روش سیمپلکس که توسط چن<sup>۲</sup> و دیگران [10] ارائه شده کاربرد این الگوریتم را به حالت های با بعد های بالاتر تعمیم می دهد. اگر تابع مشتق پذیر باشد، معمولاً کاربرد روش های قدرتمند مرتبه اول و دوم کاراترند، این مشتقها یا به شکل صریح و یا از رابطه های تفاضل محدود بدست می آیند.

روش سیمپلکس دنباله ای. روش سیمپلکس دنباله ای ابتدا توسط اسپندلی، هگرت و هیمسورث ارائه شد و به دنبال آن توسط نلدر و مید توسعه یافت. این روش با یک شکل هندسی منظم که سیمپلکس نامیده می شود و از  $n+1$  رأس در فضای  $n$  بعدی تشکیل شده است شروع می شود، این رأسها را می شود با مرکز و نقاطی در امتداد  $n$  جهت مختصات تعریف کرد. چنین سیمپلکسی ممکن است از نظر هندسی منظم نباشد. روابط زیر برای محاسبه موقعیت رأسهای یک سیمپلکس منظم به اندازه  $a$  در فضای طراحی  $n$  بعدی در مرجع 8 ارائه شده است.

$$x_j = x_0 + pe_j + \sum_{k=1}^n qe_k, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.2.1)$$

با

$$p = \frac{a}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} + n - 1), \quad \text{و} \quad q = \frac{a}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} - 1), \quad (4.2.2)$$

در حالی که  $e_k$  بردار مبنای یکه در امتداد  $k$  امین محور مختصات، و  $x_0$  نقطه مبنای اولیه است. به عنوان مثال، برای یک مسأله در فضای طراحی دو بعدی، معادله (4.2.1) و (4.2.2) به یک مثلث متساوی الساقین به ضلع  $a$  می انجامد.

هنگامی که سیمپلکس تعریف شد، تابع  $f$  در تمامی  $n+1$  رأس  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ارزیابی می شود. فرض کنید  $x_n$  و  $x_1$  رأسهایی باشند که تابع  $f$  در آنها به ترتیب مقدار ماکزیمم و مینیمم داشته باشد، و  $x_0$



رأسی باشد که از نظر مقدار در رده 'دوم از بالا باشد. روش سیمپلکس رأس  $x_h$  را کنار می گذارد و آن را با یک نقطه که در آن  $f$  یک مقدار کمتری دارد جایگزین می کند. این کار با سه عمل به نامهای انعکاس، انقباض و انبساط انجام می شود.

عمل انعکاس در امتداد خط اتصال  $x_h$  به مرکز  $\bar{x}$  نقاط باقیمانده، نقطه جدید  $x_r$  را به وجود می آورد

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x_i, \quad i \neq h. \quad (4.2.3)$$

رأس در پایان انعکاس از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$x_r = \bar{x} + \alpha(\bar{x} - x_h), \quad (4.2.4)$$

که در آن  $\alpha$  یک عدد مثبت است که ضریب انعکاس نامیده می شود و معمولاً واحد فرض می شود. مقدار مثبت ضریب انعکاس در معادله (۴.۲.۴) تضمین می کند که  $x_r$  در طرف دیگر  $\bar{x}$  از  $x_h$  باشد. اگر مقدار تابع در این نقطه جدید،  $f_r = f(x_r)$ ، شرط  $f_l < f_r \leq f_h$  را برآورده سازد، آن گاه  $x_h$  با  $x_r$  جایگزین می شود و فرآیند با این سیمپلکس جدید تکرار می شود. از طرف دیگر، اگر مقدار تابع  $f_r$  در پایان انعکاس از مقدار پائینی تابع  $f_l = f(x_l)$  کمتر بود، آن گاه این امکان هنوز وجود دارد که تابع با بیشتر رفتن در همان جهت کاهش یابد. ما به دنبال یافتن یک نقطه 'بهبود یافته'  $x_e$  هستیم که با استفاده از فن انبساط در رابطه

$$x_e = \bar{x} + \beta(x_r - \bar{x}), \quad (4.2.5)$$

به دست می آید که در آن ضریب انبساط  $\beta$  را اغلب ۲ انتخاب می کنند. اگر مقدار تابع  $f_e$  کمتر از مقدار تابع پایان گام انعکاس باشد، آن گاه  $x_h$  با  $x_e$  جایگزین می شود و فرآیند با سیمپلکس جدید تکرار می شود. اگر انبساط به مقدار تابعی مساوی و یا بزرگتر از  $f_r$  انجامید، آن گاه با جایگزینی  $x_h$  با  $x_r$  سیمپلکس جدیدی را تشکیل می دهیم و ادامه می دهیم.

در نهایت، اگر فرآیند انعکاس به نقطه  $x_r$  انجامید، آن چنان که  $f_r < f_h$  شد، آن گاه  $x_h$  را با  $x_r$  جایگزین کرده و عمل انقباض را انجام می دهیم. در غیر این صورت ( $f_r \geq f_h$ )، عمل انقباض را بدون هیچ جایگزینی و با استفاده از

$$x_c = \bar{x} + \gamma(x_h - \bar{x}), \quad (4.2.6)$$

انجام می دهیم که ضریب انقباض  $\gamma$ ،  $0 < \gamma < 1$  معمولاً  $1/2$  انتخاب می شود. اگر  $f_c = f(x_c)$  از  $f_h$  بزرگتر باشد، آن گاه تمامی نقاط را با یک مجموعه نقاط

$$x_i = x_i + \frac{1}{2}(x_l - x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (4.2.7)$$

جایگزین کرده و فرایند را با این سیمپلکس جدید تکرار می کنیم. عمل معادله (۴.۲.۷) سبب دو نیم شدن فاصله بین نقاط سیمپلکس قدیمی و نقطه با مقدار کمترین تابع می شود بنابراین به آن عمل کاهش می گویند. نمودار جریانی روش کامل در شکل ۴.۲.۱ ارائه شده است. نلدرومید [9] برای معیار همگرایی و قطع الگوریتم رابطه زیر را پیشنهاد داده اند

$$\left\{ \frac{1}{1+n} \sum_{i=0}^n [f_i - f(\bar{x})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \epsilon, \quad (4.2.8)$$

در حالی  $\epsilon$  که دقت مورد نیاز است.

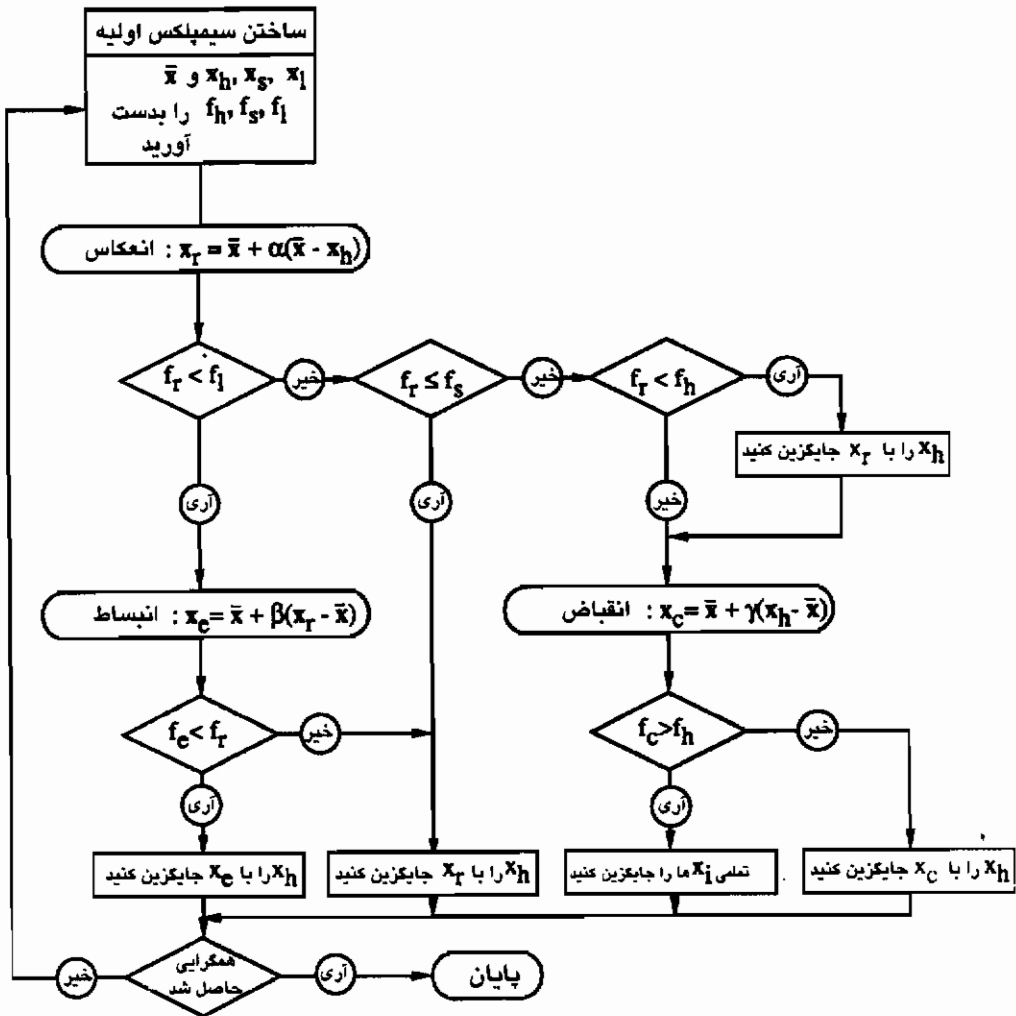
چن، سالیم و گریس<sup>۱</sup> [10] برای حالتی که تعداد متغیرهای طراحی  $n$ ، زیاد است، بهبودی برای عملکرد الگوریتم سیمپلکس پیشنهاد داده اند. روش جست و جوی سیمپلکس بهبود یافته ارائه شده در مرجع [10]، در هر گام عمل انعکاس، انبساط، انقباض، و کاهش را در بیش از یک رأس از سیمپلکس انجام می دهد. این کار با جداسازی رأسهای سیمپلکس به دو گروه به کمک مقدار برش (CV) تابع  $f_{cv}$  انجام می شود. مقدار برش با رابطه زیر تعریف می شود

$$f_{cv} = \frac{(f_h + f_l)}{2} + \eta s, \quad (4.2.9)$$

که در آن  $s$  انحراف استاندارد مقادیر تابع رأسهای سیمپلکس است،

$$s = \left[ \sum_{i=0}^n (f_i - \bar{f})^2 / (n+1) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.2.10)$$

و  $\eta$  یک پارامتر است (در زیر بحث می شود) که تعداد رأسهای که باید روی آنها عمل شود را کنترل



شکل ۴.۲.۱ نمودار جریانی الگوریتم سیمپلکس دنباله ای

می نمایم. مقدار  $f_r$  در معادله (۴.۲.۱۰) مقدار متوسط مقادیر تابع در کل سیمپلکس فعلی است. رأسهای با مقادیر تابع بالاتر از مقدار برش، گروهی را که باید انعکاس یابند (و کنار گذاشته شوند) تشکیل می دهند. رأسهای دیگر به عنوان نقاط مرجع هستند. اگر پارامتر  $\eta$  به اندازه کافی بزرگ باشد، تمامی رأسهای سیمپلکس به جز  $x_h$  در گروهی باقی می مانند که به عنوان نقاط مرجع استفاده می شوند و، بنابراین، الگوریتم معادل شکل اصلی است. برای مقادیر به اندازه کافی کوچک  $\eta$ ، تمامی نقاط به جز

بخش ۴.۲: مینیم سازی توابع چند متغیره ۱۷۳

$x_n$  کنار زده می شوند. انتخاب پارامتر  $\eta$  به دشواری مسأله و تعداد متغیرها بستگی دارد. مقادیر پیشنهادی  $\eta$  در جدول II مرجع [10] ارائه شده است. در میان  $n+1$  رأس سیمپلکس فعلی، رأسها را از بزرگترین تا کوچکترین مرتب کرده و با  $x_0, x_1, \dots, x_{ev}, \dots, x_n$  شماره گذاری می کنیم در حالی که  $i=0, \dots, n_{ev}$  عناصر گروهی که بعداً انعکاس می یابند است، مرکز رأسها در گروه مرجع به شکل زیر تعریف می شود.

$$\bar{x} = \frac{1}{n - n_{ev}} \sum_{i=n_{ev}+1}^n x_i. \quad (4.2.11)$$

عملکرد این روش سیمپلکس بهبود یافته با سیمپلکس پیشنهاد شده توسط نلدر و مید مقایسه شده [10]، و همچنین با روشهای توانمندتر مانند روش مرتبه دوم دیویدان-فلتچر-پاول<sup>۱</sup> (DFP) که بعداً در همین فصل بحث می شود نیز مقایسه شده است. برای مسائل با ابعاد بالا، الگوریتم سیمپلکس بهبود یافته کاراتر و توانمندتر از الگوریتم دی اف پی (DFP) است. نلدر و مید [9] در مورد کاربرد الگوریتمشان در مینیم سازی توابع آزمایشی کلاسیک توضیحات کاملی داده اند و عملکرد آن را با روش جهت های مزدوج پاول که بعداً بحث می شود مقایسه کرده اند.

روش جهت های مزدوج پاول و بهبود سازی های آن. گرچه بیشتر مسائل توابع درجه دوم ندارند، بسیاری از الگوریتم های مینیم سازی نامقید برای مینیم سازی یک تابع درجه دوم تدوین شده اند. این به سبب آن است که یک تابع را می توان در نزدیکی یکی مینیم با یک تابع درجه دوم بخوبی تقریب زد. الگوریتم جهت های مزدوج پاول یک مثال نمونه است. یک تابع درجه دوم در  $R^n$  را می توان به شکل زیر نوشت.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + b^T x + c. \quad (4.2.12)$$

یک مجموعه از جهت های  $s_i, i = 1, 2, \dots$  را  $Q$  مزدوج گویند اگر

$$s_i^T Q s_j = 0, \quad i \neq j. \quad (4.2.13)$$

علاوه بر این، می توان نشان داد اگر  $f$  هر بار در امتداد یک جهت از یک مجموعه  $s$  از جهت های مزدوج  $Q$  که به شکل خطی مستقلند مینیم شود آن گاه مینیم  $f$  بدون اعتنا به نقطه شروع در  $n$  گام یا

1) Daridon- Fletcher- Powell

قبل از  $n$  امین گام بدست خواهد آمد مشروط به این که هیچ گونه خطای گرد کردن انباشته نشده باشد. به این خاصیت عموماً خاصیت پایانی درجه دوم می گویند. پاول برای به وجود آوردن چنان جهت‌های مزدوجی با یک ترکیب مناسب از جست و جوی تک تغییری ساده و یک فن جست و جوی الگوی یک روش آسان ارائه داد [3]. با این همه، الگوریتم پاول در حالت‌های مشخصی جهت‌هایی به وجود می آورد که به طور خطی وابسته اند و بنابراین به مینیم همگرایی نمی شوند. پس می توان گفت پاول الگوریتمش را برای توانمند بودن بهبود بخشید ولی به بهای خاصیت پایانی درجه دومش.

راهبرد پاول برای به وجود آوردن جهت‌های مزدوج بر اساس خاصیت زیر است (برای اثبات به مرجع [3] مراجعه کنید). اگر  $x_1$  و  $x_2$  دو نقطه دلخواه باشند و  $B$  یک جهت مشخص، و  $x_{1s}$  نقطه مینیم تابع درجه دوم  $f$  روی خطی در امتداد  $B$  که از  $x_1$  شروع شده باشد و  $x_{2s}$  نقطه مینیم روی خطی که در امتداد  $B$  از  $x_2$  شروع شده باشد، آن گاه جهت  $B$  و  $(x_{2s} - x_{1s})$  مزدوجند. گامهای اساسی روش بهبود یافته پاول بر اساس یک دور مینیم سازی های تک تغییری قرار دارد. در هر دور ما گامهای زیر را استفاده می کنیم.

۱.  $f$  را در امتداد هر یک از جهت‌های مختصات مینیم کنید (جست و جوی تک تغییری). از  $x_0^k$  شروع کرده و نقاط  $x_1^k, \dots, x_m^k$  در حالی که  $k$  شماره دور است، را تولید کنید.

۲. بعد از تکمیل دور تک تغییری، نماد  $m$  مربوط به جهت جست و جوی تک تغییری را که بیشترین مقدار و کاهش تابع را در رفتن از  $x_{m-1}^k$  به  $x_m^k$  دارد بیابید.

۳. جهت «الگو»  $s_p^k = x_m^k - x_0^k$  را (که مجموع تمامی حرکت‌های تک تغییری است) محاسبه کرده و مقدار  $\alpha$  که  $f$  را از  $x_0^k$  در امتداد  $s_p^k$  مینیم می کند بیابید. این نقطه جدید را با  $x_0^{k+1}$  نشان دهید.

۴. اگر

$$|\alpha| < \left[ \frac{f(x_0^k) - f(x_0^{k+1})}{f(x_{m-1}^k) - f(x_m^k)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.2.14)$$

آن گاه دوباره از همان جهت‌های قدیمی برای دور تک تغییری بعدی استفاده کنید (یعنی از هیچ کدام از جهت‌های دور قبلی در مقایسه با جهت‌های الگوی  $s_p^k$  صرف نظر نکنید. اگر معادله (4.2.14) برآورده نشود آن گاه جهت  $m$  را با جهت الگوی  $s_p^k$  تعویض کنید.

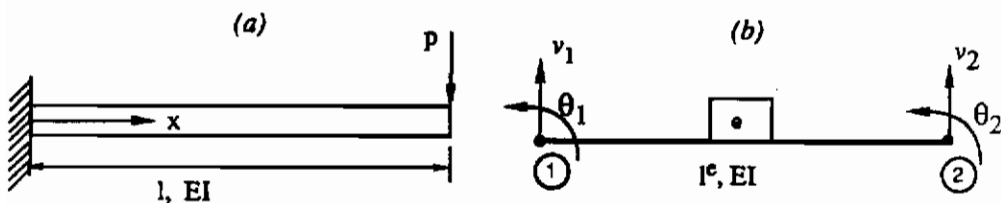
۵. دور تک تغییری بعدی را با جهت‌هایی که در گام ۴ مشخص شده شروع کرده و گامهای ۲ تا ۴ را

بخش ۴.۲: مینیم سازی توابع چند متغیره ۱۷۵

تا زمانی که به یک تقریب مشخص همگرا شود تکرار کنید. فرض می شود که همگرایی وقتی به وجود می آید که نرم اقلیدسی  $\|x^{k+1} - x^k\|$  کمتر از کمیت از پیش تعیین شده  $\epsilon$  باشد. گرچه روش اصلی پاول خاصیت پایانی درجه دوم دارد، ولی الگوریتم بهبود یافته اش ندارد [3]. اکنون روش بهبود یافته در مثال ساده بعدی که درباره تحلیل سازه هاست تشریح می شود.

#### مثال ۴.۲.۱

مسأله بدست آوردن خیز ماکزیمم و چرخش سر آزاد یک تیر یک سر گیردار به طول  $l$  که در شکل (۴.۲.۲) نشان داده شده را در نظر بگیرید. حل این مسأله با مینیم سازی انرژی پتانسیل کل تیر رابطه سازی می شود که با استفاده از یک جزء محدود تیر مکعبی تنها مدل می شود. با یک جزء تیر دو گره ای با دو درجه آزادی در هر گره، میدان تغییر مکان به شکل زیر فرض می شود



شکل ۴.۲.۲ تیر یک سر گیردار که در سر آزاد بارگذاری شده و مدل جزء محدود آن

$$v(\xi) = \begin{bmatrix} (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) & l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & (3\xi^2 - 2\xi^3) & l(-\xi^2 + \xi^3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.2.15)$$

در حالی که  $\xi = x/l$  انرژی پتانسیل مدل تیر عبارت است از:

$$\Pi = \frac{EI}{2l^3} \int_0^l \left( \frac{d^2 v}{d\xi^2} \right)^2 d\xi + p v_2. \quad (4.2.16)$$

به سبب شرط سر گیردار در  $\xi = 0$  دو درجه آزادی اول در معادله (۴.۲.۱۵) صفر است.

بنابراین، با جایگزینی معادله (۴.۲.۱۵) در معادله (۴.۲.۱۶) داریم:

$$\Pi = \frac{EI}{2l^3} (12v_2^2 + 4\theta_2^2 l^2 - 12v_2 \theta_2 l) + p v_2. \quad (4.2.17)$$

با تعریف  $f = 2\pi l^3/EI$ ،  $x_2 = \theta_2 l$ ،  $x_1 = v_2$  و انتخاب  $pl^3/EI = 1$ ، مسأله یافتن خیز و چرخش سر آزاد تیر به یک مینیم سازی نامقید زیر می انجامد:

$$f = 12x_1^2 + 4x_2^2 - 12x_1x_2 + 2x_1. \quad (۴.۲.۱۸)$$

با شروع از نقطه اولیه  $\mathbf{x}_0^1 = (-1, -2)^T$ ،  $f(\mathbf{x}_0^1) = 2$  و  $f$  را با استفاده از روش جهت های مزدوج پاول مینیم خواهیم کرد. جواب دقیق این مسأله عبارت است از  $\mathbf{x}^* = (-1/3, -1/2)^T$ . چون ما یک رابطه صریح برای تابع هدف  $f$  داریم، مینیم سازی های یک بعدی در امتداد یک جهت مشخص به طور دقیق انجام خواهد شد و دیگر نیازی به فنون عددی مطرح شده در بخش قبلی نیست. اما اگر این مینیم سازی ها به روش عددی انجام شوند، یکی از فنون مرتبه صفر کافی خواهد بود. برای نشان دادن تعداد دور تک تغییری از یک اندیس بالایی و برای تعداد چرخه ها در یک دور از اندیس پایین استفاده می کنیم.

ابتدا، جست و جوی تک تغییری را در امتدادهای  $x_1$  و  $x_2$  انجام می دهیم. با انتخاب  $\mathbf{s}_1^1 = (1, 0)^T$  داریم

$$\mathbf{x}_1^1 = \left\{ \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix} \right\} + \alpha \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -1 + \alpha \\ -2 \end{matrix} \right\}, \quad (۴.۲.۱۹)$$

و

$$f(\alpha) = 12(-1 + \alpha)^2 + 4(-2)^2 - 12(-1 + \alpha)(-2) + 2(-1 + \alpha). \quad (۴.۲.۲۰)$$

با مشتق گیری از معادله (۴.۲.۲۰) نسبت به  $\alpha$ ، مقدار  $\alpha$  که  $f$  را مینیم می کند بدست می آید و برابر است با  $\alpha = -1/12$  بنابراین،

$$\mathbf{x}_1^1 = \left\{ \begin{matrix} -13/12 \\ -2 \end{matrix} \right\} \quad \text{و} \quad f(\mathbf{x}_1^1) = 1.916666667$$

با انتخاب  $\mathbf{s}_2^1 = (0, 1)^T$ ، داریم.

$$\mathbf{x}_2^1 = \left\{ \begin{matrix} -13/12 \\ -2 \end{matrix} \right\} + \alpha \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -13/12 \\ -2 + \alpha \end{matrix} \right\}, \quad (۴.۲.۲۱)$$

و

$$f(\alpha) = 12 \left( \frac{-13}{12} \right)^2 + 4(-2 + \alpha)^2 - 12 \left( \frac{-13}{12} \right) (-2 + \alpha) + 2 \left( \frac{-13}{12} \right), \quad (۴.۲.۲۲)$$

که در  $\alpha = 3/8$  مینیمم است. بنابراین در پایان جست و جوی تک تغییری داریم

$$\mathbf{x}_2^1 = \begin{Bmatrix} \frac{-13}{12} \\ \frac{-13}{8} \end{Bmatrix} \quad \text{و} \quad f(\mathbf{x}_2^1) = 1.354166667.$$

در این جا یک جهت الگو به شکل زیر می سازیم

$$\mathbf{s}_p^1 = \mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_0^1 = \begin{Bmatrix} \frac{-13}{12} \\ \frac{-13}{8} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-1}{12} \\ \frac{3}{8} \end{Bmatrix}, \quad (۴.۲.۲۳)$$

و تابع را در امتداد این جهت مینیمم می کنیم. داریم

$$\mathbf{x}_0^2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} \frac{-1}{12} \\ \frac{3}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 - \frac{\alpha}{12} \\ -2 + \frac{3\alpha}{8} \end{Bmatrix}, \quad (۴.۲.۲۴)$$

که در نقطه' زیر با  $\alpha = 40/49$  به مینیمم می رسد

$$\mathbf{x}_0^2 = \begin{Bmatrix} \frac{-157}{147} \\ \frac{-83}{49} \end{Bmatrix} \quad \text{و} \quad f(\mathbf{x}_0^2) = 1.319727891.$$

در اولین دور از جست و جوی تک تغییری جهتی که بیشترین کاهش در تابع هدف  $f$  به وجود می آورد مربوط به متغیر دوم است. اکنون می توانیم تصمیم بگیریم که آیا می خواهیم جهت جست و جوی تک تغییری دوم ( $m=2$ ) را با جهت الگو عوض کنیم یا نه. این کار با بررسی شرط بیان شده در گام ۴ الگوریتم در معادله' (۴.۲.۲۴) انجام می شود. یعنی، معیار پاول

$$|\alpha| = \frac{40}{49} < \left[ \frac{2 - 1.319727891}{1.916666667 - 1.354166667} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (۴.۲.۲۵)$$

برآورده شده، بنابراین، جهت های جست و جوی تک تغییری گذشته را برای دور دوم نگه می داریم و روش را با برگشتن به گام ۲ الگوریتم دوباره شروع می کنیم. نتیجه دور دوم در جدول ۴.۲.۱ خلاصه شده است.



جدول ۴.۲.۱ حل مسأله تیر با استفاده از روش جهتهای مزدوج پاول

شماره دور	$x_1$	$x_2$	$f$
0	-1.0	-2.0	2.0
1	-1.083334	-2.0	1.916667
1	-1.083334	-1.625	1.354167
2	-0.895834	-1.625	0.9322967
2	-0.895834	-1.34375	0.6158854
2	-0.33334	-0.499999	-0.333333

میزان اهمیت روش بهبود یافته پاول به شکل مشخص و واضح در مینیمم سازی تابع زیر که توسط اوریل<sup>۱</sup> [2] مطرح شده مشاهده می شود.

$$f = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (-x_1 + x_2 + x_3)^2,$$

که به عنوان یک تمرین برای خواننده گذاشته می شود (تمرین ۲ را ببینید). . . .

قبل از این که به بحث روشهای مرتبه اول پردازیم، خوب است ببینیم چه موقع باید روش مرتبه صفر استفاده شود. روش سیمپلکس دنباله ای را می توان برای توابع غیر مشتق پذیر که روشهای مرتبه اول برای آنها مناسب نیستند استفاده کرد. برای آن دسته از مسائل مینیمم سازی نامقید که توابع مشتق پذیر دارند بهتر است که مشتقهای دقیق محاسبه شود، یا وقتی مشتقها را می توان دقیق محاسبه کرد آن مشتقها را با استفاده از تفاضلهای محدود به دست آورد و سپس برای مینیمم سازی یک روش مرتبه اول استفاده کرد. روشهای مرتبه صفر مانند الگوریتم جهتهای مزدوج پاول برای مسائلی که توابع هدف آنها بسیار غیر خطی است و دقت ارزیابی تابع پایین است هنوز جایگاه ویژه ای دارد. هنگامی که ارزیابی توابع دقت کمی دارد باید از روابط تفاضل محدود با درجات بالاتر برای محاسبه مشتقها استفاده کرد، بنابراین، برای مینیمم سازی استفاده از یک روش مرتبه صفر یک جایگزین معقول تر است.

## ۴.۲.۲ روشهای مرتبه اول

روشهای مرتبه اول برای مینیمم سازی نامقید یک تابع  $f$  در  $R^n$  در محاسبه جهت حرکت برای مینیمم سازی تابع از گرادینان و مقدار خود تابع استفاده می کند. این روشها یک نرخ همگرایی خطی یا فوق خطی دارند. رشته  $x_k, k = 0, 1, 2, \dots$  را در صورتی همگرایی فوق خطی  $q$  به  $x^*$  از مرتبه حداقل

1) Avriel

$p$  می گویند که

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c_k \|x_k - x^*\|^p, \quad (4.2.26)$$

که در آن  $c_k$  به صفر همگرا می شود. اگر در معادله (۴.۲.۲۶)،  $c_k$  یک عدد ثابت باشد آن گاه می گویند همگرایی یک همگرایی  $q$  مرتبه ساده از مرتبه حداقل  $p$  است. بنابراین، اگر  $p = 1$  باشد و  $c_k$  یک عدد ثابت، آن گاه ما یک نرخ همگرایی خطی داریم، در صورتی که اگر  $p = 1$  باشد و  $c_k$  دنباله ای که به صفر همگرا شود آن گاه همگرایی را فوق خطی گویند (برای تعاریف بیشتر به مرجع ۶ مراجعه کنید).

شاید قدیمی ترین روشی که برای مینیمم سازی یک تابع  $n$  متغیره شناسایی شده روش تندترین کاهش باشد که اولین بار توسط کوچی<sup>۱</sup> [11] برای حل یک دستگاه معادلات خطی ارائه شد. این روش را می توان به شکل زیر برای مینیمم سازی تابع استفاده کرد. جهت حرکت با مینیمم سازی مشتق سویی  $f$  بدست می آید

$$\nabla f^T s = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} s_i, \quad (4.2.27)$$

مشروط به این شرط که  $s$  یک برداری که در  $R^n$  در فضای اقلیدسی باشد.

$$s^T s = 1. \quad (4.2.28)$$

می توان به راحتی نشان داد (به تمرین ۶ مراجعه کنید) که جهت تندترین کاهش عبارت است از

$$s = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}, \quad (4.2.29)$$

در حالی که  $\|\cdot\|$  نشانگر نرم اقلیدسی ست و این جهت بیشترین کاهش در  $f$  است. با شروع از  $x_k$  در چرخه  $k$ ام فرایند مینیمم سازی، نقطه بعدی  $x_{k+1}$  را به شکل زیر بدست می آوریم:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha s. \quad (4.2.30)$$

در این جا  $s$  از رابطه (۴.۲.۲۹) بدست می آید و  $\alpha$  چنان بدست می آید که  $f$  در امتداد جهت

1) Cauchy

## ۱۸۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۴: بهینه سازی نامقید)

انتخاب شده با استفاده از یکی از فنون مینیمم سازی یک بعدی که در بخش قبلی ارائه شد مینیمم شود. اگر تابع مینیمم شونده در  $R^n$  درجه دوم باشد و به شکل زیر بیان شود.

$$f = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c, \quad (4.2.31)$$

اندازه گام را می توان مستقیماً با جایگزینی معادله (۴.۲.۳۰) در معادله (۴.۲.۳۱) برای  $(k+1)$  امین چرخه و سپس مینیمم سازی  $f$  نسبت به  $\alpha$  که به

$$\alpha^* = - \frac{(\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} + \mathbf{b}^T) \mathbf{s}}{(\mathbf{s}^T \mathbf{Q} \mathbf{s})}. \quad (4.2.32)$$

می انجامد بدست آورد. در بدست آوردن معادله (۴.۲.۳۲) فرض می کنیم که ماتریس هسیان  $\mathbf{Q}$  شکل درجه دوم به طور صریح در دسترس است، و از تقارن  $\mathbf{Q}$  استفاده می کنیم.

عملکرد روش تندترین کاهش به عدد شرطی ماتریس هسیان  $\mathbf{Q}$  بستگی دارد. عدد شرطی یک ماتریس عبارت است از نسبت بزرگترین مقدار ویژه به کوچکترین آن. یک عدد شرطی بزرگ نشانگر آن است که از ترازهای تابع مینیمم شونده یک فضای طراحی کشیده شده ای را تشکیل می دهند و بنابراین پیشرفتی که توسط، روش تندترین کاهش به وجود می آید بسیار آهسته و به شکل زیگزاگی<sup>۱</sup> که ژور دوزی نامیده می شود است. این پیشرفت حتی برای توابع درجه دوم هم به این شکل است و می توان آن را با مقیاس بندی مجدد متغیرها بهبود بخشید.

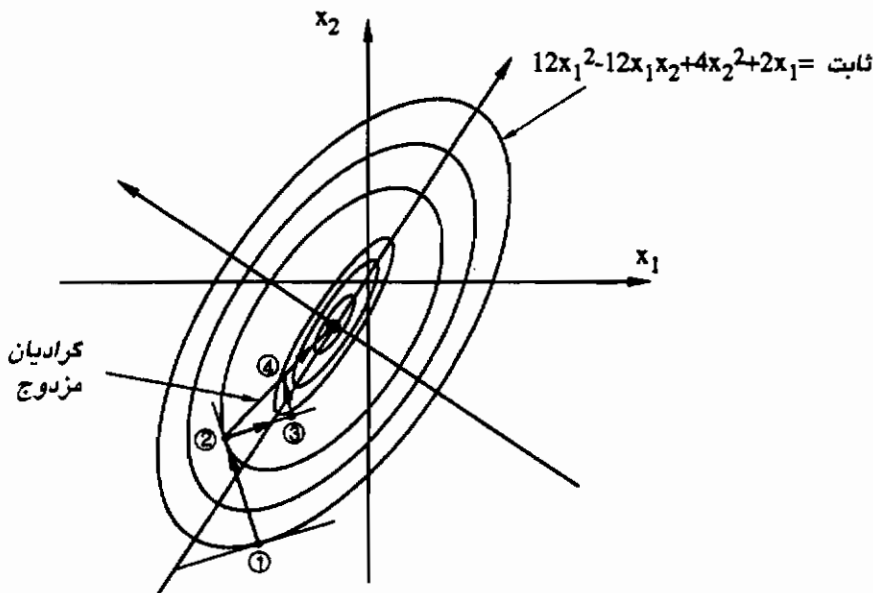
## مثال ۴.۲.۲

مسأله تیر یکسر گیردار که در مثال قبلی مطرح شد این عملکرد را به شکل روشنی نشان می دهد. هنگامی که روش تندترین کاهش برای این مسأله به کار رود، برای نقاط شروع اولیه مشخصی مانند آنچه در شکل ۴.۲.۳ نشان داده شده عملکردی ژوردوزی مانند دارد. اما یک تبدیل ساده متغیرها برای بهبود بخشیدن مقیاس بندی متغیرها سبب می شود که روش تندترین کاهش تنها در یک گام به مینیمم همگرا شود. به عنوان مثال، تبدیل زیر را در نظر بگیرید.

$$y_1 = (x_1 - \frac{1}{2}x_2), \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}x_2. \quad (4.2.33)$$

1) Zigzag

بخش ۴.۲: مینیمم سازی توابع چند متغیره ۱۸۱



شکل ۴.۲.۳ ترازهای تابع انرژی پتانسیل تیریکسر گیردار

اکنون تابع  $f$  را می شود بر حسب متغیرهای جدید  $y_1$  و  $y_2$  به شکل زیر نوشت:

$$f(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 + \frac{1}{6}(y_1 + \sqrt{3}y_2). \quad (۴.۲.۳۴)$$

در نتیجه، مقیاس بندی و حذف جملات ضرب برداری، عدد شرطی هسیان  $f$  واحد می شود. ترازهای تابع  $f$  در صفحه  $y_1 - y_2$  به شکل دایره اند. با شروع از هر نقطه، اختیاری  $y_0$  و به کار بردن روش تندترین کاهش داریم:

$$y_1 = y_0 + \alpha \left\{ \begin{array}{l} 2y_{10} + \frac{1}{6} \\ 2y_{20} + \frac{\sqrt{3}}{6} \end{array} \right\}. \quad (۴.۲.۳۵)$$

به آسانی می توان نشان داد که مقدار  $\alpha^*$  که  $f$  را مینیمم می کند برابر با ۰.۵ است. بنابراین،

$$y_1 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1}{12} \\ \frac{-\sqrt{3}}{12} \end{array} \right\},$$

که در آن گرادیان  $f$  صفر است، که نشانگر مینیمم بودن آن نقطه است. مقادیر متناظر متغیرهای

اصلی  $x_1^*$  و  $x_2^*$  به ترتیب عبارت است از  $-1/3$  و  $-1/2$ . این توضیح ساده به روشنی تأثیر مقیاس بندی را روی همگرایی الگوریتم تندترین کاهش به مینیمم یک تابع در  $R^n$  نشان می دهد. می توان نشان داد [6] که روش تندترین کاهش در غیاب یک مقیاس بندی مناسب تنها نرخ همگرایی خطی دارد. . . .

متأسفانه در بیشتر مینیمم سازی های توابع چند متغیره با استفاده از الگوریتم تندترین کاهش، بدست آوردن تبدیل مقیاس بندی مناسب برای یک شکل درجه دوم کلی در  $R^n$  که به یک همگرایی یک گامی به مینیمم بینجامد کار ساده ای نیست. این کار به محاسبه ماتریس هسیان و سپس یک تحلیل مقدار ویژه ماتریس بر هزینه نیاز دارد. بنابراین، ناگزیر هستیم که برای همگرایی سریع به مینیمم برای یک شکل درجه دوم به جایگزینهای دیگر روی آوریم. یکی از این جایگزینها با مینیمم سازی در امتداد یک مجموعه از جهت های گرادیان مزدوج است که یک خاصیت پایانی درجه دوم را تضمین می کند. هستنس و استیفل<sup>۱</sup> [12] و پس از آنها فلتچر و ریوز<sup>۲</sup> [13] چنان الگوریتمهایی را ارائه کردند که در ادامه مطرح می شوند.

الگوریتم گرادیان مزدوج فلتچر-ریوز. این الگوریتم از یک نقطه اولیه  $x_0$  شروع می شود و ابتدا  $f$  را در امتداد جهت بیشترین کاهش،  $s_0 = -\nabla f(x_0) = g_0$ ، مینیمم می کند تا نقطه جدید چرخه،  $x_1$ ، بدست آید. جهت برای چرخه بعدی،  $s_1$ ، باید چنان ساخته شود که  $Q$  مزدوج بر  $s_0$  باشد در حالی که  $Q$  هسیان تابع درجه دوم  $f$  است. آن گاه تابع در امتداد  $s_1$  مینیمم می شود تا نقطه جدید چرخه،  $x_2$ ، بدست آید. جهت بعدی  $s_2$  از  $x_2$  چنان ساخته می شود که  $Q$  مزدوج بر جهت های  $s_0$  و  $s_1$  باشد، و فرایند تا زمانی که به مینیمم همگرا شود ادامه می یابد. به سبب اتکای قضیه پاول بر جهت های مزدوج برای توابع درجه دوم، در پایان مینیمم سازی تابع  $f$  در امتداد جهت مزدوج  $s_{n-1}$  همگرایی به مینیمم از جنبه نظری تضمین می شود. برای توابعی که درجه دوم نیستند، مزدوج بودن جهت های  $s_i, i = 1, \dots, n$  معنی خود را از دست می دهد زیرا هسیان توابع دیگر یک ماتریس ثابت نیستند. با این همه، استفاده از این الگوریتم برای توابع غیر درجه دوم معمول شده است. از آن جا که برای توابع غیر درجه دوم همگرایی به مینیمم بندرت در  $n$  گام یا کمتر اتفاق می افتد، الگوریتم بعد از هر  $n$  گام دوباره شروع می شود. گامهای اساسی الگوریتم در  $(k+1)$  امین چرخه به شکل زیر است:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_{k+1} s_k. \quad ۱$$

چنان بدست می آید که  $\alpha_{k+1}$

بخش ۴.۲: مینیمم سازی توابع چند متغیره ۱۸۳

$$\frac{df(\alpha_{k+1})}{d\alpha_{k+1}} = 0. \quad (4.2.36)$$

۲. اگر  $k = 0$  است  $\mathbf{s}_k = \mathbf{g}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$  قرار دهید؛ و اگر  $k > 0$  است  $\mathbf{s}_k = \mathbf{g}_k + \beta_k \mathbf{s}_{k-1}$  قرار دهید در حالی که

$$\beta_k = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}, \quad \mathbf{g}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k). \quad (4.2.37)$$

۳. اگر  $\|\mathbf{g}_{k+1}\|$  یا  $|f(\mathbf{x}_{k+1}) - f(\mathbf{x}_k)|$  به اندازه کافی کوچک است، آن گاه متوقف شده دیگر ادامه ندهید. در غیر این صورت

۴. اگر  $k < n$  است به گام ۱ بروید، در غیر این صورت دوباره شروع کنید.

### مثال ۴.۲.۳

اثر بخشی این روش را در مسأله تیر یکسر گیردار که در آن تابع

$$f = 12x_1^2 + 4x_2^2 - 12x_1x_2 + 2x_1,$$

را با شروع از نقطه طراحی اولیه  $\mathbf{x}_0^T = (-1, -2)$  مینیمم می کنیم، نشان خواهیم داد. جهت حرکت اولیه از گرادیان محاسبه می شود

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \left\{ \begin{array}{c} 24x_1 - 12x_2 + 2 \\ 8x_2 - 12x_1 \end{array} \right\}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0},$$

$$\mathbf{s}_0 = -\nabla f(\mathbf{x}_0) = \left\{ \begin{array}{c} -2 \\ 4 \end{array} \right\},$$

و در پایان اولین گام داریم:

$$\mathbf{x}_1 = \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array} \right\} + \alpha_1 \left\{ \begin{array}{c} -2 \\ 4 \end{array} \right\},$$

$$f(\alpha_1) = 12(-1 - 2\alpha_1)^2 + 4(-1 + 4\alpha_1)^2 - 12(-1 - 2\alpha_1)(-2 + 4\alpha_1) + 2(-1 - 2\alpha_1)$$

مقدار  $\alpha_1$  که در آن تابع  $f$  مینیمم است از شرط  $df/d\alpha_1 = 0$  بدست می آید و عبارت است از

$\alpha_1 = 0.048077$ . نقطه' طراحی جدید و گرادیان در آن نقطه عبارتند از:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{Bmatrix} -1.0961 \\ -1.8077 \end{Bmatrix}, \quad \text{و} \quad \nabla f(\mathbf{x}_1) = \begin{Bmatrix} -2.6154 \\ -1.3077 \end{Bmatrix}.$$

سپس،  $\mathbf{s}_1 = -\nabla f(\mathbf{x}_1) + \beta_1 \mathbf{s}_0$  قرار دهید که  $\beta_1$  از معادله' (۴.۲.۳۷) بدست می آید و عبارت است از:

$$\beta_1 = \frac{(-2.6154)^2 + (-1.3077)^2}{(-2)^2 + (4)^2} = 0.4275,$$

جهت حرکت جدید عبارت است از:

$$\mathbf{s}_1 = -\begin{Bmatrix} -2.6154 \\ -1.3077 \end{Bmatrix} + 0.4275 \begin{Bmatrix} -2 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.76036 \\ 3.0178 \end{Bmatrix},$$

و

$$\mathbf{x}_2 = \begin{Bmatrix} -1.0961 \\ -1.8077 \end{Bmatrix} + \alpha_2 \begin{Bmatrix} 1.76036 \\ 3.0178 \end{Bmatrix}.$$

دوباره  $df(\alpha_2)/d(\alpha_2) = 0$  قرار داده و  $\alpha_2 = 0.4334$  بدست می آوریم

$$\mathbf{x}_2 = \begin{Bmatrix} -0.3334 \\ -0.50 \end{Bmatrix}, \quad \text{و} \quad \nabla f(\mathbf{x}_2) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

و در نهایت، چون

$$\begin{Bmatrix} -2 \\ 4 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.76036 \\ 3.0178 \end{Bmatrix} \simeq 0.$$

$Q$  مزدوج بودن دو جهت  $\mathbf{s}_1$  و  $\mathbf{s}_0$  را نشان داده ایم. فرایند مینیم سازی با استفاده از این روش در شکل

(۴.۲.۳) تشریح شده است. • • •

فن گرادیان مزدوج دوباره شروع شده' بیل<sup>۱</sup>. در مینیم سازی توابع غیر درجه دوم با استفاده از روش گرادیان مزدوج، شروع دوباره' روش بعد از  $n$  گام یک راهبرد خوب نیست. به نظر می رسد که چنین راهبردی به مشخصه' غیر خطی بودن تابعی که مینیم می شود حساسیتی ندارد. بیل [14] و بعد از او

## بخش ۴.۲: مینیمم سازی توابع چند متغیره ۱۸۵

پاول [15] فنون شروع دوباره ای را پیشنهاد کردند که در تصمیم زمان شروع دوباره الگوریتم، غیر خطی بودن تابع دخالت دارد. تجربه های عددی در مینیمم سازی توابع کلی مختلف به الگوریتم زیر که توسط پاول ارائه شد انجامید.

۱. با  $x_0$  داده شده،  $s_0$  را به عنوان جهت تندترین کاهش تعریف می کنیم،

$$s_0 = -\nabla f(x_0) = g_0,$$

و کار تکرار (چرخه) را با افزایش شمارنده  $k$  شروع کنید.

۲. برای  $k \geq 1$  جهت  $s_k$  از رابطه بیل [14]

$$s_k = -g_k + \beta_k s_{k-1} + \gamma_k s_t, \quad \text{و} \quad g_k = -\nabla f(x_k), \quad (4.2.38)$$

تعریف می شود که در آن

$$\beta_k = \frac{g_k^T [g_k - g_{k-1}]}{s_{k-1}^T [g_k - g_{k-1}]}, \quad (4.2.39)$$

و

$$\gamma_k = \frac{g_k^T [g_{t+1} - g_t]}{s_t^T [g_{t+1} - g_t]}, \quad \text{اگر} \quad k > t+1, \quad (4.2.40)$$

$$\gamma_k = 0, \quad \text{اگر} \quad k = t+1. \quad (4.2.41)$$

۳. برای  $k \geq 1$  نامعادله زیر را آزمایش کنید

$$|g_{k-1}^T g_k| \geq 0.2 \|g_k\|^2. \quad (4.2.42)$$

اگر این نامعادله برقرار است، آن گاه آن را به عنوان نشانه ای که تعامد بین  $g_k$  و  $g_{k-1}$  به اندازه کافی برای شروع دوباره از بین رفته در نظر می گیریم. بر این اساس، دوباره با  $t = k - 1$  جایگزین می شود تا شروع دوباره را نشان دهد.

۴. برای  $k > t+1$  نیز جهت  $s_k$  آزمایش می شود تا یک گرادیان به اندازه کافی بزرگ تضمین



شود. این آزمایش توسط نامعادله<sup>۱</sup>

$$-1.2\|g_k\|^2 \leq s_k^T g_k \leq -0.8\|g_k\|^2. \quad (4.2.43)$$

انجام می شود. اگر این نامعادلات برآورده نشود، الگوریتم با قرار دادن  $t = k - 1$  دوباره شروع می شود.

۵. در نهایت، اگر  $t \geq n - k$  باشد نیز مانند حالت روش فلتچر-ریوز، الگوریتم با قرار دادن  $t = k - 1$  دوباره شروع می شود.

۶. اگر  $\|g_{k-1}\|$  یا  $|f(x_{k+1}) - f(x_k)|$  به اندازه کافی کوچک باشند فرایند پایان می یابد. اگر آنها کوچک نباشند، به  $k$  یک نمو افزوده شده و فرایند با رفتن به گام ۲ تکرار می شود.

پاول [15] اثر بخشی فرایند شروع دوباره را با استفاده از الگوریتم اساسی بیل به تفصیل روی مسائل متنوعی بررسی کرده است. این بررسیها به روشنی فوق العاده بودن روش جدید بر الگوریتم فلتچر-ریوز و پولک-ریبیری<sup>۱</sup> [16] را بازگو می کند. تنها نقص این الگوریتم جدید این است که حافظه مورد نیاز کمی افزایش می یابد زیرا بردارهای  $s_i$  و  $(g_{i+1} - g_i)$  بعد از شروع دوباره باید ذخیره شوند. بهبود سازی بسیار بهتر اخیر برای الگوریتمهای نوع گرادیان مزدوج مرتبه اول [17, 18] عبارت از وارد کردن طرحهای پیش شرط برای بهبود بخشیدن به نرخ همگرایی است.

### ۴. ۲. ۳ روشهای مرتبه دوم

قدیمی ترین روش مرتبه دوم برای مینیم سازی یک تابع چند متغیره غیر خطی در  $R^n$  روش نیوتن است. انگیزه روش نیوتن مانند انگیزه روش تندترین کاهش است. در رسیدن به جهت تندترین کاهش،  $s$ ، مشتقات سوئی معادله (۴.۲.۲۷) را نسبت به این شرط که نرم اقلیدسی  $s$  واحد باشد مینیم کردیم، معادله (۴.۲.۲۸). با این وجود، نرم اقلیدسی انحناى سطح را در نظر نمی گیرد. بنابراین، انگیزه ای برای تعریف یک نرم دیگر یا سنجشی از سطح به وجود می آید. بر این اساس، مسأله به شکل یافتن جهت  $s$  که

$$\nabla f^T s = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} s_i, \quad (4.2.44)$$

را مشروط به

$$\mathbf{s}^T \mathbf{Q} \mathbf{s} = 1. \quad (4.2.45)$$

مینیمم کند خواهد بود. حل این مسأله توسط جهت نیوتن (به تمرین ۶ مراجعه کنید) بدست می آید که یک عدد ضرب شونده است، یعنی:

$$\mathbf{s} = -\mathbf{Q}^{-1} \nabla f, \quad (4.2.46)$$

در حالی که  $\mathbf{Q}$  هسیان تابع هدف است. شکل کلی معادله به هنگام روش نیوتن برای مینیمم سازی یک تابع در  $\mathbf{R}^n$  عبارت است از

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_{k+1} \mathbf{Q}_k^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k), \quad (4.2.47)$$

در حالی که  $\alpha_{k+1}$  با مینیمم سازی  $f$  در امتداد جهت نیوتن بدست می آید. برای  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ، معادله (۴.۲.۴۷) به جواب تندترین کاهش می انجامد، زیرا نرم معادله (۴.۲.۴۵) نرم اقلیدسی می شود. برای تابع درجه دوم می توان نشان داد که معادله به هنگام با  $\alpha = 1$  در یک گام بدون اعتنا به نقطه شروع  $\mathbf{x}_0$  به جواب بهین

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0 - [\mathbf{Q}(\mathbf{x}_0)]^{-1} [\nabla f(\mathbf{x}_0)], \quad (4.2.48)$$

می رسد.

روش نیوتن را نیز می توان نشان داد که نرخ همگرایی درجه دوم دارد (مثال ۴ یا ۸ را ببینید)، اما عیب اساسی روش نیاز داشتن به ارزیابی هسیان و آن گاه حل دستگاه معادلات

$$\mathbf{Q} \mathbf{s} = -\nabla f \quad (4.2.49)$$

برای بدست آوردن بردار جهت  $\mathbf{s}$  است. در هر چرخه (اگر  $\mathbf{Q}$  غیر لاغر باشد)، روش نیوتن شامل محاسبه  $n(n+1)/2$  درایه از ماتریس متقارن  $\mathbf{Q}$ ، و  $n^3$  عمل برای بدست آوردن  $\mathbf{s}$  از جواب معادلات (۴.۲.۴۹) است. این جنبه از روش نیوتن است که به تدوین روشهایی انجامیده که شبه نیوتن یا متغیر متریک نامیده می شوند و از اطلاعات گرادیان برای تقریب ماتریس هسیان یا وارون آن استفاده می کنند.

الگوریتمهای شبه نیوتن یا متغیر متریک. بسط سری تیلور گرادیان  $f$  حول  $x_{k+1}$  را در نظر بگیرید.

$$\nabla f(x_{k+1}) \simeq \nabla f(x_k) + Q(x_{k+1} - x_k), \quad (4.2.50)$$

در حالی که  $Q$  هسیان واقعی تابع  $f$  است. فرض می کنیم  $A_k (A_k \equiv A(x_k))$  تقریب هسیان در  $k$ امین چرخه باشد، معادله (۴.۲.۵۰) را می شود به شکل مختصر زیر نوشت:

$$y_k = A_k p_k, \quad (4.2.51)$$

که در آن

$$y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k), \quad \text{و} \quad p_k = x_{k+1} - x_k, \quad (4.2.52)$$

به همین ترتیب، جواب معادله (۴.۲.۵۱) برای  $p_k$  را می توان به شکل زیر نوشت:

$$B_{k+1} y_k = p_k, \quad (4.2.53)$$

که  $B_{k+1}$  یک تقریب برای وارون هسیان  $Q$  است. اگر  $B_{k+1}$  قرار است در نهایت به عنوان  $Q^{-1}$  باشد آن گاه  $B_{k+1} A_k = I$ . معادله (۴.۲.۵۳) به عنوان رابطه 'شبه نیوتن یا سکانت'<sup>۱</sup> معروف است. اساس همه روشهای متغیر متریک یا شبه نیوتن عبارت از این است که، رابطه ای که ماتریس  $A_k$  یا وارونش  $B_k$  را بهنگام می کند باید معادله (۴.۲.۵۳) را برآورده کرده و افزون بر آن، خواص تقارن و معین مثبت بودن را حفظ کنند. به سخن دیگر، اگر  $A_k$  یا  $B_k$  معین مثبت باشند آن گاه  $x_{k+1}$  یا  $B_{k+1}$  باید این چنین باشند. یک الگوریتم متغیر متریک نمونه با یک وارون هسیان بهنگام را می شود به شکل زیر بیان کرد

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_{k+1} s_k, \quad (4.2.54)$$

در حالی که

$$s_k = -B_k \nabla f(x_k), \quad (4.2.55)$$

که در آن  $B_k$  یک ماتریس معین مثبت متقارن است.

بهنگام‌های رتبه یک. در گروه بهنگام‌های رتبه یک، ما بهنگام معروف برویدن<sup>۱</sup> متقارن [19] را برای  $B_{k+1}$  داریم که عبارت است از:

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(p_k - B_k y_k)(p_k - B_k y_k)^T}{(p_k - B_k y_k)^T y_k} \quad (۴.۲.۵۶)$$

برای شروع الگوریتم، یک ماتریس متقارن معین مثبت اولیه<sup>۲</sup>  $B_0$  فرض می شود و نقطه بعدی  $x_1$  از معادله (۴.۲.۵۴) محاسبه می گردد. آن گاه برای محاسبه ماتریس هسیان وارون تقریبی بهنگام از معادله (۴.۲.۵۶) استفاده می شود. به راحتی می توان نشان داد که ستونهای ماتریس دوم در طرف راست معادله (۴.۲.۵۶) حاصلضرب یکدیگرند. به سخن دیگر، ماتریس بهنگام یک ستون مستقل تنها دارد، و بنابراین از رتبه یک است. افزون بر این، اگر  $B_k$  متقارن باشد آن گاه  $B_{k+1}$  نیز متقارن خواهد بود. با این همه، معین مثبت باقی ماندن  $B_{k+1}$  اگر  $B_k$  هم معین مثبت باشد تضمین نمی شود. این حقیقت می تواند به شکست الگوریتم به ویژه هنگامی که برای توابع غیر درجه دوم کلی به کار می رود بینجامد. برویدن [19] برای انتخاب طول گام  $\alpha_{k+1}$  در معادله (۴.۲.۵۴) سه پیشنهاد داد (i) یک جست و جوی خط دقیق، (ii)  $\alpha_{k+1} = 1$  برای تمامی گامها، یا (iii) انتخاب  $\alpha_{k+1}$  به شکلی که  $\|\nabla f\|$  مینیمم شود یا کاهش یابد.

بدون توجه به نوع جست و جوی خط به کار گرفته شده، بهنگام برویدن یک خاصیت پایانی درجه دوم را تضمین می کند. اما به سبب فقدان توانمندی مینیمم سازی توابع غیر درجه دوم کلی، بهنگام‌های رتبه یک با بهنگام‌های رتبه دو جایگزین می شوند که هم تقارن و هم معین مثبت بودن ماتریس‌های بهنگام را تضمین می کنند.

بهنگام‌های رتبه دو. بهنگام‌های رتبه دو برای تقریب وارون هسیان را می شود به طور کلی به شکل زیر نوشت:

$$B_{k+1} = \left[ B_k - \frac{B_k y_k y_k^T B_k}{y_k^T B_k y_k} + \theta_k v_k v_k^T \right] \rho_k + \frac{p_k p_k^T}{p_k^T y_k}, \quad (۴.۲.۵۷)$$

در حالی که

$$v_k = (y_k^T B_k y_k)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{p_k}{p_k^T y_k} - \frac{B_k y_k}{y_k^T B_k y_k} \right], \quad (4.2.58)$$

و  $\theta_k$  و  $\rho_k$  پارامترهای اسکالری هستند که به تناسب انتخاب می شوند. بهنگام های ارائه شده در معادله های (4.2.57) و (4.2.58) یک زیر مجموعه از بهنگام های خانواده 'هانگ' [20] است که  $B_{k+1} y_k = p_k$  را برای هر انتخاب  $\theta_k$  و  $\rho_k$  تضمین می کند. اگر برای تمامی  $k$  ها  $\theta_k = 0$  و  $\rho_k = 1$  قرار دهیم، رابطه 'بهنگام دیویدان - فلتچر - پاول' (DFP) [21,22] زیر را بدست می آوریم:

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k y_k y_k^T B_k}{y_k^T B_k y_k} + \frac{p_k p_k^T}{p_k^T y_k}. \quad (4.2.59)$$

رابطه 'بهنگام دی اف پی' (DFP) معین مثبت بودن و تقارن ماتریس  $B_k$  را تضمین می کند، و چند خاصیت جالب دیگر نیز دارد. هنگامی که آن رابطه برای مینیم سازی توابع درجه دوم استفاده می شود، جهت های  $Q$  مزدوج به وجود می آورند و، بنابراین، در چرخه 'ام  $n$ ام  $B_n$  و ارون دقیق هسیان  $Q$  می شود. پس، هم ویژگی الگوریتم گرادیان مزدوج و هم ویژگی الگوریتم نوع نیوتن را داراست. الگوریتم دی اف پی (DFP) را می توان بدون یک جست و جوی خط دقیق در بدست آوردن  $\alpha_{k+1}$  در معادله ' (4.2.54) استفاده کرد. ولی، طول گام باید کاهشی در مقدار تابع را تضمین کند، و باید چنان باشد که  $p_k^T y_k > 0$  تا این که معین مثبت بودن  $B_k$  از بین نرود. با این همه، با کاهش دقت جست و جوی خط عملکرد الگوریتم نیز تباه می شود [20]. در بیشتر حالتها رابطه 'دی اف پی' (DFP) کاملاً موفقیت آمیز کار می کند. در حالت های خاصی به سبب منفرد شدن  $B_k$  الگوریتم کارایی خود را از دست می دهد. این اشکال باعث شده که یک رابطه 'بهنگام دیگر به طور همزمان توسط برایدن [19]، فلتچر [23]، گلدفارب<sup>۱</sup> [24]، و شنو<sup>۲</sup> [25] تعریف و تدوین شود که به رابطه 'بی اف جی اس' (BFGS) معروف است. این رابطه با قرار دادن  $\theta_k = 1$  و  $\rho_k = 1$  در معادله ' (4.2.57) بدست می آید که عبارت است از:

$$B_{k+1} = B_k + \left[ 1 + \frac{y_k^T B_k y_k}{p_k^T y_k} \right] \frac{p_k p_k^T}{p_k^T y_k} - \frac{p_k y_k^T B_k}{p_k^T y_k} - \frac{B_k y_k p_k^T}{p_k^T y_k}. \quad (4.2.60)$$

معادله (4.2.60) را نیز می توان به شکل مختصرتری نوشت:

$$B_{k+1} = \left[ I - \frac{p_k y_k^T}{p_k^T y_k} \right] B_k \left[ I - \frac{y_k p_k^T}{p_k^T y_k} \right] + \frac{p_k p_k^T}{p_k^T y_k}. \quad (4.2.61)$$

بخش ۴.۲: مینیم سازی توابع چند متغیره ۱۹۱

با استفاده از  $A_k = B_k^{-1}$  و  $A_{k+1} = B_{k+1}^{-1}$  می توان رابطه بالا را تبدیل کرد و به یک بهنگام برای تقریب هسیان رسید. این رابطه بهنگام به شکل زیر بدست می آید:

$$A_{k+1} = A_k - \frac{A_k p_k p_k^T A_k}{p_k^T A_k p_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T p_k}, \quad (4.2.62)$$

که با جایگزینی  $B_k$  با  $A_k$ ، و تعویض  $p_k$  با  $y_k$  شبیه رابطه دی اف پی (DFP) (۴.۲.۵۹) است. بر عکس، اگر هسیان وارون  $B_k$  با رابطه دی اف پی (DFP) بهنگام شود، آن گاه هسیان  $A_k$  بر اساس یک رابطه شبیه به رابطه دی اف پی (DFP) بهنگام می شود. به همین خاطر است که اغلب رابطه بی اف جی اس (BFGS) را مکمل رابطه دی اف پی (DFP) می نامند. تجربه های عددی توسط الگوریتم بی اف جی اس [۲۶] نشان می دهد که نسبت به تمامی الگوریتم های متغیر متریک شناخته شده فوق العاده است. در این جا کاربرد آن را با مینیم سازی تابع انرژی پتانسیل مسأله تریکسر گیردار تشریح خواهیم کرد.

#### مثال ۴.۲.۴

$f(x_1, x_2) = 12x_1^2 + 4x_2^2 - 12x_1x_2 + 2x_1$  را با استفاده از الگوریتم بهنگام بی اف جی اس (BFGS) با جست و جوی خط دقیق و با حدس اولیه  $x_0^T = (-1, -2)$  مینیم کنید. الگوریتم را با یک جست و جوی خط در امتداد جهت تندترین کاهش شروع می کنیم. این کار با فرض  $B_0 = I$  همراه است که متقارن و معین مثبت نیز هست. نقطه بدست آمده قبلاً در مثال (۴.۲.۳) محاسبه شده و عبارت است از

$$x_1 = \begin{Bmatrix} -1.0961 \\ -1.8077 \end{Bmatrix}, \quad \text{و} \quad \nabla f(x_1) = \begin{Bmatrix} -2.6154 \\ -1.3077 \end{Bmatrix}.$$

از معادله (۴.۲.۵۲) داریم:

$$p_0 = \begin{Bmatrix} -1.0961 \\ -1.8077 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0961 \\ 0.1923 \end{Bmatrix},$$

$$y_0 = \begin{Bmatrix} -2.6154 \\ -1.3077 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2 \\ -4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.6154 \\ 2.6923 \end{Bmatrix}.$$

با جایگزینی جملات

$$p_0^T y_0 = (-0.0961)(-4.6154) + (0.1923)(2.6923) = 0.96127,$$

$$p_0 y_0^T = \begin{Bmatrix} -0.0961 \\ 0.1923 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -4.6154 & 2.6923 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.44354 & -0.25873 \\ -0.88754 & 0.51773 \end{bmatrix},$$

در معادله (۴.۲.۶۱) داریم

$$\begin{aligned} B_1 &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{0.96127} \begin{bmatrix} 0.44354 & -0.25873 \\ -0.88754 & 0.51773 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\times \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{0.96127} \begin{bmatrix} 0.44354 & -0.88754 \\ -0.25873 & 0.51773 \end{bmatrix} \right) + \frac{1}{0.96127} \begin{bmatrix} 0.00923 & -0.01848 \\ -0.01848 & 0.03698 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 0.37213 & 0.60225 \\ 0.60225 & 1.10385 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

بعد از آن، از معادله (۴.۲.۵۵) جهت حرکت جدید را محاسبه می کنیم

$$s_1 = - \begin{bmatrix} 0.37213 & 0.60225 \\ 0.60225 & 1.10385 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2.6154 \\ -1.3077 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.7608 \\ 3.0186 \end{Bmatrix},$$

و داریم

$$x_2 = \begin{Bmatrix} -1.0961 \\ -1.8077 \end{Bmatrix} + \alpha_2 \begin{Bmatrix} 1.7608 \\ 3.0186 \end{Bmatrix}.$$

با صفر قرار دادن مشتق  $f(x_2)$  نسبت به  $\alpha_2$  مقدار آن را می یابیم،  $\alpha_2 = 0.4332055$  و

$$x_2 = \begin{Bmatrix} -0.3333 \\ -0.5000 \end{Bmatrix}, \quad \text{و} \quad \nabla f(x_2) \simeq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

این همگرا شدن به جواب دقیق را می رساند. اگر  $B_1$  یک بار دیگر بهنگام شود خواهیم داشت:

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix},$$

که وارون دقیق ماتریس هسیان

$$Q = \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 8 \end{bmatrix}.$$

است. نشان دادن صحت این مطلب را به عهده خوانندگان می گذاریم. همچنین می توان نشان داد که

بخش ۴.۲: مینیمم سازی توابع چند متغیره ۱۹۳

همچنان که انتظار می رود، جهت های  $s_0$  و  $s_1$  مزدوج اند. ...

$Q$  مزدوج بودن جهت های حرکت تنها در توابع 'درجه' دوم معنی پیدا می کند، و برای چنین مسائلی در حالت الگوریتم های متغیر متریک مربوط به خانواده 'هانک' در صورتی این  $Q$  مزدوج تضمین می شود که جست و جوهای خط دقیق باشند. در حقیقت،  $Q$  مزدوج بودن جهت ها برای اطمینان از خاصیت پایانی درجه دوم لازم نیست [26]. این موضوع سبب شد که روش هایی بر اساس روابط دی اف پی (DFP) و بی اف جی اس (BFGS) تدوین شوند که محاسبات پرهزینه جست و جوهای خط دقیق را نداشته باشند. جست و جوهای خط باید چنان باشند که ضمن کاهش مقدار تابع، معین مثبت بودن ماتریسهای  $A_k$  یا  $B_k$  را تضمین کنند. معین مثبت بودن در صورتی تضمین می شود که  $P_k^T y_k > 0$  باشد. برای اطمینان از یک شعاع وسیع از همگرایی برای روش شبه نیوتن، برآورده شدن دو معیار زیر نیز لازم است. ابتدا در گام برداشته شده باید یک کاهش به اندازه کافی بزرگ در تابع  $f$  حاصل شود، دوم، نرخ کاهش  $f$  در جهت  $s_k$  در  $x_{k+1}$  باید کمتر از نرخ کاهش  $f$  در  $x_k$  باشد [26]. درباره این ویژگی باید گفت، بیشتر الگوریتم های با جست و جوهای خط غیر دقیق برآورده شدن دو شرط زیر را ضروری می شمارند.

$$f(x_{k+1}) < f(x_k) + 10^{-4} \alpha s^T \nabla f(x_k), \quad (4.2.63)$$

و

$$\left| \frac{s^T \nabla f(x_{k+1})}{s^T \nabla f(x_k)} \right| < 0.9. \quad (4.2.64)$$

همگرایی الگوریتم بی اف جی اس (BFGS) با این شرایط توسط پاول مطالعه شده است [27]. مطالعه همگرایی مشابهی برای روش گرادیان مزدوج دوباره شروع شده، بیل با همان دو شرط توسط شنو انجام شده است [28].

#### ۴.۲.۴ کاربردهایی در تحلیل

تعدادی از الگوریتم های مینیمم سازی نامقید توابع در  $R^n$  را می توان برای حل دستگاه معادلات خطی یا غیر خطی به کاربرد. در بعضی از حالتها، مانند مسائل تحلیل سازه ای غیر خطی، شرط لازم ایستا بودن انرژی پتانسیل این است که گرادیان آن صفر شود. صفر شدن گرادیان را می توان تعبیر به حل یک



دستگاه معادلات از نوع

$$\nabla f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) = 0, \quad (۴.۲.۶۵)$$

کرد که هسیان  $f$  و جاکوبین<sup>۱</sup>  $g$  مانند هم هستند. در حالتی که مسائل مستقیماً شکل

$$g(\mathbf{x}) = 0, \quad (۴.۲.۶۶)$$

را دارند، دنیس و اشناپل<sup>۲</sup> [6] و دیگران معادله (۴.۲.۶۵) را با مینیم سازی تابع کمترین مربعات غیر خطی

$$f = \frac{1}{2} g^T g. \quad (۴.۲.۶۷)$$

حل می کنند. در این حالت، گرچه هسیان  $f$  و جاکوبین  $g$  یکسان نیست ولی یک تقریب معین مثبت برای هسیان  $f$  که برای بیشتر طرح های مینیم سازی مناسب باشد را می توان به آسانی از جاکوبین  $g$  به وجود آورد [6]. آن گاه مینیم سازی  $f$  بسته به این که مینیم سازی به یک مینیم محلی همگرا بشود یا نشود نه تنها بدمت آمدن موقعیت تعادل پایدار بلکه موقعیت ناپایدار را نیز در بر خواهد داشت. در حالت همگرا شدن به یک مینیم محلی، شروع دوباره مشخص [6]، یا فتون کاهش و نقب زنی [29,30] را می توان برای تحمیل همگرایی به مینیم فراگیر  $f$  که در آن  $\|g\| = 0$  است به کاربرد.

### ۴.۳ روشهای شبه نیوتن تخصصی

#### ۴.۳.۱ بهره برداری از لاغری ماتریسها

بهنگام های رتبه یک و دو که در بخش قبلی بحث کردیم، به بهنگام های متقارن می انجامند که لزوماً لاغر نیستند. به سخن دیگر، بهنگام های هسیان یا وارون هسیان به ماتریسهای متقارنی می انجامند که به شکل فشرده ای پُرند. در بیشتر مسائل تحلیل سازه ای که از روش اجزای محدود استفاده می شود، این که هسیان انرژی پتانسیل (ماتریس سختی تانژانتی) لاغر است بدیهی است. این موضوع ممکن است در

1) Jacobian      2) Denis and Schnabel

بخش ۴.۳: روش های شبه نیوتن تخصصی ۱۹۵

بسیاری از مسائل بهینه سازی سازه ها نیز صادق باشد. برای چنین مجموعه های لاغر در حل مدل های اجزای محدود از عامل گیری  $LDL^T$  سه گانه استفاده می شود. بنابراین بهنگام سازی هسیان یا وارون هسیان که پیشتر بحث شدند برای حل مسائل تحلیل سازه ای مقیاس بزرگ که هسیانهای لاغر دارند مناسب نیستند.

در کاربرد روش بی اف جی اس (BFGS) در حل مسائل غیرخطی مقیاس بزرگ تحلیل سازه ای متعین و استرنج<sup>۱</sup> یک راه جایگزین برای پیاده سازی روش پیشنهاد کردند که برای مسائل لاغر بزرگ مناسب است. در این راهکار بردارهای

$$p_k = x_{k+1} - x_k, \quad (4.3.1)$$

و

$$y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k), \quad (4.3.2)$$

ذخیره شده و دوباره برای محاسبه جهتهای جست و جوی جدید معرفی می شوند. بعد از پنج تاده چرخه و با استفاده از بهنگام های بی اف جی اس (BFGS)، ماتریس سختی دوباره محاسبه می شود و اطلاعات بهنگام پاك می شود.

بهنگام های لاغر برای مسائل مقیاس بزرگ شاید بتوان گفت اولین بار توسط اشوبرت<sup>۲</sup> [32] پیشنهاد شده است که یک بهبود برای روش برایدن [33] ارائه داد که براساس آن سطر نام از هسیان  $A_{k+1}$  با استفاده از

$$A_{k+1}^{(i)} = A_k^{(i)} + \frac{[g_i(x_{k+1}) - (1 - \alpha_k)g_i(x_k)]}{\alpha_k \hat{p}_k^T \hat{p}_k}, \quad (4.3.3)$$

بهنگام می شود،  $\hat{p}_k$  از  $p_k$  با صفر قرار دادن مؤلفه های مربوط به صفرهای معلوم  $A_k^{(i)}$  بدست می آید. با این همه روش یاد شده این عیب را دارد که نمی تواند تقارن ماتریس حاصل را حفظ کند، حتی اگر با یک ماتریس متقارن معین مثبت شروع کرده باشد. این عیب نه تنها باعث افزایش اندکی در میزان حافظه مورد نیاز می شود بلکه نیاز به داشتن یک وسیله برای حل معادله های خطی لاغر را ضروری می سازد. اخیراً

1) Matthies and Strang

2) Schubert

توینت<sup>۱</sup> [34] و شنو [35] الگوریتمی پیشنهاد داده اند که رابطه 'بهنگامی را برای ماتریسهای متقارن می یابد که شرایط لاغری مشخصی دارند. بهنگام با محاسبه 'کوچکترین تصحیح نسبت به قیدهای خطی بدست می آید که شامل شرایط لاغری است. این کار شامل یک دستگاه معادلات با یک الگوی لاغری مانند هسیان است.

کورتیس، پاول و رید<sup>۲</sup> [36] و پاول و توینت [37] یک راهبرد تفاضل محدود برای ارزیابی مستقیم هسیان های لاغر توابع پیشنهاد داده اند. افزون بر استفاده از عملیات تفاضل محدود، آنها از مفاهیم نظریه 'گرافها که تعداد ارزیابی گرادیانها برای محاسبه 'چند درایه' غیر صفر هسیان لاغر را مینیمم می کند استفاده کردند. با استفاده از این راهبردها، می توانیم از لاغری نه تنها در محاسبه 'جهت نیوتن بلکه در تشکیل هسیان نیز استفاده کنیم [38,39].

راهبرد کورتیس-پاول-رید (CPR) از لاغری استفاده می کند ولی از تقارن هسیان بهره ای نمی جوید. این راهبرد ستونهای هسیان را به گروههایی تقسیم می کند که در هر گروه عدد سطر درایه های مجهول بردارهای ستونی جملگی متفاوتند. بعد از تشکیل اولین گروه، گروههای دیگر به ترتیب با اعمال راهبرد مشابهی به ستونهایی که در گروههای قبلی نبودند تشکیل می شوند. تعداد چنین گروههایی برای ماتریسهای لاغریا کراندار در مقایسه با  $n$  معمولاً بسیار کم است. برای ارزیابی هسیان  $f$  در  $x_0$ ، گرادیان  $f$  در  $x_0$  را ارزیابی می کنیم. بعد از این ارزیابی اولیه گرادیان، فقط به تعداد گروهها به ارزیابی گرادیان نیاز خواهد بود تا تمامی درایه های غیر صفر هسیان با استفاده از تقریب تفاضل پیشرو ارزیابی گردد. بنابراین:

$$a_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{g_i(x_0 + h_j e_j) - g_i(x_0)}{h_j}, \quad (4.3.4)$$

که در آن  $e_j$  بردار مختصات زام و  $h_j$  یک اندازه گام مناسب است. هر اندازه گامی را می شود چنان تنظیم کرد که بزرگترین نسبت خطای گرد کردن به خطای قطع کردن برای هر ستون از هسیان داخل یک محدوده' مشخص بیفتد. در هر حال، چنین تنظیمی از اندازه' گام به تعداد زیادی ارزیابی گرادیان نیاز دارد. بنابراین، برای اقتصادی کردن تعداد ارزیابی های گرادیان، اندازه' گامها را اجازه نمی دهند که از محدوده'

$$[\max(\epsilon |x_j|, \eta h_{uj}), h_{uj}], \quad (4.3.5)$$

بخش ۴.۳: روش های شبه نیوتن تخصصی ۱۹۷

خارج شوند، در حالی که  $\epsilon$  بزرگترین گرد کردن نسبی در یک عمل منفرد،  $\eta$  دقت ماشین نسبی، و  $h_{uz}$  کران بالایی  $h_z$  می باشد [36].

پاول و تونیت [37] راهبرد سی پی آر (CPR) را برای استفاده از تقارن هسیان گسترش دادند. آنها دو روش پیشنهاد کردند، که یکی از آنها روش جایگذاری نامیده می شود. در این روش، ابتدا راهبرد سی پی آر (CPR) به مثلث پایینی  $L$  هسیان متقارن  $A$  اعمال می شود. از آن جا که تمامی درایه های  $A$  که با این روش محاسبه می شوند، صحیح نخواهد بود، درایه های ناصحیح با طرح جایگذاری پسین تصحیح می شوند. جزئیات این طرح جایگذاری پسین را می توان در مرجع [37] یافت.

به نظر می رسد راهبرد پاول - تونیت (PT) برای حدس مستقیم هسیان های لاغر جایگزین بسیار بهتری برای الگوریتم بهنگام لاغر تونیت است [38]. یکی از معایب اصلی الگوریتم بهنگام تونیت این است که حتی اگر تقریب هسیان اولیه معین مثبت باشد، معین مثبت باقی ماندن تقریب هسیان بهنگام شده تضمین نمی شود.

#### ۲. ۳. ۴ متناسب کردن هسیانها برای روشهای شبه نیوتن

در مینیم سازی تابع  $f$  با استفاده از روش نیوتن گسسته یا الگوریتم بهنگام تونیت باید مطمئن شویم که تقریب هسیان معین مثبت است. اگر چنین نباشد، آن گاه برای این که جهت نیوتن جهت کاهش باشد تضمینی وجود ندارد. برای اجبار یک هسیان نامعین به شکل معین مثبت راهبردهای متعددی وجود دارد. برجسته ترین این راهبردها، راهبردی است که توسط گیل و ماری<sup>۱</sup> پیشنهاد شده [40]. مؤثرترین ویژگی این راهبرد این است که این اجبار هسیان هنگام تجزیه  $LDL^T$  برای محاسبه جهت نیوتن انجام می شود. درایه های قطری ماتریس  $D$  را مجبور می کنند که به اندازه کافی مثبت باشند تا مشکلات عددی پیش نیاید، در حالی که درایه های غیر قطری  $LD^{-1/2}$  با یک کمیت، که برای تضمین معین مثبت بودن ماتریس حاصل در نظر گرفته شده، محدود می شوند. چون این بهبود ماتریس هنگام تجزیه  $LDL^T$  انجام می شود، راهبرد محاسبه جهت کاهش نیوتن مستلزم مقدار زیادی محاسبه اضافی نخواهد بود.

1) Gill and Murray

## ۳.۳.۴ همگرایی فراگیر ساختن روشهای شبه نیوتن

به خوبی روشن است که با وجود یک تقریب هسیان معین مثبت، روش نیوتن برای بعضی از نقاط شروع می تواند و اگر باشد. جایگذاری پسینی استاندارد در امتداد جهت نیوتن با انتخاب طول گامهای کوتاهتر می تواند به یک مینیمم همگرا شود. اما، جایگذاری پسینی در امتداد جهت نیوتن استفاده از مدل درجه دوم  $n$  بعدی تابع  $f$  را مانع می شود. دنیس و اشناپل<sup>۱</sup> [7] راهبردی پیشنهاد کرده اند که راهبرد پاسگی دو برابر نامیده می شود و برای انتخاب یک جهت جدید از مدل درجه دوم  $n$  بعدی استفاده می کند که از یک ترکیب خطی تندترین کاهش و جهت نیوتن بدست آمده است. این جهت جدید تابعی از شعاع ناحیه مورد اعتماد است که در آن مدل درجه دوم  $n$  بعدی تابع، تابع اصلی را به خوبی تقریب می زند. راهبرد پاسگی دو برابر نه تنها روش نیوتن را همگرای فراگیر (یعنی بدون ارتباط با نقطه شروع به مینیمم تابع همگرا شدن) می سازد، بلکه آن را به میزان چشمگیری برای مسائل معینی که به شکل ضعیفی مقیاس بندی شده اند کارا می سازد. به خوانندگان توصیه می شود برای اطلاع از جزئیات بیشتر درباره راهبرد پاسگی دو برابر به مرجع ۷ مراجعه نمایند. تلاشهای جدیدی برای توسعه دامنه همگرایی روش شبه نیوتن یا همگرایی فراگیر ساختن آن برای گروه بزرگتری از مسائل انجام گرفته که در مراجع [41,42] مورد مطالعه قرار گرفته اند.

## ۴.۴ الگوریتمهای جست و جوی احتمالاتی

عیب مشترک بیشتر الگوریتمهایی که تاکنون مورد بحث قرار گرفتند عدم توانایی آنها در تمیز دادن مینیمم فراگیر از محلی است. بیشتر مسائل طراحی سازه ها بیش از یک مینیمم محلی دارند، و بسته به نقطه شروع، این الگوریتمها به یکی از این مینیمم های محلی همگرا می شوند. ساده ترین راه برای بدست آوردن یک جواب محلی بهتر این است که بهینه سازی از نقاط اولیه ای که به شکل اتفاقی انتخاب شده اند، دوباره انجام شود تا امکان جوابهای دیگر بررسی شود. با این وجود، برای مسائلی که تعداد زیادی متغیر دارند امکان دست نیافتن به مینیمم فراگیر زیاد است مگر آن که تعداد دفعات زیادی بهینه سازی انجام شود که عملی نیست. موضوع بهینه سازی فراگیر زمینه ای است که پژوهش در آن فعال است و الگوریتمهای جدیدی پیشنهاد می شوند و الگوریتمهای قدیمی بهبود می یابند [43-45].

1) Dennis and Schnabel

اگر لازم باشد متغیرهای طراحی مقادیر گسسته داشته باشند، مسأله مینیمم محلی و چگونگی یافتن آن دشوارتر می شود. قبل از هر چیز برای چنین مسائلی فضای طراحی ناپیوسته و نامتصل است، بنابراین اطلاعات مشتق یا بی فایده است و یا تعریف نشده. در درجه دوم، استفاده از متغیرهای گسسته برای متغیرهای طراحی سبب به وجود آمدن مینیممهای چندگانه می شود که مربوط به ترکیبهای مختلف متغیرهاست هر چند که مقدار تابع هدف برای مسأله با متغیرهای پیوسته فقط یک مینیمم داشته باشد. یک راه منطقی برای حل مسائل بهینه سازی گسسته با مینیممهای چندگانه یا استفاده از فنون جست و جوی اتفاقی است که از فضای طراحی برای یافتن مینیمم فراگیر نمونه می گیرد و یا به کارگیری الگوریتمهای نوع شمارشی است. در هر دو حالت، بازدهی فرایند حل با افزایش تعداد متغیرها به شدت کاهش می یابد. اخیراً دو الگوریتم سرد شدن تدریجی شبیه سازی شده و الگوریتمهای ژنتیکی (به ترتیب به مرجع لرهون [46] و گلد برگ [47] مراجعه کنید) ارائه شده اند که به عنوان ابزارهای بسیار مطلوب برای مسائل بهینه سازی که دنبال مینیمم فراگیر هستند مطرحند. افزون بر توانایی یافتن جوابهای نزدیک به فراگیر، این دو الگوریتم ابزارهای توانمندی برای مسائل با متغیرهای طراحی گسسته اند. هر دو الگوریتم بر مبنای مشاهدات پدیده هایی طبیعی اند و در پیاده سازی آنها از فرایند انتخاب اتفاقی استفاده می شود که با تصمیم سازی های احتمالی هدایت می شود. در بخشهای بعدی توضیحات مختصری درباره دو الگوریتم ارائه می شود. کاربرد الگوریتمها در طراحی سازه ها برای مواد مرکب لایه ای در فصل ۱۱ تشریح خواهد شد.

#### ۴.۴.۱ سرد شدن تدریجی شبیه سازی شده

انگیزه تدوین الگوریتم سرد شدن تدریجی شبیه سازی شده مطالعاتی در زمینه مکانیک آماری که درباره تعادل تعداد زیادی از اتمها در جامدات یا مایعات در یک دمای داده شده بحث می کند بوده است. به عنوان مثال هنگام انجماد فلزات یا شکل گیری ساختمان بلوری به چند حالت جامد با ساختمان اتمی داخلی یا بلوری متفاوت که به سطوح انرژی مختلف مربوط می شوند می توان رسید که به نرخ سرد کردن بستگی دارد. اگر مجموعه به سرعت سرد شود، حالت جامد حاصل به احتمال زیاد حاشیه کوچکی از پایداری خواهد داشت زیرا اتمها برای رسیدن به یک حالت انرژی که تنها محلی مینیمم است در ساختمان شبکه موقعیتهای نسبی خواهند داشت. برای رسیدن به پایداری بیشتر، حالت انرژی مینیمم فراگیر،

فرآیند سرد شدن تدریجی انجام می شود که در آن فلز تا یک دمای بالا مجدداً حرارت داده شده و به آرامی سرد می شود تا به اتمها فرصت کافی برای یافتن موقعیتهایی که انرژی پتانسیل حالت یکنواخت را مینیمم کند داده شود. در فرایند سرد شدن تدریجی طبیعی مشاهده می شود که در فاصله زمانی که فلز در یک دمای خاص نگه داشته می شود داشتن سیستمی که به طور موقت قبل از رسیدن به حالت یکنواخت به یک حالت انرژی بالاتر جهش داشته باشد امکان پذیر است. همان طور که در بندهای بعدی شرح داده خواهد شد، این ویژگی فرایند سرد شدن تدریجی است که رسیدن به حالت های انرژی مینیمم فراگیر نزدیک را امکان پذیر می سازد.

یک الگوریتم محاسباتی که فرایند سرد شدن تدریجی را شبیه سازی می کند توسط متروپلیس<sup>۱</sup> و دیگران [48] پیشنهاد شده است که الگوریتم متروپلیس نامیده می شود. در یک دمای  $T$ ، الگوریتم محل یک اتم را به شکل اتفاقی دچار اختلال کرده و میزان تغییر حاصل در انرژی سیستم،  $\Delta E$ ، را محاسبه می کند اگر حالت انرژی جدید از حالت اولیه پایین تر باشد، آن گاه ساختار جدید اتمها پذیرفته می شود. از طرف دیگر اگر  $\Delta E \geq 0$  باشد، حالت اختلالی سبب افزایش انرژی شده، حالت جدید بر اساس یک تصمیم احتمالی اتفاقی ممکن است پذیرفته یا رد شود. احتمال پذیرفته شدن،  $P(\Delta E)$ ، یک حالت انرژی بالاتر به شکل زیر محاسبه می شود

$$P(\Delta E) = e^{\left(\frac{-\Delta E}{k_B T}\right)}, \quad (4.4.1)$$

که در آن  $k_B$  ثابت بولتزمن<sup>۲</sup> است. اگر درجه حرارت سیستم بالا باشد، آن گاه احتمال پذیرش یک حالت انرژی بالاتر نزدیک به یک است. از طرف دیگر، اگر، درجه حرارت نزدیک به صفر باشد، آن گاه احتمال پذیرش بسیار کوچک است.

تصمیم قبول یا رد با انتخاب اتفاقی عددی در بازه  $(0,1)$  و مقایسه آن با  $P(\Delta E)$  صورت می پذیرد. اگر عدد از  $P(\Delta E)$  کمتر باشد، آن گاه حالت اختلالی پذیرفته می شود، اگر عدد از  $P(\Delta E)$  بیشتر باشد، حالت مورد نظر رد می شود. در هر دمایی، انبوهی از ساختارهای اتمی با اختلال اتفاقی موقعیتهای وجود می آیند تا به یک سطح انرژی حالت یکنواختی برسند (که معمولاً به آن تعادل حرارتی می گویند). آن گاه دما کاسته می شود و چرخه دوباره شروع می شود. این گامها در حالی که دما به آهستگی کاهش

## بخش ۴.۴: الگوریتمهای جست و جوی احتمالاتی ۴۰۱

می یابد پی در پی تکرار می شوند تا حالت انرژی مینیمم حاصل شود.

همانندی بین سرد شدن تدریجی شبیه سازی شده و بهینه سازی توابع چند متغیره اخیراً توسط کیرکپاتریک<sup>۱</sup> و دیگران [49]، و کرنی<sup>۲</sup> [50] مورد توجه قرار گرفته است. با جایگزینی حالت انرژی با تابع هدف  $f$ ، و با استفاده از متغیر  $x$  برای ساختار ذرات، می توانیم الگوریتم متروپلیس را در مسائل بهینه سازی به کار ببریم. این روش تنها به مقادیر تابع نیاز دارد. حرکت از یک نقطه  $x$  به نقطه دیگر  $x'$  در فضای طراحی سبب تغییری در تابع هدف،  $\Delta f$ ، می شود. اکنون دمای  $T$  یک پارامتر کنترلی می شود که همگرایی فرایند را تنظیم می کند. عوامل مهمی که بر عملکرد الگوریتم مؤثرند عبارتند از انتخاب مقدار اولیه «دما»،  $T_0$ ، و چگونگی بهنگام کردن آن. افزون بر این، تعداد چرخه های (یا ترکیب های متغیرهای طراحی) مورد نیاز برای رسیدن به «تعادل حرارتی» باید قبل از کاهش  $T$  مشخص شده باشد. این پارامترها را روی هم «زمان بندی سرد شدن» می گویند.

یک نمودار جریانی از الگوریتم سرد شدن تدریجی نمونه در شکل ۴.۴.۱ نشان داده شده است. تعریف زمان بندی سرد شدن با انتخاب دمای اولیه شروع می شود. اگر یک  $T_0$  پایین استفاده شود، احتمال به مینیمم فراگیر رسیدن الگوریتم پایین است. مقدار اولیه  $T_0$  باید به اندازه کافی بالا باشد تا تقریباً هر حرکتی در فضای طراحی قابل قبول باشد و باعث شود تقریباً یک جست و جوی اتفاقی انجام شود. معمولاً  $T_0$  چنان انتخاب می شود که نسبت پذیرش  $\mathcal{H}$  (که به عنوان نسبت تعداد حرکتهای قابل قبول به تعداد کل حرکتهای انجام شده تعریف می شود) تقریباً  $\mathcal{H}_0 = 0.95$  باشد [51]. جانسون و دیگران [52] مقدار  $T_0$  را با محاسبه متوسط افزایش تابع هدف،  $\overline{\Delta f^{(+)}}$ ، برای تعدادی حرکت مشخص

و حل

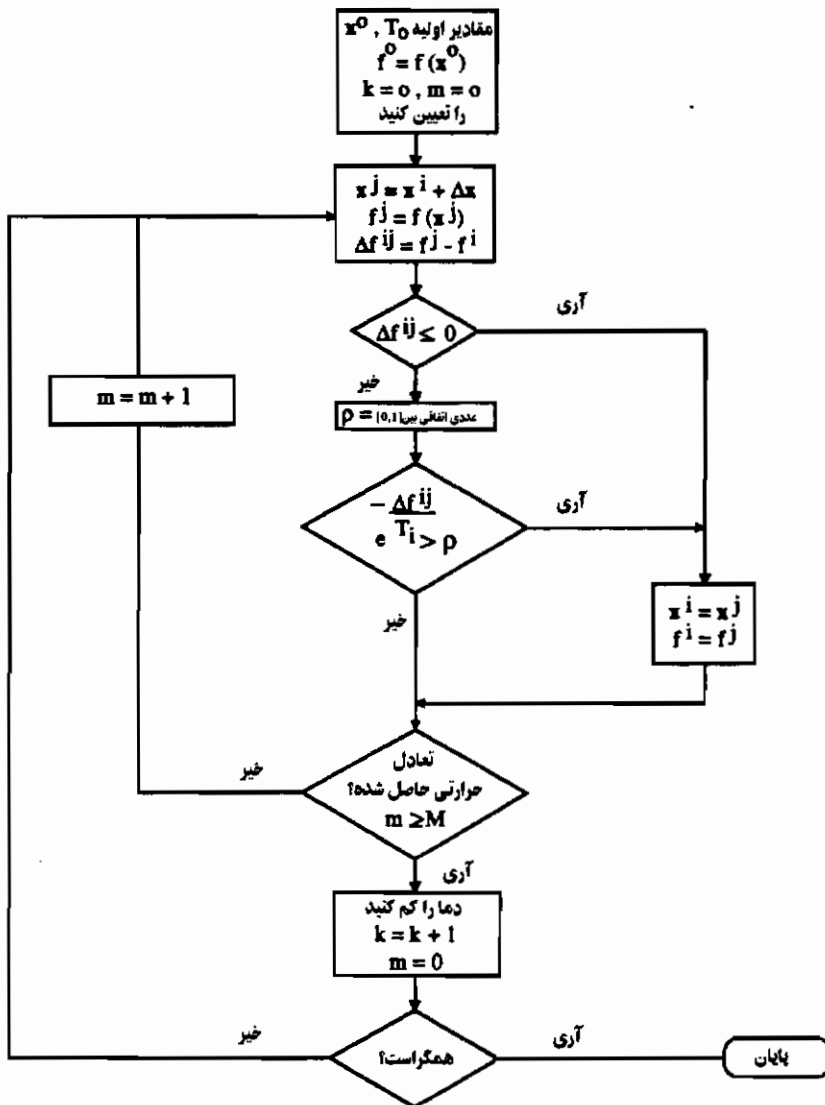
$$\mathcal{H}_0 = e^{\left(\frac{-\overline{\Delta f^{(+)}}}{T_0}\right)}, \quad (4.4.2)$$

بدست آوردند که عبارت است از:

$$T_0 = \frac{\overline{\Delta f^{(+)}}}{\ln(\mathcal{H}_0^{-1})}. \quad (4.4.3)$$

وقتی دما مشخص شد، با ایجاد اختلال (تغییرات کوچک) در طراحی، تعدادی حرکت در فضای





شکل ۴.۴.۱ نمودار جریان الگوریتم سرد شدن تدریجی شبیه سازی شده

متغیرها انجام می شود. تعداد حرکتها در یک دمای داده شده باید آن قدر زیاد باشد تا به جواب این امکان را بدهد که از مینیمم محلی فرار کند. یک روش این است که حرکت تا بدون تغییر ماندن مقدار تابع هدف برای تعداد مشخصی از چرخه های متوالی،  $M$ ، ادامه یابد. روش دیگر این است که هر ترکیب ممکن از متغیرهای طراحی در همسایگی یک طراحی حالت یکنواخت دست کم یک بار با احتمال  $P$  در نظر گرفته

بخش ۴.۴: الگوریتمهای جست و جوی احتمالاتی ۲۰۳

شود. یعنی اگر  $S$  طراحی همسایه وجود دارد، آن گاه

$$M = S \ln \left( \frac{1}{1-P} \right), \quad (4.4.4)$$

در حالی که برای  $S > 100$  مقدار  $P = 0.99$  و برای  $S < 100$  مقدار  $P = 0.995$  است. برای متغیرهای با مقدار گسسته اغلب برای تعریف همسایگی طراحی گزینه های بسیاری وجود دارد. یک راه این است که آن را به عنوان تمامی طراحی هایی که می تواند با تغییر یک متغیر به مقدار بلافاصله بزرگتر یا کوچکتر آن بدست آید تعریف کرد. با تعویض بیش از یک متغیر به مقدار بلافاصله بزرگتر یا کوچکتر می توان یک همسایگی وسیعتر تعریف کرد. برای این مسأله با  $n$  متغیر، همسایگی ها عبارتند از:

$$S = 3^n - 1. \quad (4.4.5)$$

هنگامی که همگرایی در یک دمایی حاصل شد، که عموماً به آن تعادل حرارتی می گویند، دما کاسته شده و فرایند تکرار می شود.

برای بهنگام کردن دما طرحهای مختلفی ارائه شده است. یک روش که اغلب استفاده می شود عبارت است از بهنگام سرد کردن ثابت

$$T_{k+1} = \alpha T_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad (4.4.6)$$

که در آن  $0.5 \leq \alpha \leq 0.95$  است. نحر<sup>۱</sup> [54] تعداد گامهای نمو کاهشی  $K$  را ثابت می کند و بدست آوردن مقدار  $T_K$  تجربی را پیشنهاد می کند. این امکان نیز وجود دارد که بازه  $[0, T_0]$  به تعداد گامهای ثابت  $K$  تقسیم شود و از رابطه زیر استفاده شود:

$$T_K = \frac{K-k}{K} T_0, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (4.4.7)$$

تعداد بازه ها معمولاً بین ۵ تا ۲۰ است.

کاربرد سرد شدن تدریجی شبیه سازی شده در بهینه سازی سازه ها بسیار جدید است. الپرین<sup>۲</sup> [55] این روش را در مسأله طراحی یک خرابای ده میله ای به کار برد که در آن ابعاد سطح مقطع اعضا باید از میان

یک مجموعه از مقادیر گسسته انتخاب می شدند. کینکید و پادولا<sup>۱</sup> [56] آن را برای مینیم سازی اعوجاج و نیروی خارجی در یک خرپا استفاده کرد. یک سازه<sup>۲</sup> قاب ۱۵۶ عضوی ۶ طبقه با متغیرهای با مقادیر گسسته توسط بالینگ و می<sup>۳</sup> [57] مورد بررسی قرار گرفت. موقعیت یابی اعضای فعال و غیر فعال در یک سازه<sup>۴</sup> خرپا توسط چن<sup>۳</sup> و دیگران [58] مورد بحث قرار گرفت تا اتلاف انرژی زمان محدود مینیم شود خاصیت مستهلک شوندگی افزایش یابد.

## ۲.۳.۲ الگوریتمهای ژنتیکی

الگوریتمهای ژنتیکی از فزونی استفاده می کنند که از علوم زیستی گرفته شده و بر مبنای نظریه بقای لایقترین داروین<sup>۴</sup> استوار است. هنگامی که یک جمعیت از عناصر زیستی در نسلهای مختلف تکامل می یابند، ویژگیهای فردی که برای بقا مفیدند، تمایل به انتقال به نسلهای آینده دارند، زیرا عناصری که حامل آن ویژگیها باشند شانس بیشتری برای پرورش دارند. آن ویژگیهای فردی در جمعیتهای زیستی در رشته های کروموزومی ذخیره می شوند. حرکت ژنتیک طبیعی بر مبنای عملهایی است که به تبادل ساختاری تصادفی اطلاعات ژنتیکی (یعنی وراثت مفید) بین رشته های کروموزومی والدین تولد یافته می انجامد، و عبارت است از تولید مثل، تقاطع، جهشهای گاه به گاه و واژگونگی رشته های کروموزومی. الگوریتمهای ژنتیکی، که توسط هولند<sup>۵</sup> [59] تدوین شد، مکانیک ژنتیک طبیعی را برای سیستمهای مصنوعی بر اساس عملهایی که همتای طبیعی آنهاست، (حتی به یک نام نامیده می شوند)، شبیه سازی می کند، و به طور گسترده ای در الگوریتمهای جست و جوی چند متغیره به کار می رود. همچنان که در بندهای بعدی تشریح خواهد شد، این عملها تبادل تصادفی و به راحتی قابل برنامه ریزی و ساده، موقعیت اعداد در یک رشته است، و بنابراین، از ابتدا مانند یک جست و جوی کاملاً تصادفی اکستروم در فضای پارامتر، تنها بر مبنای مقادیر تابع به نظر می رسد. با این همه، در تجربه ثابت شده که الگوریتمهای ژنتیکی از توان بالایی برخوردارند. برای بحث بیشتر خواص نظری الگوریتمهای ژنتیکی خواننده به مرجع گلدبرگ<sup>۶</sup> [47] ارجاع داده می شود. در این جا به بحث بیان ژنتیکی مسأله مینیم سازی می پردازیم، و روی مکانیک سه عمل ژنتیکی تولید مثل، تقاطع و جهش که معمولاً استفاده می شوند تأکید می کنیم.

1) Kincaid and Padula

2) Balling and May

3) Chen et al

4) Darwin

3) Holland

6) Goldberg

## بخش ۴.۴: الگوریتمهای جست و جوی احتمالاتی ۴۰۵

کاربرد عملهای الگوریتم ژنتیکی به یک مسأله جست و جو ابتدا نیاز به بیان ترکیب های ممکن متغیرها بر حسب رشته هایی بیتی<sup>۱</sup> که همتای کروموزومها باشند دارد. به طور طبیعی، اندازه خوبی یک ترکیب خاص از ژنها در یک سیستم مصنوعی با تابع هدف مسأله جست و جو بیان می شود. به عنوان مثال، اگر یک مسأله مینیم سازی به صورت زیر داشته باشیم

$$f(x), \quad x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \quad \text{را مینیم کنید} \quad (۴.۴.۸)$$

بیان رشته دوتایی یا (مبنای ۲) فضای متغیرها می تواند به شکل زیر باشد.

$$\underbrace{0110}_{x_1} \underbrace{101}_{x_2} \underbrace{11}_{x_3} \underbrace{1011}_{x_4}, \quad (۴.۴.۹)$$

در حالی که معادلهای رشته ای هر یک از متغیرها به شکل سر به انتها متصل می شوند، و در این مثال، مقادیر در مبنای ۱۰ متغیرها عبارتند از  $x_1 = 6, x_2 = 5, x_3 = 3, x_4 = 11$  و محدوده آنها عبارت است از:  $\{0 \leq x_2 \leq 7\}, \{0 \leq x_1, x_4 \leq 15\}$  و  $\{0 \leq x_3 \leq 3\}$ . به سبب نمایش رشته ای بیتی متغیرها، الگوریتمهای ژنتیکی برای مسائلی که متغیر باید مقادیر گسسته یا عدد صحیح اختیار کنند بسیار مناسب است. برای مسائلی که متغیرهای طراحی مقادیر پیوسته در محدوده  $x_i^L \leq x_i \leq x_i^U$  دارند، برای نشان دادن متغیرها با دقت بالا، فرد باید از تعداد زیادی بیت استفاده کند. تعداد بیت های لازم به میزان دقت مورد نیاز در جوابی نهایی بستگی دارد. به عنوان مثال، اگر یک متغیر در محدوده  $\{0.01 \leq x_i \leq 1.81\}$  تعریف شود و دقت مورد نیاز برای مقدار نهایی  $x^{incr} = 0.001$  باشد، آن گاه تعداد ارقام در مبنای ۲ مورد نیاز برای نمایش مناسب را می توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$2^m \geq ((x_i^U - x_i^L)/x^{incr} + 1) \quad (۴.۴.۱۰)$$

که در آن  $m$  تعداد ارقام است. در این مثال، کمترین تعداد ارقام که نیاز را برآورده می کند  $m = 11$  خواهد بود، و در واقع نمودارهای 0.00087 در مقدار متغیر ایجاد می کنند در صورتی که مقدار لازم 0.001 است. برخلاف الگوریتم های جست و جوی که پیش از این بحث شد و در فضای متغیرهای طراحی از یک نقطه به نقطه دیگر حرکت می کردند، الگوریتم ژنتیکی با جمعیتی از رشته ها (کروموزومها) کار

1) bit Strings

می کند. این جنبه 'الگوریتمهای ژنتیکی' مسؤول رسیدن به نزدیک جوابهای فراگیر است. این کار با نگهداشتن تعدادی نقطه 'جواب'، که پتانسیل نزدیک بودن به مینیم (محلی یا فراگیر) را در حین جست و جو در منطقه را دارند، در جمعیت در هنگام جست و جو، به جای کنار گذاشتن زودرس آن در فرآیند و افزایش احتمال گیر کردن در یک مینیم محلی، انجام می شود. کار کردن روی جمعیتی از طراحی ها احتمال پیاده سازی روی رایانه های موازی را نیز فراهم می کند. با این وجود، مفهوم موازی بودن در الگوریتم های ژنتیکی که در آنها انتخاب تکاملی می تواند بسیاری از ویژگیهای مختلف طراحی را به موازات بهبود بخشد، بسیار عمیق تر است. همچنین نتیجه 'یک جست و جوی ژنتیکی به جای یک طراحی منفرد یک جمعیت از طراحی های خوب است. این جنبه می تواند برای طراحان بسیار مفید باشد.

ابتدا اندازه 'جمعیت انتخاب می شود و مقدار متغیرهای هر رشته با تعیین تصادفی 0 و 1 در بیتها تعیین می شود. گام مهم بعدی در فرایند تولید مثل است که در آن رشته های با مقادیر خوب تابع هدف برای تشکیل یک جمعیت جدید کپی می شوند که شکل مصنوعی بقای لایقترین است. رفتن به طرف رشته های با عملکرد بهتر می تواند با افزایش احتمال انتخاب آنها در رابطه با بقیه 'جمعیت حاصل شود. یک راه رسیدن به این منظور ایجاد یک چرخ رولت است که در آن رشته های منفرد مساحتی متناسب با مقادیر تابع شان در رابطه با مقدار تابع تجمع کل جمعیت اشغال می کنند. بنابراین، جمعیت حاصل که از عمل تولید مثل به وجود می آید از عناصری که تطابق و لیاقت بالایی دارند کپی های چند گانه دارد.

زمانی که جمعیت جدید به وجود آمد، اعضا به شکل تصادفی برای عمل تقاطع جفت جفت می شوند. چگونگی آمیزش زوج نیز بر اساس یک فرایند تصادفی صورت می پذیرد. یک عدد صحیح تصادفی بین 1 و  $L-1$  انتخاب می شود که  $L$  طول رشته است. آن گاه با تعویض 0ها و 1هایی که بعد از مکان  $k$ ام در اولین والدند با مکانهای متناظر در والد دوم دو رشته 'جدید تولید می شود. به عنوان مثال، دو رشته به طول  $L=9$

$$\begin{array}{lcl} \text{والد ۱} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \| & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \text{والد ۲} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \| & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (4.4.11)$$

با نقطه  $k=5$  آمیزش شده اند، دو فرزند جدید ترکیب زیر را دارند:

(۴.۴.۱۲) 011010001 فرزند ۱  
010010111 فرزند ۲

تقاطعهای چند نقطه ای که در آن اطلاعات بین والد میان قطاعهای بیشتری از رشته ها جا به جا می شود نیز امکان پذیر است، اما به سبب مخلوط شدن رشته ها، تقاطع یک فرآیند تصادفی تر می شود و ممکن است عملکرد الگوریتم ضعیف تر شود که در دی جانگ<sup>۱</sup> [60] آمده است. تنها استثنا در این مورد تقاطع دو نقطه ای است. در واقع، تقاطع یک نقطه ای را می توان به عنوان حالت خاص تقاطع دو نقطه ای در نظر گرفت که در آن نقطه دوم تقاطع انتهای رشته است. بوکر<sup>۲</sup> [61] نشان داد که با انتخاب نقطه انتهایی قطاع برای تقاطع اتفاقی، عملکرد الگوریتم را می توان واقعاً بهبود بخشید.

جهش به عنوان یک عمل که از دست دادن زودرس اطلاعات ژنتیکی مهم را با معرفی گاه به گاه تغییر تصادفی یک رشته مانع می شود انجام وظیفه می نماید. همچنان که پیشتر بیان شد در پایان تکثیر، داشتن جمعیتی با چند کمی از یک رشته امکان پذیر است. در بدترین حالت، ممکن است جمعیتی با رشته های یکسان داشته باشیم. در چنین حالتی، الگوریتم قادر به جست و جو برای دست یافتن به یک جواب بهتر نیست. جهش از این یکنواختی جلوگیری می کند، و با یک انتخاب اتفاقی موقعیت مشخصی را روی رشته تعیین می کند و مقدارش را از 0 به 1 و یا بر عکس تغییر می دهد. بر اساس نرخ کم اتفاق این عمل در سیستمهای زیستی و همچنین در تجربیات عددی، نقش عمل جهش روی عملکرد الگوریتم ژنتیکی یک نقش مرتبه دومی است. گلدبرگ نرخ جهش یک در هزار بیت عملیات را پیشنهاد می کند.

کاربرد الگوریتمهای ژنتیکی در طراحی سازه های بهین در چند سال اخیر شروع شده است. اولین کاربرد الگوریتم در طراحی سازه توسط گلدبرگ و سمتانی<sup>۳</sup> [62] ارائه شد که مسأله مینیم سازی وزن یک خرپای ۱۰ میله ای بود. بعدها حاجلا<sup>۴</sup> [63] جست و جوی ژنتیک را برای مسائل طراحی سازه مختلف به کار برد که در آنها فضای طراحی یا نامحدوب یا منفصل بود. راثو<sup>۵</sup> و دیگران [64] انتخاب بهین محلهای تنظیم کننده های گسسته در سازه های کنترل شده فعال را به کمک الگوریتمهای ژنتیکی انجام دادند.

به طور خلاصه، پنداره اساسی شبیه سازی یک پدیده طبیعی، یافتن یک مینا با جلوه ریاضی تر در

1) De Jong

2) Booker

3) Goldberg and Samtani

4) Hajela

5) Rao

## ۴۰۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۴: بهینه سازی نامقید)

زمینه' الگوریتمهای جست و جوی احتمالاتی به ویژه برای متغیرهای گسسته است. ایجاد بهبود در عملکرد الگوریتمها همچنان در حال انجام است. به عنوان مثال، بهبود سازی های جدول زمانی سرد شدن که توسط سزو<sup>۱</sup> [65] ارائه شد به تدوین یک الگوریتم جدید که سرد شدن تدریجی سریع نامیده می شود ختم شد. در حال حاضر کاربرد و تحلیل عملهای دیگری که ریشه در ژنتیک زیستی طبیعی دارند (مانند وازگونگی، غلبه یافتگی، شانس بقا و غیره) برای الگوریتمهای ژنتیکی در حال ارزیابی است.

## ۴.۵ تمرینها

۱. مسأله' تیر یکسر گیر دار مثال ۴.۲.۱ را با

(الف) الگوریتم سیمپلکس نلدر-مید<sup>۲</sup>، و

(ب) الگوریتم دیویدان-فلتچر-پاول حل کنید.

از  $\mathbf{x}_0^T = (-1, -2)$  شروع کنید. برای الگوریتم سیمپلکس یک سیمپلکس اولیه به اندازه  $a = 2.0$  فرض کنید. یک نقطه مبنای اولیه  $\mathbf{x}_0$  فرض کنید که مختصات رأسهای دیگر از معادله های (۴.۲.۱) و (۴.۲.۲) بدست می آید.

۲. مینیمم تابع

$$f = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (-x_1 + x_2 + x_3)^2$$

را با استفاده از روش جهتهای مزدوج پاول بیابید، با  $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)^T$  شروع کنید.

۳. مینیمم تابع

$$f(\mathbf{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2,$$

را با استفاده از روش تندترین کاهش و با شروع از  $\mathbf{x}_0 = (1.2, 1.0)^T$  بدست آورید.

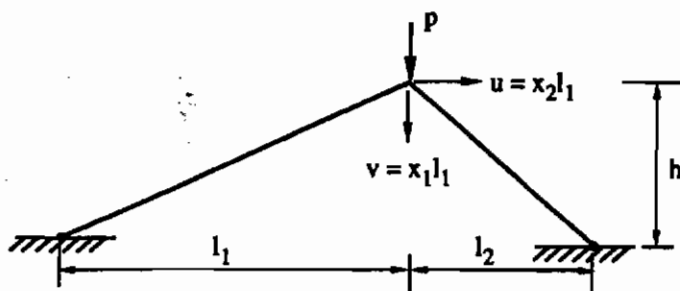
۴. حالت تعادل پایدار خرابای تو خالی نامتقارن دو میله ای شکل ۴.۵.۱ می تواند با مینیمم سازی

تابع انرژی پتانسیل  $f$  از متغیرهای تغییر مکان بی بعد  $\mathbf{x}_1$  و  $\mathbf{x}_2$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}m\gamma(-\alpha_1 x_1 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_2)^2 + \frac{1}{2}\left(-\alpha_1 x_1 + \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{x_2}{\gamma}\right)\gamma^4 - \bar{p}\gamma x_1,$$

بدست آید که در آن  $m$ ،  $\gamma$ ،  $\alpha_1$ ،  $\bar{p}$  کمیتهای بی بعدی هستند که به شکل زیر تعریف می شوند

بخش ۴.۵ : تمرینها ۴۰۹



شکل ۴.۵.۱ خربای توخالی نامتقارن دو میله ای

$$m = \frac{A_1}{A_2}, \quad \gamma = \frac{l_1}{l_2}, \quad \alpha_1 = \frac{h}{l_1}, \quad \bar{p} = \frac{p}{EA_2},$$

که  $E$  ضریب ارتجاعی،  $A_1$  و  $A_2$  مساحت سطح مقطعهای میله هاست. با استفاده از الگوریتم بی اف جی اس (BFGS) حالت تعادل را بر حسب  $x_1$  و  $x_2$  برای  $m = 5$ ،  $\gamma = 4$ ،  $\alpha_1 = 0.02$ ،  $\bar{p} = 2 \times 10^{-5}$  بدست آورید. نقطه شروع را  $x_0^T = (0, 0)$  در نظر بگیرید.

۵. با ادامه تحلیل مسأله ۴ می توان نشان داد که بار بحرانی  $p_{cr}$  که در آن خربای توخالی ناپایدار می شود (شروع به خارج شدن از پایداری می کند) با رابطه زیر بدست می آید.

$$p_{cr} = \frac{EA_1A_2\gamma(\gamma+1)^2}{(A_1+A_2\gamma)} \frac{\alpha_1^3}{3\sqrt{3}}.$$

اکنون فرض کنید  $p_{cr}$  که در بالا داده شد باید نسبت به شرط

$$A_1l_1 + A_2l_2 = v_0 = \text{ثابت}$$

ماکزیمم شود. رابطه سازی جریمه خارجی فصل ۵ مسأله بالا را به شکل مسأله مینیم سازی نامقید

$$p_{cr}^*(A_1, A_2, r) = \frac{EA_1A_2\gamma(\gamma+1)^2}{(A_1+A_2\gamma)} \frac{\alpha_1^3}{3\sqrt{3}} + r(A_1l_1 + A_2l_2 - v_0)^2,$$

تبدیل می کند که در آن  $r$  یک پارامتر جریمه است. با مینیم سازی یک شکل بی بعد مناسب از  $p_{cr}^*$

برای  $r = 10^4$ ،  $E = 10^6$  psi،  $v_0 = 200 \text{ in}^3$ ،  $h = 2.50 \text{ in}$ ،  $l_2 = 50 \text{ in}$ ،  $l_1 = 200 \text{ in}$



۲۱۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۴: بهینه سازی نامقید)

یک جواب تقریبی برای حالت خرابای بهینه و مقدار  $p_{cr}$  مربوط بدست آورید. برای مسأله 'مینیمم سازی نامقید از الگوریتم بی اف جی اس (BFGS) و حدس قابل قبول اولیه  $A_1 = 0.952381 \text{ in}^2$  و  $A_2 = 0.190476 \text{ in}^2$  استفاده کنید.

۶. الف) مشتق سوئی  $f$  در جهت  $s$  را

$$\nabla f^T s = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} s_i,$$

به شرط

$$\sum_{i=1}^n s_i^2 = 1,$$

مینیمم کنید تا نشان دهید جهت تندترین کاهش عبارت است از

$$s = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}. \quad (۴.۵.۱)$$

ب) مسأله الف را با جایگزینی شرط قیدی  $s$  با

$$s^T Q s = 1,$$

تکرار کنید تا نشان دهید جهت نیوتن عبارت است از:

$$s = -Q^{-1} \nabla f,$$

$Q$  هسیان تابع درجه دوم  $f$  است.

#### ۴.۶ مراجع

- [1] Kamat, M.P. and Hayduk, R.J., "Recent Developments in Quasi-Newton Methods for Structural Analysis and Synthesis," AIAA J., 20 (5), 672-679, 1982.
- [2] Avriel, M., Nonlinear Programming: Analysis and Methods. Prentice-Hall, Inc., 1976.
- [3] Powell, M.J.D., "An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives," Computer J., 7, pp. 155-162, 1964.

- [4] Kiefer, J., "Sequential Minmax Search for a Maximum," Proceedings of the American Mathematical Society, 4, pp. 502-506, 1953.
- [5] Walsh, G.R., Methods of Optimization, John Wiley, New York, 1975.
- [6] Dennis, J.E. and Schnabel, R.B., Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, Prentice-Hall, 1983.
- [7] Gill, P.E., Murray, W. and Wright, M.H., Practical Optimization, Academic Press, New York, p. 92, 1981.
- [8] Spendley, W., Hext, G. R., and Himsworth, F. R., "Sequential Application of Simplex Designs in Optimisation and Evolutionary Operation," Technometrics, 4 (4), pp. 441-461, 1962.
- [9] Nelder, J. A. and Mead, R., "A Simplex Method for Function Minimization," Computer J., 7, pp. 308-313, 1965.
- [10] Chen, D. H., Saleem, Z., and Grace, D. W., "A New Simplex Procedure for Function Minimization," Int. J. of Modelling & Simulation, 6, 3, pp. 81-85, 1986.
- [11] Cauchy, A., "Methode Generale pour la Resolution des Systemes D'equations Simultanees," Comp. Rend. l'Academie des Sciences Paris, 5, pp. 536-538, 1847.
- [12] Hestenes, M.R. and Stiefel, E., "Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems," J. Res. Nat. Bureau Stand., 49, pp. 409-436, 1952.
- [13] Fletcher, R. and Reeves, C.M., "Function Minimization by Conjugate Gradients," Computer J., 7, pp. 149-154, 1964.
- [14] Gill, P.E. and Murray, W., "Conjugate-Gradient Methods for Large Scale Nonlinear Optimization," Technical Report 79-15; Systems Optimization Lab., Dept. of Operations Res., Stanford Univ., pp. 10-12, 1979.
- [15] Powell, M.J.D., "Restart Procedures for the Conjugate Gradient Method," Math. Prog., 12, pp. 241-254, 1975.
- [16] Polak, E., Computational Methods in Optimization: A Unified Approach, Academic Press, 1971.
- [17] Axelsson, O. and Munksgaard, N., "A Class of Preconditioned Conjugate Gradient Methods for the Solution of a Mixed Finite Element Discretization of the Biharmonic Operator," Int. J. Num. Meth. Engng., 14, pp. 1001-1019, 1979.
- [18] Johnson, O.G., Micchelli, C.A. and Paul, G., "Polynomial Preconditioners for Conjugate Gradient Calculations," SIAM J. Num. Anal., 20 (2), pp. 362-376, 1983.
- [19] Broyden, C.G., "The Convergence of a Class of Double-Rank Minimization Algorithms 2. The New Algorithm," J. Inst. Math. Appl., 6, pp. 222-231, 1970.
- [20] Oren, S.S. and Luenberger, D., "Self-scaling Variable Metric Algorithms, Part I," Manage. Sci., 20 (5), pp. 845-862, 1974.

- [21] Davidon, W.C., Variable Metric Method for Minimization. Atomic Energy Commission Research and Development Report, ANL-5990 (Rev.), November 1959.
- [22] Fletcher, R. and Powell, M.J.D., "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization," Computer J., 6, pp. 163-168, 1963.
- [23] Fletcher, R., "A New Approach to Variable Metric Algorithms," Computer J., 13 (3), pp. 317-322, 1970.
- [24] Goldfarb, D., "A Family of Variable-metric Methods Derived by Variational Means," Math. Comput., 24, pp. 23-26, 1970.
- [25] Shanno, D.F., "Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization," Math. Comput., 24, pp. 647-656, 1970.
- [26] Dennis, J.E., Jr. and More, J.J., "Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory," SIAM Rev., 19 (1), pp. 46-89, 1977.
- [27] Powell, M.J.D., "Some Global Convergence Properties of a Variable Metric Algorithm for Minimization Without Exact Line Searches," In: Nonlinear Programming (R.W.Cottle and C.E. Lemke, eds.), American Mathematical Society, Providence, RI, pp. 53-72, 1976.
- [28] Shanno, D.F., "Conjugate Gradient Methods with Inexact Searches," Math. Oper. Res., 3 (2), pp. 244-256, 1978.
- [29] Kamat, M.P., Watson, L.T. and Junkins, J.L., "A Robust Efficient Hybrid Method for Finding Multiple Equilibrium Solutions," Proceedings of the Third Intl. Conf. on Numerical Methods in Engineering, Paris, France, pp. 799-807, March 1983.
- [30] Kwok, H.H., Kamat, M.P. and Watson, L.T., "Location of Stable and Unstable Equilibrium Configurations using a Model Trust Region, Quasi-Newton Method and Tunnelling," Computers and Structures, 21 (6), pp. 909-916, 1985.
- [31] Matthies, H. and Strang, G., "The Solution of Nonlinear Finite Element Equations," Int. J. Num. Meth. Engng., 14, pp. 1613-1626, 1979.
- [32] Schubert, L.K., "Modification of a Quasi-Newton Method for Nonlinear Equations with a Sparse Jacobian," Math. Comput., 24, pp. 27-30, 1970.
- [33] Broyden, C.G., "A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations," Math. Comput., 19, pp. 577-593, 1965.
- [34] Toint, Ph.L., "On Sparse and Symmetric Matrix Updating Subject to a Linear Equation," Math. Comput., 31, pp. 954-961, 1977.
- [35] Shanno, D.F., "On Variable-Metric Methods for Sparse Hessians," Math. Comput., 34, pp. 499-514, 1980.
- [36] Curtis, A.R., Powell, M.J.D. and Reid, J.K., "On the Estimation of Sparse Jacobian Matrices," J. Inst. Math. Appl., 13, pp. 117-119, 1974.

- [37] Powell, M.J.D. and Toint, Ph.L., "On the Estimation of Sparse Hessian Matrices," *SIAM J. Num. Anal.*, 16 (6), pp. 1060-1074, 1979.
- [38] Kamat, M.P., Watson, L.T. and VandenBrink, D.J., "An Assessment of Quasi-Newton Sparse Update Techniques for Nonlinear Structural Analysis," *Comput. Meth. Appl. Mech. Enging.*, 26, pp. 363-375, 1981.
- [39] Kamat, M.P. and VandenBrink, D.J., "A New Strategy for Stress Analysis Using the Finite Element Method," *Computers and Structures* 16 (5), pp. 651-656, 1983.
- [40] Gill, P.E. and Murray, W., "Newton-type Methods for Linearly Constrained Optimization," In: *Numerical Methods for Constrained Optimization* (Gill & Murray, eds.), pp. 29-66. Academic Press, New York 1974.
- [41] Griewank, A.O., *Analysis and Modifications of Newton's Method at Singularities*. Ph.D. Thesis, Australian National University, 1980.
- [42] Decker, D.W. and Kelley, C.T., "Newton's Method at Singular Points, I and II," *SIAM J. Num. Anal.*, 17, pp. 66-70; 465-471, 1980.
- [43] Hansen, E., "Global Optimization Using Interval Analysis- The Multi Dimensional Case," *Numer. Math.*, 34, pp. 247-270, 1980.
- [44] Kao, J.-J., Brill, E. D., Jr., and Pfeffer, J. T., "Generation of Alternative Optima for Nonlinear Programming Problems," *Eng. Opt.*, 15, pp. 233-251, 1990.
- [45] Ge, R., "Finding More and More Solutions of a System of Nonlinear Equations," *Appl. Math. Computation*, 36, pp. 15-30, 1990.
- [46] Laarhoven, P. J. M. van., and Aarts, E., *Simulated Annealing: Theory and Applications*, D. Reidel Publishing, Dordrecht, The Netherlands, 1987.
- [47] Goldberg, D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Reading, Massachusetts, 1989.
- [48] Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H., and Teller, E., "Equation of State Calculations by Fast Computing Machines," *J. Chem. Physics*, 21 (6), pp. 1087-1092, 1953.
- [49] Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., Jr., and Vecchi, M. P., "Optimization by Simulated Annealing," *Science*, 220 (4598), pp. 671-680, 1983.
- [50] Cerny, V., "Thermodynamical Approach to the Traveling Salesman Problem: An Efficient Simulation Algorithm," *J. Opt. Theory Appl.*, 45, pp. 41-52, 1985.
- [51] Rutenbar, R. A., "Simulated Annealing Algorithms: An Overview," *IEEE Circuits and Devices*, January, pp. 19-26, 1989.
- [52] Johnson, D. S., Aragon, C. R., McGeoch, L. A., and Schevon, C., "Optimization by Simulated Annealing: An Experimental Evaluation. Part I. Graph Partitioning," *Operations Research*, 37, 1990, pp. 865-893.
- [53] Aarts, E., and Korst, J., *Simulated Annealing and Boltzmann Machines, A Stochastic Approach to Combinatorial Optimization and Neural Computing*, John Wiley & Sons, 1989.

- [54] Nahar, S., Sahni, S., and Shragowitz, E. V., in the Proceedings of 22nd Design Automation Conf., Las Vegas, June 1985, pp. 748-752.
- [55] Elperin, T., "Monte Carlo Structural Optimization in Discrete Variables with Annealing Algorithm," Int. J. Num. Meth. Eng., 26, 1988, pp. 815-821.
- [56] Kincaid, R. K., and Padula, S. L., "Minimizing Distortion and Internal Forces in Truss Structures by Simulated Annealing," Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 31st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Long Beach, CA., 1990, Part 1, pp. 327-333.
- [57] Balling, R. J., and May, S. A., "Large-Scale Discrete Structural Optimization: Simulated Annealing, Branch-and-Bound, and Other Techniques," presented at the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 32nd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Long Beach, CA., 1990,
- [58] Chen, G.-S., Bruno, R. J., and Salama, M., "Optimal Placement of Active/Passive Members in Structures Using Simulated Annealing," AIAA J., 29 (8), August 1991, pp. 1327-1334.
- [59] Holland, J. H., Adaptation of Natural and Artificial Systems, The University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1975.
- [60] De Jong, K. A., Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems (Doctoral Dissertation, The University of Michigan; University Microfilms No. 76-9381), Dissertation Abstracts International, 36 (10), 5140B, 1975.
- [61] Booker, L., "Improving Search in Genetic Algorithms," in Genetic Algorithms and Simulated Annealing, Ed. L. Davis, Morgan Kaufmann Publishers, Inc., Los Altos, CA. 1987, pp. 61-73.
- [62] Goldberg, D. E., and Samtani, M. P., "Engineering Optimization via Genetic Algorithm," Proceedings of the Ninth Conference on Electronic Computation, ASCE, February 1986, pp. 471-482.
- [63] Hajela, P., "Genetic Search—An Approach to the Nonconvex Optimization Problem," AIAA J., 28 (7), July 1990, pp. 1205-1210.
- [64] Rao, S. S., Pan, T.-S., and Venkayya, V. B., "Optimal Placement of Actuators in Actively Controlled Structures Using Genetic Algorithms," AIAA J., 29 (6), pp. 942-943, June 1991.
- [65] Szu, H., and Hartley, R.L., "Nonconvex Optimization by Fast Simulated Annealing," Proceedings of the IEEE, 75 (11), pp. 1538-1540, 1987.

اکثر مسائل در بهینه سازی سازه ها باید به شکل مسائل مینیمم سازی مقید رابطه سازی شوند. در یک مسأله طراحی سازه تابع هدف معمولاً یک تابع نسبتاً ساده از متغیرهای طراحی است (مانند وزن)، اما طراحی باید چند قید تنش، تغییر مکان، کمانش، و بسامد را برآورده سازد. این قیدها معمولاً توابع پیچیده ای از متغیرهای طراحی هستند که از تحلیل یک مدل اجزای محدود سازه قابل دستیابی اند. این فصل مروری دارد بر روشهایی که معمولاً برای حل این نوع مسائل مقید به کار می روند.

روشهایی که در این فصل تشریح می شوند برای استفاده در مواردی است که هزینه محاسباتی ارزیابی تابع هدف و قیدها کم یا متوسط است. در این روشها تابع هدف یا قیدها دقیقاً محاسبه می شوند (مثلاً با یک برنامه اجزای محدود) ولی این محاسبه زمانی انجام می شود که الگوریتم بهینه سازی نیاز داشته باشد. این رویکرد ممکن است به صدها بار ارزیابی تابع هدف و قیدها نیاز داشته باشد که در مورد مسائلی که ارزیابی آنها از نظر محاسباتی پرهزینه باشد عملی نیست. برای این نوع مسائل با هزینه بالا به یک حالت میانی روی می آوریم که برای تابع هدف و قیدها و یا دست کم برای توابعی که ارزیابی آنها هزینه بالاتری دارد تقریبهایی می سازیم. آن گاه بهینه سازی روی مسأله تقریبی انجام می شود. این فرایند تقریبی در فصل بعد تشریح می شود.

مسأله اصلی که در این فصل مورد توجه قرار می دهیم عبارت است از مینیمم سازی یک تابع نسبت به

قیدهای تساوی و نامساوی

$$\begin{aligned} & \text{تابع} \\ & f(\mathbf{x}) \\ & \text{را مشروط به} \quad h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, n_e. \\ & g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g. \quad \text{مینیمم کنید.} \end{aligned} \quad (5.1)$$



قیدها فضای طراحی را به دو بخش تقسیم می کنند: بخش قابل قبول که در آن قیدها برآورده می شوند، و بخش غیر قابل قبول که در آن دست کم یکی از قیدها نقض می شود. در بیشتر مسائل عملی مینیمم روی مرز بین بخش قابل قبول و غیر قابل قبول واقع می شود یعنی در جایی که حداقل برای یک  $j$ ،  $g_j(\mathbf{x}) = 0$  است. در غیر این صورت قیدهای نامساوی را می شود بدون این که روی جواب اثری داشته باشد، حذف کرد. در بیشتر مسائل بهینه سازی سازه ها قیدهای نامساوی محدودیت هایی روی اندازه ها، تنشها، تغییر مکانها، و غیره ایجاد می کنند. این محدودیتها تأثیر زیادی روی طراحی دارند و بدین سبب معمولاً در نقطه مینیمم قیدهای نامساوی متعددی فعالند.

در حالی که روشهای تشریح شده در این بخش توانمندند، اگر متغیرهای طراحی و قیدها به شکل نامناسبی مقیاس بندی شده باشند، عملکرد آنها اغلب ضعیف است. برای جلوگیری از بدخیمی، تمامی متغیرهای طراحی باید بزرگی مشابهی داشته باشند، و همه قیدها، زمانی که سطح یکسانی از نظر بحرانی بودن دارند، باید مقادیر مشابهی داشته باشند. یک روش معمول نرمال سازی قیدهاست به شکلی که  $g(\mathbf{x}) = 0.1$  متناظر با ده درصد حاشیه یک کمیت پاسخ باشد. به عنوان مثال، اگر قید یک حد بالایی  $\sigma$  روی اندازه تنش  $\sigma$  است، آن گاه قید را می شود به شکل زیر نوشت:

$$g = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_a} \geq 0. \quad (5.2)$$

بعضی از فنون عددی ارائه شده برای حل مسائل بهینه سازی غیر خطی مقید در این فصل قادر به در نظر گرفتن قیدهای تساوی نیستند و محدود به قیدهای نامساویند. در چنان حالتی می شود قید تساوی به شکل  $h_i(\mathbf{x}) = 0$  را با دو قید نامساوی  $h_i(\mathbf{x}) \leq 0$  و  $h_i(\mathbf{x}) \geq 0$  جایگزین کرد. اما معمولاً افزایش تعداد قیود مطلوب نیست. برای مسائلی که تعداد زیادی قید نامساوی دارند، می شود یک قید معادل ساخت که جایگزین آنها باشد. یکی از راههای جایگزینی تعدادی از قیدهای نامساوی  $(g_i(\mathbf{x}) \geq 0, i = 1 \dots m)$  با یک قید معادل استفاده از تابع کریسل میر- اشتانهاوزر<sup>۱</sup> [1] (تابع KS) است که به شکل زیر تعریف می شود:

$$KS[g_i(\mathbf{x})] = -\frac{1}{\rho} \ln \left[ \sum_i e^{-\rho g_i(\mathbf{x})} \right], \quad (5.3)$$

1) Kreisselmeier-Steinhausser

بخش ۵.۱: شرایط کان-تاکر ۴۱۷

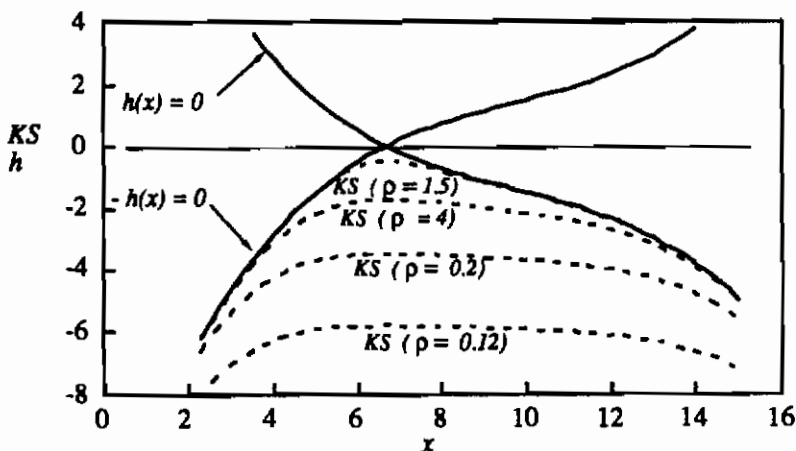
که  $\rho$  پارامتری است که میزان نزدیکی تابع  $KS$  به کوچکترین نامساوی  $\min[g_i(x)]$  را تعیین می کند. برای هر عدد مثبت  $\rho$ ، تابع  $KS$  همیشه منفی تر از منفی ترین قید است و یک کران پایین برای نامساویهاست. با افزایش  $\rho$  توابع  $KS$  با مقدار مینیمم توابع توافق نزدیکتری دارند. مقدار تابع  $KS$  همیشه محدود به کرانهای زیر است:

$$g_{\min} \leq KS[g_i(x)] \leq g_{\min} - \frac{\ln(m)}{\rho} \quad (5.4)$$

برای یک قید تساوی که با یک جفت نامساوی  $h_i(x) \leq 0$  و  $-h_i(x) \leq 0$  نشان داده شده، جواب در نقطه ای است که هر دو نامساوی فعالند،  $h_i(x) - h_i(x) = 0$ ، که در شکل دیده می شود. سوییچی [2] نشان داد که برای یک تابع  $KS$  که با یک جفت مثبت و منفی  $h_i$  تعریف می شود، گرادینان تابع  $KS$  در نقطه جواب  $h_i(x) = 0$  صفر می شود و به مقدار  $\rho$  بستگی ندارد، و وقتی  $\rho$  به طرف بی نهایت میل کند مقدارش به طرف صفر میل می کند، شکل ۵.۱ در حقیقت، در نقطه  $x$  وقتی  $h_i = 0$  است از معادله (۵.۴) می توان نتیجه گرفت که تابع  $KS$  خاصیت زیر را دارد

$$0 \geq KS(h, -h) \geq -\frac{\ln(2)}{\rho} \quad (5.5)$$

در نتیجه، مسأله بهینه سازی



شکل ۵.۱ تابع کریسل میر-اشتانهاوزر بجای  $h(x) = 0$



$$(۵.۶) \quad \begin{array}{l} \text{تابع} \\ \text{رابطه به} \end{array} \quad h_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, n_e, \quad \begin{array}{l} f(x) \\ \text{مینیمم کنید} \end{array}$$

را می شود به شکل زیر دوباره رابطه سازی کرد

$$(۵.۷) \quad \begin{array}{l} \text{تابع} \\ \text{رابطه به} \end{array} \quad KS(h_1, -h_1, h_2, -h_2, \dots, h_{n_e}, -h_{n_e}) \geq -\epsilon. \quad \begin{array}{l} f(x) \\ \text{مینیمم کنید} \end{array}$$

که در آن  $\epsilon$  یک رواداری (تولرانس) کوچک است.

## ۵.۱ شرایط کان - تاکر

### ۵.۱.۱ حالت کلی

در حالت کلی، مسأله<sup>۱</sup> (۵.۱) ممکن است مینیمم های محلی متعددی داشته باشد. تنها در شرایط خاصی از وجود مینیمم فراگیر منفرد می توان اطمینان حاصل کرد. شرایط لازم برای مینیمم یک مسأله<sup>۱</sup> مقید با استفاده از روش ضربگر لاگرانژ<sup>۱</sup> بدست می آید. در شروع فقط حالت خاص قیدهای تساوی را در نظر می گیریم. با استفاده از فن ضربگر لاگرانژ، تابع لاگرانژ را تعریف می کنیم.

$$(۵.۱.۱) \quad \mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{n_e} \lambda_j h_j(x),$$

که در آن  $\lambda_j$  ضربگرهای لاگرانژ مجهولند. شرایط لازم برای یک نقطه<sup>۱</sup> ایستا عبارت است از

$$(۵.۱.۲) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n_e} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(۵.۱.۳) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n_e.$$

این شرایط تنها در یک نقطه<sup>۱</sup> منظم کاربرد دارند، یعنی نقطه ای که در آن گرادیانهای قیدها به طور خطی مستقلند. اگر گرادیان قیدها به طور خطی وابسته باشند، معنای آن این است که می توانیم بعضی از قیدها را بدون تحت تأثیر قرار دادن جواب حذف کنیم. در یک نقطه<sup>۱</sup> منظم، معادله های (۵.۱.۲) و (۵.۱.۳) نشان دهنده<sup>۱</sup>  $n_e + n$  معادله برای  $n_e$  ضربگر لاگرانژ و  $n$  مختصات نقطه<sup>۱</sup> ایستا است.

بخش ۵.۱: شرایط کان-تاکر ۲۱۹

هنگامی که قیدهای نامساوی وجود داشته باشند، کار بسیار پیچیده تر است. برای کاربرد روش ضربگر لاگرانژ ابتدا قیدهای نامساوی را با اضافه کردن متغیرهای کمبود به قیدهای تساوی تبدیل می کنیم. یعنی قیدهای نامساوی به شکل زیر نوشته می شوند:

$$g_j(\mathbf{x}) - t_j^2 = 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \quad (5.1.4)$$

که در آن  $t_j$  یک متغیر کمبود است و میزان دوری توأمین قید از بحرانی بودن را نشان می دهد. اکنون می توانیم یک تابع لاگرانژین تشکیل دهیم

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \boldsymbol{\lambda}) = f - \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j (g_j - t_j^2). \quad (5.1.5)$$

با مشتق گیری از تابع لاگرانژ نسبت به  $\mathbf{x}$ ،  $\boldsymbol{\lambda}$  و  $\mathbf{t}$  داریم:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.1.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = -g_j + t_j^2 = 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \quad (5.1.7)$$

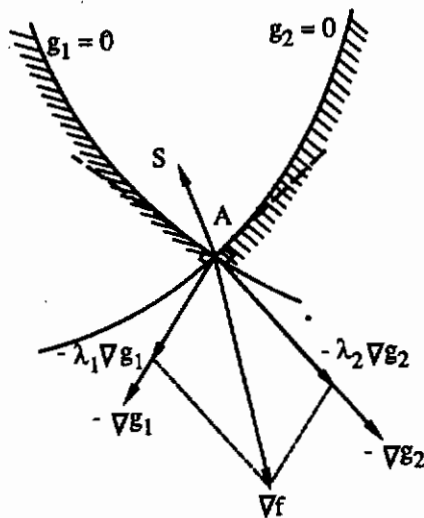
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_j} = 2\lambda_j t_j = 0, \quad j = 1, \dots, n_g. \quad (5.1.8)$$

معادله های (۵.۱.۷) و (۵.۱.۸) بیانگر این نکته اند که هنگامی که یک قید نامساوی بحرانی نیست (بنابراین متغیر کمبود مربوط به آن غیر صفر است) آن گاه ضربگر لاگرانژ مربوط به قید صفر است. معادله های (۵.۱.۶) تا (۵.۱.۸) شرایط لازم برای یک نقطه منظم ایستایند. توجه کنید که برای قیدهای نامساوی نقطه نامنظم نقطه ای است که در آن گرادیان قیدهای فعال به طور خطی مستقل باشند. این شرایط کمی بهبود می یابند تا شرایط لازم برای یک مینیمم را بدهند که به آنها شرایط کان-تاکر می گویند. شرایط کان تاکر را می شود به شکل زیر خلاصه کرد:

نقطه  $\mathbf{x}$  برای یک مسأله با قید نامساوی تنها در صورتی یک مینیمم محلی است که یک مجموعه از  $\lambda$  های نامنفی بتوان یافت که:

۱. معادله (۵.۱.۶) برآورده شود

۲. در صورتی که قیدی فعال نباشد،  $\lambda$  مربوط به آن صفر باشد.



شکل ۵.۱.۱ تفسیر هندسی شرط کان-تاکر در صورت وجود دو قید

تفسیر هندسی شرایط کان تاکر در شکل (۵.۱.۱) برای حالتی که دو قید وجود داشته باشد تشریح شده است.  $\nabla g_1$  و  $\nabla g_2$  نشانگر گرادیانهای دو قید هستند که به سطح قیدهایشان عمودند. بردار  $s$  یک جهت قابل قبول را نشان می دهد که فوراً به یک نقض قیدی نمی انجامد. برای حالتی که دو قید وجود داشته باشد، معادله (۵.۱.۶) را می شود به شکل زیر نوشت:

$$-\nabla f = -(\lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2). \quad (5.1.9)$$

فرض کنید می خواهیم ببینیم نقطه  $A$  یک مینیمم است یا نه. برای بهبود طراحی لازم است از  $A$  در جهتی مانند  $s$  حرکت کنیم که قابل استفاده و قابل قبول باشد. برای این که جهت قابل استفاده باشد، یک حرکت کوچک در این جهت باید تابع هدف را کاهش دهد. برای قابل قبول بودن،  $s$  باید یک زاویه منفرد با  $-\nabla g_1$  و  $-\nabla g_2$  بسازد. برای این که آن جهت جهتی کاهش دهنده برای  $f$  نیز باشد، باید یک زاویه حاد با  $-\nabla f$  بسازد. از شکل (۵.۱.۱) روشن است که، هر بردار که با  $-\nabla f$  زاویه حاد بسازد با  $-\nabla g_1$  یا  $-\nabla g_2$  نیز زاویه حاد می سازد. بنابراین، شرایط کان تاکر یعنی هیچ طراحی قابل قبولی که تابع هدف را کاهش دهد در همسایگی  $A$  یافت نمی شود. به زبان ریاضی، شرط این که جهت  $s$  قابل قبول

بخش ۵.۱: شرایط کان-تاکر ۲۲۱

باشد به شکل زیر نوشته می شود:

$$\mathbf{s}^T \nabla g_j \geq 0, \quad j \in I_A, \quad (5.1.10)$$

که  $I_A$  مجموعه قیدهای فعال است. در معادله (۵.۱.۱۰) تساوی تنها برای قیود خطی یا مقعر جایز است (برای تعریف مقعر به بخش ۵.۱.۲ مراجعه کنید). شرط یک جهت قابل استفاده (جهتی که تابع هدف را کاهش دهد) عبارت است از:

$$\mathbf{s}^T \nabla f < 0 \quad (5.1.11)$$

با ضرب معادله (۵.۱.۶) در  $\mathbf{s}_i$  و جمع بستن روی  $i$  داریم:

$$\mathbf{s}^T \nabla f = \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j \mathbf{s}^T \nabla g_j. \quad (5.1.12)$$

با مشاهده معادله های (۵.۱.۱۰) و (۵.۱.۱۱)، می بینیم که معادله (۵.۱.۱۲) در صورتی که  $\lambda$ ها مثبت باشند ناممکن است.

اگر شرایط کان-تاکر در نقطه ای برآورده شده باشد، یافتن جهتی با شیب منفی برای تابع هدف که قیدها را نقض نکند ناممکن است. در بعضی از حالتها، حرکت در جهتی که مماس بر قیدهای فعال و عمود بر گرادیان (یعنی شیب صفر) باشد امکان پذیر است، یعنی:

$$\mathbf{s}^T \nabla f = \mathbf{s}^T \nabla g_j = 0, \quad j \in I_A. \quad (5.1.13)$$

اثر چنان حرکتی روی تابع هدف و قیدها تنها از مشتقات بالاتر بدست می آید. در بعضی از حالتها حرکتی در این جهت می تواند تابع هدف را بدون نقض قید کاهش دهد، هر چند شرایط کان-تاکر برآورده شده باشند. بنابراین، شرایط کان-تاکر برای بهینگی لازم ولی کافی نیستند.

وقتی تعداد قیدهای فعال برابر تعداد متغیرهای طراحی باشد شرایط کان-تاکر کافی است. در این حالت معادله (۵.۱.۱۳) نمی تواند با  $\mathbf{s} \neq 0$  برآورده شود، زیرا  $\nabla g_j$  شامل  $n$  جهت مستقل خطی است (در فضای  $n$  بعدی، یک بردار نمی تواند بر  $n$  بردار مستقل خطی عمود باشد). وقتی تعداد قیدهای فعال با تعداد متغیرهای طراحی برابر نباشد، شرایط کافی برای بهینگی مشتقات دوم تابع هدف و قیدها را لازم

دارد. شرط کافی بهینگی این است که ماتریس هسیان تابع لاگرانژین در زیر فضای مماس بر قیدهای فعال معین مثبت باشد. اگر به عنوان مثال قیدهای تساوی را در نظر بگیریم، ماتریس هسیان لاگرانژین عبارت است از:

$$\nabla^2 \mathcal{L} = \nabla^2 f - \sum_{j=1}^{n_e} \lambda_j \nabla^2 h_j. \quad (5.1.14)$$

شرط کافی برای بهینگی عبارت است از:

$$\mathbf{s}^T \nabla h_j = 0, \quad j = 1, \dots, n_e. \quad \text{برای همه } \mathbf{s} \text{ هایی که } \mathbf{s}^T (\nabla^2 \mathcal{L}) \mathbf{s} > 0, \quad (5.1.15)$$

وقتی قیدهای نامساوی وجود دارند، لازم است بردار  $\mathbf{s}$  بر گرادینانهای قیدهای فعال با ضریبگر لاگرانژ مثبت عمود باشد. برای قیدهای فعال با ضریبگر لاگرانژ صفر،  $\mathbf{s}$  باید شرط زیر را برآورده سازد:

$$g_j = 0 \quad \text{و} \quad \lambda_j = 0 \quad \text{وقتی} \quad \mathbf{s}^T \nabla g_j \geq 0 \quad (5.1.16)$$

### مثال ۵.۱.۱

مینیمم تابع

$$f = -x_1^3 - 2x_2^2 + 10x_1 - 6 - 2x_2^3,$$

را با توجه به محدودیتهای زیر بیابید

$$g_1 = 10 - x_1 x_2 \geq 0,$$

$$g_2 = x_1 \geq 0,$$

$$g_3 = 10 - x_2 \geq 0.$$

شرایط کان تاكر عبارتند از:

$$-3x_1^2 + 10 + \lambda_1 x_2 - \lambda_2 = 0,$$

$$-4x_2 - 6x_2^2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_3 = 0.$$

باید تمامی حالت‌های ممکن فعالیت قیدها بررسی شود.

## بخش ۵.۱: شرایط کان-تاکر ۴۴۳

ساده ترین حالت وقتی است که هیچ قیدی فعال نباشد،  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . داریم  $x_1 = 1.826$ ،  $x_2 = 0$ ،  $f = 6.17$ . واضح است که ماتریس هسیان لاگرانژین

$$\nabla^2 \mathcal{L} = \begin{bmatrix} -6x_1 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & -4 - 12x_2 \end{bmatrix},$$

معنی منفی است، پس این نقطه یک ماکزیمم است. بعد از آن فرض می کنیم اولین قید فعال باشد، پس  $x_1 x_2 = 10$ ، پس  $x_1 \neq 0$  و  $x_2 \neq 0$  و بنابراین  $\lambda_2 = 0$ . برای قید سوم دو امکان وجود دارد. اگر فعال باشد داریم  $x_1 = 1$ ،  $x_2 = 10$ ،  $\lambda_1 = -0.7$  و  $\lambda_3 = 639.3$ ، پس این نقطه نه یک مینیمم است و نه یک ماکزیمم. اگر قید سوم فعال نباشد  $\lambda_3 = 0$  و سه رابطه زیر را بدست می آوریم.

$$\begin{aligned} -3x_1^2 + 10 + \lambda_1 x_2 &= 0, \\ -4x_2 - 6x_2^2 + \lambda_1 x_1 &= 0, \\ x_1 x_2 &= 10. \end{aligned}$$

تنها جواب این معادلات که قیده‌های روی  $x_1$  و  $x_2$  برآورده کند عبارت است از:

$$x_1 = 3.847, \quad x_2 = 2.599, \quad \lambda_1 = 13.24, \quad f = -73.08.$$

این نقطه شرایط کان-تاکر برای یک مینیمم را برآورده می کند. با این وجود هسیان لاگرانژین در این نقطه

$$\nabla^2 \mathcal{L} = \begin{bmatrix} -23.08 & 13.24 \\ 13.24 & -35.19 \end{bmatrix},$$

معین منفی است، پس شرط کافی را نمی تواند برآورده کند. در حقیقت، بررسی تابع  $f$  در نقاط همسایه در امتداد  $x_1 x_2 = 10$  روشن می کند که نقطه یک مینیمم نیست.

اکنون این امکان را که  $g_1$  فعال نباشد در نظر می گیریم، پس  $\lambda_1 = 0$  و

$$\begin{aligned} -3x_1^2 + 10 - \lambda_2 &= 0, \\ -4x_2 - 6x_2^2 + \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

ما قبلاً امکان این که هر دو  $\lambda$  صفر باشند را بررسی کردیم، پس لازم است تنها سه امکان دیگر را مورد توجه قرار دهیم که یکی از این ضربگرهای لاگرانژ غیر صفر است یا هر دو غیر صفرند. اولین حالت عبارت است از:  $\lambda_2 \neq 0$ ،  $\lambda_3 = 0$ ، آن گاه  $g_2 = 0$  داریم  $x_1 = 0$ ،  $x_2 = 0$  و  $\lambda_2 = 10$  و

$f = -6$ ، یا  $x_1 = 0$ ،  $x_2 = -2/3$ ،  $\lambda_2 = 10$ ، و  $f = -6.99$ . هر دو نقطه شرایط کان-تاکر را برای مینیمم بودن برآورده می کنند، ولی شرایط کافی برآورده نمی شود. در حقیقت، بردارهای مماس بر قیدهای فعال (که فقط  $x_1 = 0$  است) به شکل  $s^T = (0, a)$  هستند و به آسانی می توان دید که  $s^T \nabla^2 \mathcal{L} s < 0$ . همچنین به راحتی می توان دید که این نقاط با کاهش خیلی کم در  $x_2$  مینیمم نیستند.

حالت بعد عبارت است از  $\lambda_3 \neq 0$ ،  $\lambda_2 = 0$ ، بنابراین  $g_3 = 0$ . داریم  $x_1 = 1.826$ ،  $x_2 = 10$ ،  $\lambda_3 = 640$  و  $f = -2194$ . این نقطه شرایط کان-تاکر را برآورده می کند، ولی این هم مینیمم نیست. به آسانی می توان دید که  $\nabla^2 \mathcal{L}$  در این حالت معین منفی است و شرط کافی نمی تواند برآورده شود. در نهایت، حالت  $x_1 = 0$ ،  $x_2 = 10$ ،  $\lambda_2 = 10$ ،  $\lambda_3 = 640$  و  $f = -2206$  را در نظر می گیریم. اکنون شرایط کان-تاکر برآورده می شوند، و تعداد قیدهای فعال برابر تعداد متغیرهای طراحی است، بنابراین این نقطه یک مینیمم است.

## ۵.۱.۲ مسائل محدب

دسته ای از مسائل، که مسائل محدب نامیده می شوند، وجود دارند که برای آنها شرایط کان-تاکر برای یک مینیمم فراگیر نه تنها لازم بلکه کافی نیز هستند. برای تعریف مسائل محدب لازم است مفهوم تحدب مجموعه ای از نقاط و تحدب یک تابع را درک کنیم. مجموعه ای از نقاط  $S$  را زمانی محدب گویند که تمامی قطعه خط واصل بین دو نقطه در  $S$  نیز در  $S$  باشد. یعنی

$$(5.1.17) \quad \text{اگر } x_1, x_2 \in S \text{ آن گاه } \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in S \quad \text{که } 0 < \alpha < 1$$

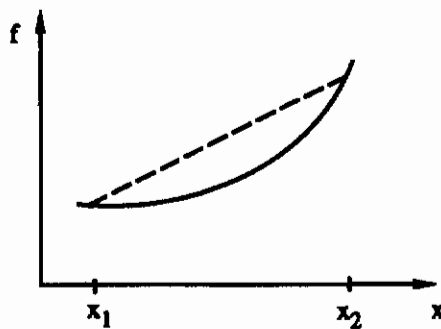
یک تابع زمانی محدب است که داشته باشیم:

$$(5.1.18) \quad f[\alpha x_2 + (1 - \alpha)x_1] \leq \alpha f(x_2) + (1 - \alpha)f(x_1), \quad 0 < \alpha < 1$$

این رابطه به صورت شکل برای یک تابع یک متغیره در شکل (۵.۱.۲) نشان داده شده است. قطعه خط مستقیمی که هر دو نقطه روی منحنی را به هم وصل می کند، بالای منحنی قرار می گیرد. همچنین توجه می کنیم که مشتق دوم  $f$  نامنفی است،  $f''(x) \geq 0$ . می توان نشان داد که یک تابع  $n$  متغیره زمانی محدب است که ماتریس مشتقات دوم آن نیمه معین مثبت باشد.

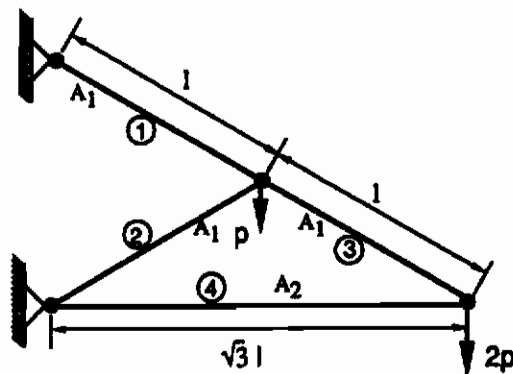
بخش ۵.۱: شرایط کان-تاکر ۲۲۵

یک مسأله بهینه سازی محدب تابع هدف محدب و یک ناحیه قابل قبول محدب دارد. می توان نشان داد ناحیه قابل قبول زمانی محدب است که تمامی قیدهای نامساوی  $g$  مقعر (یعنی  $g$  - محدب است) بوده و قیدهای تساوی خطی باشند. یک مسأله بهینه سازی محدب تنها یک مینیمم دارد، و شرایط کان-تاکر برای تأیید آن کافی است. تحدب بیشتر مسائل بهینه سازی واقعی را نمی توان تشخیص داد. با این وجود، نظریه برنامه ریزی محدب در بهینه سازی سازه ها همچنان از اهمیت بالایی برخوردار است، زیرا اغلب مسائل بهینه سازی را با تعدادی از تقریبهای محدب تقریب می زنند (به فصل ۹ مراجعه کنید). ساده ترین تقریب یک تقریب خطی برای تابع هدف و قیدهاست که یک مسأله برنامه ریزی خطی را به وجود می آورد.



شکل ۵.۱.۲ تابع محدب

مثال ۵.۱.۲



شکل ۵.۱.۳ خرابای چهار عضوی که از نظر ایستایی معین است



طراحی کمترین وزن خرابای چهار عضوی نشان داده شده در شکل (۵.۱.۳) را در نظر بگیرید. برای ساده سازی فرض می کنیم عضوهای ۱ تا ۳ مساحت سطح مقطع یکسان  $A_1$  و عضو ۴ مساحت سطح مقطع  $A_2$  داشته باشد. قیدها عبارتند از حد تنش اعضا و تغییر مکان عمودی انتهای راست خرابا. با بارگذاری نشان داده شده، نیروی اعضا و تغییر مکان عمودی  $\delta$  در انتها عبارت است از:

$$f_1 = 5p, \quad f_2 = -p, \quad f_3 = 4p, \quad f_4 = -2\sqrt{3}p,$$

$$\delta = \frac{6pl}{E} \left( \frac{3}{A_1} + \frac{\sqrt{3}}{A_2} \right).$$

فرض می کنیم تنشهای مجاز در کشش و فشار به ترتیب  $8.74 \times 10^{-4} E$  و  $4.83 \times 10^{-4} E$  باشد، و حد تغییر مکان عمودی بزرگتر نبودن از  $3 \times 10^{-3} l$  باشد. طراحی کمترین وزن مشروط به قیدهای تنش و تغییر مکان برحسب متغیرهای طراحی بی بعد

$$x_1 = 10^{-3} \frac{A_1 E}{p}, \quad x_2 = 10^{-3} \frac{A_2 E}{p},$$

را می شود به شکل زیر رابطه سازی کرد:

$$f = 3x_1 + \sqrt{3}x_2 \quad \text{تابع}$$

$$g_1 = 3 - \frac{18}{x_1} - \frac{6\sqrt{3}}{x_2} \geq 0, \quad \text{رابطه مشروط به}$$

$$g_2 = x_1 - 5.73 \geq 0,$$

$$g_3 = x_2 - 7.17 \geq 0. \quad \text{مینیمم کنید.}$$

شرایط کان-تاکر عبارتند از:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^3 \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

یا

$$3 - \frac{18}{x_1^2} \lambda_1 - \lambda_2 = 0,$$

$$\sqrt{3} - \frac{6\sqrt{3}}{x_2^2} \lambda_1 - \lambda_3 = 0.$$

ابتدا احتمال  $\lambda_1 = 0$  را در نظر بگیرید. آن گاه روشن است که  $\lambda_2 = 3$  و  $\lambda_3 = \sqrt{3}$  و در نتیجه

بخش ۵.۱: شرایط کان-تاکر ۲۲۷

$g_2 = 0$  و  $g_3 = 0$  و از آن جا  $x_1 = 5.73$ ،  $x_2 = 7.17$ ،  $g_1 = -1.59$ ، پس این جواب قابل قبول نیست. نتیجه می گیریم  $\lambda_1 \neq 0$  و این که اولین قید باید در مینیم فعال باشد. اکنون احتمال  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  را در نظر بگیرید. برای مجهولات  $\lambda_1$ ،  $x_2$ ،  $x_1$  دو معادله کان-تاکر و یک معادله  $g_1 = 0$  را داریم. جواب عبارت است از:

$$x_1 = x_2 = 9.464, \quad \lambda_1 = 14.93, \quad f = 44.78.$$

شرایط کان-تاکر برای مینیم برآورده شده است. اگر مسأله محدب باشد، شرایط کان-تاکر برای تضمین مینیم فراگیر بودن نقطه کافی است. تابع هدف و توابع قید  $g_2$  و  $g_3$  خطی اند، پس فقط لازم است  $g_1$  را بررسی کنیم. برای تحدب مسأله باید  $g_1$  مقعر و یا  $-g_1$  محدب باشد. این شرط زمانی برقرار است که ماتریس مشتق دوم  $A_1$  - قید  $-g_1$  - دست کم نیمه معین مثبت باشد.

$$-A_1 = \begin{bmatrix} 36/x_1^3 & 0 \\ 0 & 12\sqrt{3}/x_2^3 \end{bmatrix}.$$

روشن است که برای  $x_1 > 0$  و  $x_2 > 0$ ،  $-A_1$  معین مثبت است. بنابراین مینیمی که یافته ایم یک مینیم فراگیر است. ...

## ۵.۲ مسائل برنامه ریزی درجه دوم

یکی از ساده ترین شکل های مسائل بهینه سازی مقید غیرخطی، شکل مسأله برنامه ریزی درجه دوم (QP) است. یک مسأله QP کلی یک تابع هدف درجه دوم و قید های تساوی و نامساوی خطی دارد. برای سادگی مسأله ای را با قید نامساوی تنها که  $n_g$  قید دارد در نظر می گیریم که به شکل زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} && \text{تابع} \\ \mathbf{A} \mathbf{x} &\geq \mathbf{b}, && \text{را با شرایط} \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n. && \text{مینیم کنید.} \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

قید های خطی یک حوزه قابل قبول محدب تشکیل می دهند. اگر تابع هدف نیز محدب باشد، آن گاه یک مسأله بهینه سازی محدب داریم که برای آن، همچنان که در بخش قبلی بحث شد، شرایط کان-تاکر

برای بهیمنگی فراگیر مسأله کافی است. بنابراین، داشتن یک ماتریس  $Q$  نیمه معین مثبت یا معین مثبت یک مینیمم فراگیر را در صورتی که وجود داشته باشد، برای جواب مسأله تضمین می کند. برای بسیاری از مسائل بهینه سازی شکل درجه دوم  $x^T Q x$  یا معین مثبت یا نیمه معین مثبت است. بنابراین، یکی از روشهای حل مسائل  $QP$  حل شرایط کان-تاکر است.

با نوشتن تابع لاگرانژ مسأله (۵.۲.۱) شروع می کنیم

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu, t, s) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x - \lambda^T (Ax - \{t_j^2\} - b) - \mu^T (x - \{s_i^2\}), \quad (5.2.2)$$

که  $\lambda$  و  $\mu$  به ترتیب بردارهای ضربگرهای لاگرانژ برای قیدهای نامساوی و قیدهای نامنفی بودن، و  $\{t_j^2\}$  و  $\{s_i^2\}$  بردارهای متغیرهای کمبود مثبت برای آنهاست. شرایط لازم برای یک نقطه ایستا با دیفرانسیل گیری لاگرانژین نسبت به  $x, \lambda, \mu, t, s$  بدست می آید.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = c - Qx - A^T \lambda - \mu = 0, \quad (5.2.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = Ax - \{t_j^2\} - b = 0, \quad (5.2.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = x - \{s_i^2\} = 0, \quad (5.2.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_j} = 2\lambda_j t_j = 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \quad (5.2.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} = 2\mu_i s_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.2.7)$$

در حالی که  $n_g$  تعداد قیدهای نامساوی، و  $n$  تعداد متغیرهای طراحی است. ما یک بردار جدید  $\{q_j\} = \{t_j^2\}$ ،  $j = 1, \dots, n_g$  ( $q \geq 0$ ) تعریف می کنیم. پس از ضرب معادله های (۵.۲.۶) و (۵.۲.۷) به ترتیب در  $\{t_j\}$  و  $\{s_i\}$  و حذف  $\{s_i\}$  از معادله آخر با استفاده از معادله (۵.۲.۵)، می توانیم شرایط کان-تاکر را دوباره به شکل زیر می نویسیم:

$$Qx + A^T \lambda + \mu = c, \quad (5.2.8)$$

$$Ax - q = b, \quad (5.2.9)$$

$$\lambda_j q_j = 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \quad (5.2.10)$$

$$\mu_i x_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.2.11)$$

$$x \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0. \quad (5.2.12)$$

## بخش ۵.۳: محاسبه ضربگرهای لاگرانژ ۲۲۹

معادله‌های (۵.۲.۸) و (۵.۲.۹) یک مجموعه  $n_g + n$  معادله خطی برای جواب مجهولات  $x_i$ ،  $\lambda_j$ ،  $\mu_i$  و  $q_j$  می‌دهد که باید معادله‌های (۵.۲.۱۰) و (۵.۲.۱۱) را نیز برآورده سازد. برخلاف غیر خطی بودن معادله‌های (۵.۲.۱۰) و (۵.۲.۱۱)، این مسأله همچنان که ولف<sup>۱</sup> [3] پیشنهاد کرد می‌تواند با استفاده از روشی که در بخش ۳.۶.۳ برای تولید یک جواب قابل قبول اصلی به کمک متغیرهای مصنوعی تشریح شد، حل شود. با معرفی مجموعه‌ای از متغیرهای مصنوعی  $y_i$ ،  $i = 1, \dots, n$ ، یک تابع هزینه مصنوعی که باید مینیم شود را تعریف می‌کنیم،

$$\sum_{i=1}^n y_i \quad \text{عبارت} \quad (5.2.13)$$

$$Qx + A^T \lambda + \mu + y = c, \quad \text{را مشروط به} \quad (5.2.14)$$

$$Ax - q = b, \quad (5.2.15)$$

$$x \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \text{و} \quad y \geq 0. \quad \text{مینیم کنید.} \quad (5.2.16)$$

معادله‌های (۵.۲.۱۳) تا (۵.۲.۱۶) را می‌توان با استفاده از روش سیمپلکس استاندارد حل کرد به شرطی که (۵.۲.۱۰) و (۵.۲.۱۱) نیز برآورده شوند. این شرط می‌تواند با اعمال این که متغیرهای  $\lambda_j$  و  $q_j$  و  $\mu_i$  و  $x_i$  همزمان در جواب اصلی وجود نداشته باشند، در الگوریتم سیمپلکس پیاده شود. یعنی در صورت وجود  $x_i$  در متغیرهای اصلی از ورود متغیر غیر اصلی  $\mu_i$  به عنوان اصلی جلوگیری می‌کنیم.

روشهای دیگر حل مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم نیز وجود دارد که خواننده را برای جزئیات بیشتر به مرجع گیل<sup>۲</sup> و دیگران [4]، صفحه ۱۸۰-۱۷۷) ارجاع می‌دهیم.

## ۵.۳ محاسبه ضربگرهای لاگرانژ

همچنان که در مثال ۵.۱.۱ می‌توان دید، بدست آوردن مستقیم مینیم از شرایط کان-تاکر ممکن است مشکل باشد زیرا باید ترکیبهای بسیاری از قیدهای فعال و غیر فعال را در نظر بگیریم، و این کار در حالت کلی متضمن حل معادلات با درجه غیر خطی بالاست. شرایط کان-تاکر، اغلب برای بررسی این که یک نقطه مینیم نامزد شرایط لازم را برآورده می‌سازد یا خیر به کار می‌رود. در چنین حالتی به

1) Wolfe

2) Gill

۲۳۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۵: بهینه سازی مقید)

محاسبه ضربگرهای لاگرانژ (که ضربگر کان- تاکر نیز نامیده می شوند) در یک نقطه داده شده  $\mathbf{x}$  نیاز داریم. همچنان که در بخش بعدی خواهیم دید، ممکن است بخواهیم ضربگرهای لاگرانژ را به منظور حدس میزان حساسیت جواب بهین به تغییرات کوچک در تعریف مسأله محاسبه کنیم. برای محاسبه ضربگرهای لاگرانژ با نوشتن معادله (۵.۱.۶) بر حسب علایم ماتریسی شروع می کنیم.

$$\nabla f - N\lambda = 0, \quad (5.3.1)$$

در حالی که ماتریس  $N$  به شکل زیر تعریف می شود:

$$n_{ij} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad j = 1, \dots, r, \quad \text{و} \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.3.2)$$

ما تنها قیدهای فعال و ضربگرهای لاگرانژ آنها را در نظر می گیریم، و فرض می کنیم تعداد آنها  $r$  تا باشد.

معمولاً، تعداد  $r$ ، قیدهای فعال کمتر از  $n$  است، بنابراین با  $n$  معادله بر حسب  $r$  مجهول، معادله (۵.۳.۱) یک دستگاه معادلات فرامعین است. فرض می کنیم گرادیانهای قیدها به طور خطی مستقلند، بنابراین رتبه  $r$ ،  $N$  است. اگر شرایط کان- تاکر برآورده شوند معادله ها سازگارند و یک جواب دقیق داریم. بنابراین می توانیم از یک زیر مجموعه از  $r$  معادله استفاده کنیم تا ضربگرهای لاگرانژ را بدست آوریم. با این وجود، این رهیافت ممکن است خطاها را مضاعف کند. به جای آن می توانیم از رهیافت کمترین مربعات برای حل معادله ها استفاده کنیم. بردار باقیمانده  $\mathbf{u}$  را به شکل زیر تعریف می کنیم.

$$\mathbf{u} = N\lambda - \nabla f, \quad (5.3.3)$$

جواب کمترین مربعات معادله (۵.۳.۱) مربع نرم اقلیدسی باقیمانده نسبت به  $\lambda$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = (N\lambda - \nabla f)^T (N\lambda - \nabla f) = \lambda^T N^T N \lambda - 2\lambda^T N^T \nabla f + \nabla f^T \nabla f. \quad (5.3.4)$$

را مینیمم می سازد. برای مینیمم سازی  $\|\mathbf{u}\|^2$  از آن نسبت به هر یک از ضربگرهای لاگرانژ مشتق می گیریم. داریم:

بخش ۵.۳: محاسبه ضریب‌های لاگرانژ ۲۳۱

$$2N^T N \lambda - 2N^T \nabla f = 0, \quad (5.3.5)$$

یا

$$\lambda = (N^T N)^{-1} N^T \nabla f. \quad (5.3.6)$$

این بهترین جواب کمترین مربعات است. با این وجود، اگر شرایط کان-تاکر برآورده شوند، این جواب باید جواب دقیق معادله (۵.۳.۱) باشد. با جایگزینی از معادله (۵.۳.۶) در معادله (۵.۳.۱) داریم:

$$P \nabla f = 0, \quad (5.3.7)$$

در حالی که:

$$P = I - N(N^T N)^{-1} N^T. \quad (5.3.8)$$

$P$  ماتریس تصویر نامیده می‌شود. در بخش ۵.۵ نشان داده خواهد شد که این ماتریس یک بردار را در زیر فضای مماس بر قیدهای فعال تصویر می‌کند. معادله (۵.۳.۷) گویای این مطلب است که برای برآورده شدن شرایط کان-تاکر، گرادیان تابع هدف باید بر آن زیر فضا عمود باشد. در عمل معادله (۵.۳.۶) برای محاسبه ضریب‌های لاگرانژ شهرتی ندارد. یک دلیل آن این است که روش بدخیم است و دلیل دیگر این که روش کارا نیست و بازده خوبی ندارد. یک روش کاراتر و با همگرایی و خوش خیمی بهتر برای محاسبه کمترین مربعات بر مبنای عامل گیری کیوآر ( $QR$ ) ماتریس  $N$  استوار است. عامل گیری  $QR$  ماتریس  $N$  از یک ماتریس مثلثی بالایی  $R$  تشکیل شده که  $r \times r$  است و یک ماتریس متعامد  $Q$  که  $n \times n$  است. آن چنان که

$$QN = \begin{pmatrix} Q_1 N \\ Q_2 N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3.9)$$

در این جا  $Q_1$  ماتریسی است که از اولین  $r$  سطر  $Q$  تشکیل شده،  $Q_2$  شامل آخرین  $n - r$  سطر  $Q$  است و صفر نمایانگر یک ماتریس صفر  $r \times (n - r)$  است (برای جزئیات بیشتر عامل گیری  $QR$  به کتابهای

۴۴۲ مبانی بهینه سازی مازدها (فصل ۵: بهینه سازی مقید)

تحلیل عددی دالکویست و جارك<sup>۱</sup> [5] مراجعه کنید). از آن جا  $Q$  که یک ماتریس متعامد است، نرم اقلیدسی  $Qu$  مانند نرم اقلیدسی  $u$  است، یا:

$$\|u\|^2 = \|Qu\|^2 = \|QN\lambda - Q\nabla f\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \lambda - Q\nabla f \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} R\lambda - Q_1\nabla f \\ -Q_2\nabla f \end{pmatrix} \right\|^2.$$

(۵.۳.۱۰)

از این شکل می توان دید که  $\|u\|^2$  با انتخاب  $\lambda$  به شکل:

$$R\lambda = Q_1\nabla f. \quad (۵.۳.۱۱)$$

مینیم می شود. آخرین  $n - r$  سطر ماتریس  $Q$  که با  $Q_2$  نشان داده شد نیز با توضیح زیر مهمند. آنها بردارهای متعامدی هستند که فضای تهی  $N^T$  را به وجود می آورند. یعنی حاصلضرب  $N^T$  در هر کدام از این بردارها صفر است.

### مثال ۵.۳.۱

بررسی کنید آیا نقطه  $(-2, -2, 4)$  یک مینیم محلی مسأله زیر است یا خیر؟

$$\begin{aligned} f &= x_1 + x_2 + x_3, \\ g_1 &= 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0, \\ g_2 &= x_3 - 4 \geq 0, \\ g_3 &= x_2 + 8 \geq 0. \end{aligned}$$

تنها دو قید اول در  $(-2, -2, 4)$  بحرانیند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} &= -2x_1 = 4, & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} &= -2x_2 = 4, & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} &= 0, & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} &= 1. \end{aligned}$$

بخش ۵.۴: حساسیت جواب بهین به پارامترهای مسأله ۴۴۳

بنابراین:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla f = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{N}^T \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^T \nabla f = \begin{Bmatrix} 8 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\lambda = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T \nabla f = \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

همچنین

$$[\mathbf{I} - \mathbf{N}(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T] \nabla f = 0.$$

معادله (۵.۳.۷) برآورده شده و تمامی ضربگرهای لاگرانژ مثبتند، بنابراین شرایط کان-تاکر برای یک مینیمم برآورده شده است. • • •

#### ۵.۴ حساسیت جواب بهین به پارامترهای مسأله

ضربگرهای لاگرانژ نه تنها برای بررسی بهینگی مفیدند، بلکه اطلاعاتی در مورد میزان حساسیت جواب بهین به پارامترهای مسأله نیز فراهم می کنند. این نقش آنها در کاربردهای عملی بسیار با ارزش است. در بیشتر مسائل بهینه سازی طراحی مهندسی تعداد زیادی پارامتر مانند خواص مواد، ابعاد و سطوح بارگذاری وجود دارد که در بهینه سازی ثابتند. اغلب حساسیت جواب بهین به این پارامترهای مسأله مورد نیاز است که یا به سبب ندانستن دقیق این پارامترهاست، یا به سبب این است که اگر ببینیم آنها روی طراحی بهین اثر زیادی دارند بتوانیم آنها را تغییر دهیم.

اکنون فرض می کنیم تابع هدف و قیدها به پارامتر  $p$  بستگی دارند و مسأله بهینه سازی به شکل

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, p) & \quad (5.4.1) \\ g_j(\mathbf{x}, p) & \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g. \end{aligned} \quad \text{را چنان مینیمم کنید که}$$

جواب مسأله با  $\mathbf{x}^*(p)$  نشان داده می شود و مقدار تابع هدف مربوط  $f^*(p) = f(\mathbf{x}^*(p), p)$  است. می خواهیم مشتقات  $\mathbf{x}^*$  و  $f^*$  را نسبت به  $p$  بیابیم. معادلاتی که جواب بهین را می دهند شرایط



۴۳۴ مبانی بهینه‌سازی سازه‌ها (فصل ۵: بهینه‌سازی مقید)

کان-تاکر، معادله (۵.۳.۱)، و مجموعه قیدهای فعال

$$g_a = 0. \quad (5.4.2)$$

است که  $g$  نشانگر بردار تابع قید فعال است. معادله‌های (۵.۳.۱) و (۵.۴.۲) با  $x^*(p)$  برای تمامی مقادیر  $p$  که مجموعه قیدهای فعال را تغییر ندهند برآورده می‌شوند. بنابراین، مشتقات این معادله‌ها نسبت به  $p$  صفر است، در صورتی که بستگی ضمنی  $x$  به  $\lambda$  به  $p$  را در نظر گرفته باشیم. با دیفرانسیل‌گیری از معادله‌های (۵.۳.۱) و (۵.۴.۲) نسبت به  $p$  داریم

$$(A - Z) \frac{dx^*}{dp} - N \frac{d\lambda}{dp} + \frac{\partial}{\partial p} (\nabla f) - \left( \frac{\partial N}{\partial p} \right) \lambda = 0, \quad (5.4.3)$$

$$N^T \frac{dx^*}{dp} + \frac{\partial g_a}{\partial p} = 0, \quad (5.4.4)$$

در صورتی که  $A$  ماتریس هسیان تابع هدف  $f$ ،  $a_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$  و  $Z$  ماتریسی است که درایه‌های آن عبارتند از

$$z_{kl} = \sum_j \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_k \partial x_l} \lambda_j. \quad (5.4.5)$$

معادله‌های (۵.۴.۳) و (۵.۴.۴) یک دستگاه معادلات همزمان از مشتقات متغیرهای طراحی و ضربگرهای لاگرانژ است. حالت‌های خاص متفاوتی از این دستگاه توسط سویسکی<sup>۱</sup> و دیگران [6] مورد بحث قرار گرفته است.

اغلب ما به مشتقات متغیرهای طراحی یا ضربگرهای لاگرانژ نیاز نداریم و تنها مشتقات تابع هدف مورد نیاز است. در این حالت تحلیل حساسیت می‌تواند بسیار ساده‌تر شود. می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{df}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i^*}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} + (\nabla f)^T \frac{dx^*}{dp}. \quad (5.4.6)$$

با استفاده از معادله‌های (۵.۳.۱) و (۵.۴.۴) داریم:

$$\frac{df}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} - \lambda^T \frac{\partial g_a}{\partial p}. \quad (5.4.7)$$

بخش ۵.۴: حساسیت جواب بهین به پارامترهای مسأله ۲۳۵

معادله (۵.۴.۷) نشان می‌دهد که ضربگرهای لاگرانژ میزانی از اثر تغییر قیدها بر روی تابع هدف می‌دهند. به عنوان مثال قیدی به شکل  $g_j(x) = G_j(x) - p \geq 0$  در نظر بگیرید. با افزایش  $p$  برآورده شدن قید را سخت‌تر می‌کنیم. فرض کنید قیدهای متعددی بحرانینند ولی  $p$  تنها این قید را متأثر می‌کند. می‌بینیم که  $\partial g_j / \partial p = -1$  و از معادله (۵.۴.۷)،  $df/dp = \lambda_j$  و این یعنی  $\lambda_j$  عبارت است از هزینه حاشیه‌ای که ما به عنوان افزایش تابع هزینه برای سخت برآورده شدن  $g_j$  می‌پردازیم. تعبیر ضربگرهای لاگرانژ به عنوان هزینه حاشیه‌ای قیدها دلیل این مطلب که در بهین تمامی ضربگرهای لاگرانژ باید نامنفی باشند را توضیح می‌دهد. یک ضربگر لاگرانژ منفی نشانگر این است که می‌توانیم با سخت کردن برآورده شدن قید تابع هدف را کاهش دهیم که کار بیهوده‌ای است.

#### مثال ۵.۴.۱

مسأله بهینه سازی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} f &= x_1 + x_2 + x_3, \\ g_1 &= p - x_1^2 - x_2^2 \geq 0, \\ g_2 &= x_3 - 4 \geq 0, \\ g_3 &= x_2 + p \geq 0. \end{aligned}$$

این مسأله با  $p = 8$  در مثال ۵.۳.۱ تحلیل شد و جواب بهین  $(-2, -2, 4)$  بود. می‌خواهیم مشتق این جواب بهین را نسبت به  $p$  بیابیم. در نقطه بهین داریم  $f = 0$  و  $\lambda^T = (0.25, 1.0)$  و دو قید اول بحرانیند. می‌توانیم مشتق تابع هدف را از معادله (۵.۴.۷) محاسبه کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial g_a}{\partial p} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

بنابراین:

$$\frac{df}{dp} = -0.25.$$

برای محاسبه مشتقات متغیرهای طراحی و قیود باید معادله‌های (۵.۴.۳) و (۵.۴.۴) را تشکیل

دهیم. داریم

$$A = 0, \quad \frac{\partial \nabla f}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial p} = 0.$$

۴۳۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۵: بهینه سازی مقید)

تنها  $g_1$  مشتق دوم غیر صفر  $= -2$   $\partial^2 g_1 / \partial x_1^2 = \partial^2 g_1 / \partial x_2^2$  دارد، بنابراین از معادله (۵.۴.۵) داریم:

$$z_{11} = -2\lambda_1 = -0.5, \quad z_{22} = -2\lambda_1 = -0.5, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با دانستن  $\mathbf{N}$  از مثال ۱.۳.۵، معادله (۵.۴.۳) به ما روابط زیر را می دهد.

$$5\dot{x}_1 - 4\dot{\lambda}_1 = 0,$$

$$5\dot{x}_2 - 4\dot{\lambda}_1 = 0,$$

$$\dot{\lambda}_2 = 0,$$

در صورتی که نقطه<sup>۱</sup> بالای حروف مشتق نسبت به  $p$  را نشان می دهد. از معادله (۵.۴.۴) داریم:

$$4\dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 + 1 = 0,$$

$$\dot{x}_3 = 0.$$

جواب این پنج معادله<sup>۲</sup> زوج شده عبارت است از:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = -0.125, \quad \dot{x}_3 = 0, \quad \dot{\lambda}_1 = -0.0156, \quad \dot{\lambda}_2 = 0.$$

می توانیم با تغییر  $p$  از ۸ به ۹ و بهینه سازی مجدد، مشتقات تابع هدف و متغیرهای طراحی را بررسی کنیم، و به آسانی می توان دید که داریم  $f = -0.242$  و  $x_3 = 4$ ،  $x_1 = x_2 = -2.121$ . این مقادیر به خوبی با برون یابی خطی مبتنی بر مشتقها که  $f = -0.25$  و  $x_3 = 4$ ،  $x_1 = x_2 = -2.125$  را می دهد قابل مقایسه اند. ...

## ۵.۵ روشهای تصویر گرادیان و گرادیان کاهش یافته

روش تصویر گرادیان روزن<sup>۱</sup> بر اساس تصویر جهت جست و جو در زیر فضای مماس بر قیدهای فعال استوار است. ابتدا بیابیم روش را برای قیدهای خطی مطالعه کنیم [7]. مسأله مقید را به شکل زیر تعریف می کنیم.

$f(\mathbf{x})$  را چنان مینیمم کنید که

$$g_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i - b_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g. \quad (5.5.1)$$

1) Rosen

بخش ۵.۵: روشهای تصویرگرادیان و گرادیان کاهش یافته ۴۳۷

به شکل برداری

$$g_j = \mathbf{a}_j^T \mathbf{x} - b_j \geq 0. \quad (5.5.2)$$

اگر تنها  $m$  قید فعال را انتخاب کنیم ( $j \in I_A$ )، می توان معادله های قید را به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{g}_a = \mathbf{N}^T \mathbf{x} - \mathbf{b} = 0, \quad (5.5.3)$$

که در آن  $\mathbf{g}_a$  بردار قیدهای فعال است و ستونهای ماتریس  $\mathbf{N}$  گرادیانهای این قیدها هستند. فرض اساسی روش تصویرگرادیان این است که  $\mathbf{x}$  روی زیر فضای مماس بر قیدهای فعال قرار داد. اگر

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha \mathbf{s}, \quad (5.5.4)$$

و  $\mathbf{x}_i$  و  $\mathbf{x}_{i+1}$  هر دو معادله (5.5.3) را برآورده سازند، آن گاه،

$$\mathbf{N}^T \mathbf{s} = 0 \quad (5.5.5)$$

اگر بخواهیم جهت تندترین کاهش معادله (5.5.5) را برآورده سازد، می توانیم مسأله را به شکل زیر داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^T \nabla f \\ \mathbf{N}^T \mathbf{s} = 0, \quad \text{را چنان مینیمم کنید که} \\ \mathbf{s}^T \mathbf{s} = 1. \end{aligned} \quad (5.5.6) \quad \text{و}$$

یعنی می خواهیم جهتی را بیابیم که مشتق سوئی آن منفی ترین باشد و معادله (5.5.5) را برآورده سازد. ضربگرهای لاگرانژ  $\lambda$  و  $\mu$  را برای تشکیل لاگرانژین استفاده می کنیم.

$$\mathcal{L}(\mathbf{s}, \lambda, \mu) = \mathbf{s}^T \nabla f - \mathbf{s}^T \mathbf{N} \lambda - \mu (\mathbf{s}^T \mathbf{s} - 1). \quad (5.5.7)$$

شرط ایستا بودن  $\mathcal{L}$  عبارت است از:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} = \nabla f - \mathbf{N} \lambda - 2\mu \mathbf{s} = 0 \quad (5.5.8)$$

۲۳۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۵: بهینه سازی مقید)

با پیش ضرب معادله (۵.۵.۸) در  $N^T$  و استفاده از معادله (۵.۵.۵) داریم

$$N^T \nabla f - N^T N \lambda = 0, \quad (5.5.9)$$

و

$$\lambda = (N^T N)^{-1} N^T \nabla f. \quad (5.5.10)$$

بنابراین از معادله (۵.۵.۸) داریم

$$s = \frac{1}{2\mu} [I - N(N^T N)^{-1} N^T] \nabla f = \frac{1}{2\mu} P \nabla f. \quad (5.5.11)$$

$P$  عبارت است از ماتریس تصویر که در معادله (۵.۳.۸) تعریف شد. ضریب  $1/2\mu$  قابل توجه نیست زیرا  $s$  تنها جهت جست و جو را تعریف می کند، بنابراین در حالت کلی  $s = -P \nabla f$  را استفاده می کنیم. برای این که نشان دهیم  $P$  خاصیت تصویر دارد، لازم است ثابت کنیم که اگر  $w$  یک بردار اختیاری باشد، آن گاه  $Pw$  در زیر فضای مماس بر قیدهای فعال است، یعنی  $Pw$  رابطه

$$N^T Pw = 0. \quad (5.5.12)$$

را برآورده می سازد. این رابطه را می توان با استفاده از تعریف  $P$  به آسانی بدست آورد. معادله (۵.۳.۸) که ماتریس تصویر  $P$  را تعریف می کند، کاراترین راه محاسبه آن را بیان نمی کند. در عوض، می توان نشان داد که:

$$s^T \nabla f = s^T \nabla g_j = 0, \quad j \in I_A. \quad (5.5.13)$$

که در آن ماتریس  $Q_2$  از آخرین  $n - r$  سطر عامل  $Q$  در عامل گیری QR از  $N$  تشکیل شده است (به معادله (۵.۳.۹) مراجعه کنید).

یک صورت از روش تصویر گرادیان به عنوان روش گرادیان کاهش یافته کلی شناخته می شود که توسط عبادی و کارپنتیر<sup>[8]</sup> ارائه شده است. به عنوان قدم اول  $r$  سطر به طور خطی مستقل  $N$  را انتخاب

## بخش ۵.۵: روشهای تصویر گرایان و گرایان کاهش یافته ۲۴۹

می کنیم و ترانواده آنها را با  $N_1$  نشان می دهیم و  $N^T$  را به شکل زیر افراز می کنیم:

$$N^T = [N_1 \quad N_2]. \quad (5.5.14)$$

در قدم بعدی معادله (۵.۵.۵) را برای مؤلفه های  $S_i$  بردار جهت در نظر می گیریم. ۳ معادله 'مربوط به  $N_1$  برای حذف ۳ مؤلفه 'S استفاده می شود و یک مسأله با مرتبه 'کاهش یافته برای بردار جهت بدست می آید.

هنگامی که  $N_1$  را مشخص کردیم به آسانی می توانیم  $Q_2$  را بدست آوریم که عبارت است از:

$$Q_2^T = \begin{bmatrix} -N_1^{-1}N_2 \\ I \end{bmatrix}. \quad (5.5.15)$$

معادله (۵.۵.۱۵) را می توان با بررسی  $N^T Q_2^T = 0$  بدست آورد، بنابراین  $Q_2 N = 0$ ، که الزامی است برای  $Q_2$  که باید برآورده سازد (به بحث بعد از معادله (۵.۳.۱۱) مراجعه کنید).

بعد از یافتن  $S$  از معادله (۵.۵.۱۱) می توانیم جست و جو را با مینیم سازی یک بعدی، معادله (۵.۵.۴) ادامه دهیم، مگر این که  $S = 0$  باشد. هنگامی که  $S = 0$  باشد معادله (۵.۳.۷) دلالت می کند که شرایط کان-تاکر برآورده شده اند. آن گاه ضربگرهای لاگرانژ را از معادله (۵.۳.۶) یا معادله (۵.۳.۱۱) محاسبه می کنیم. اگر تمامی مؤلفه های  $\lambda$  منفی باشند، در واقع شرایط کان-تاکر برآورده شده اند و بهینه سازی می تواند متوقف شود. اگر بعضی از ضربگرهای لاگرانژ منفی باشند، نشانگر این است که ضمن عدم امکان بهبود با مجموعه فعلی قیدهای فعال، این امکان وجود دارد که با حذف قیدهایی که ضربگرهای لاگرانژ منفی دارند، حرکت را ادامه داد. یک راهبرد این است که قید مربوط به منفی ترین ضربگرهای لاگرانژ را حذف کرد و محاسبه 'P و S را تکرار کرد. اگر  $S$  غیر صفر شود، یک جست و جوی یک بعدی را می شود شروع کرد. اگر  $S$  همچنان صفر باشد و هنوز ضربگرهای لاگرانژ منفی وجود داشته باشد، یک قید دیگر را حذف می کنیم تا تمامی ضربگرهای لاگرانژ مثبت شوند و شرایط کان-تاکر را برآورده سازیم.

بعد از این که جهت جست و جو تعیین شد، برای بدست آوردن مقدار  $\alpha$  در معادله (۵.۵.۴) یک جست و جوی یک بعدی باید انجام شود. بر خلاف حالت نامقید، قیدهای غیر فعال یک حد بالایی برای مجموعه  $\alpha$  ها به وجود می آورند. با افزایش  $\alpha$ ، بعضی از آن قیدها ممکن است فعال و سپس نقض شوند.

۴۴۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۵: بهینه سازی مقید)

با جایگزینی  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i + \alpha \mathbf{s}$  در معادله (۵.۵.۲) داریم:

$$g_j = \mathbf{a}_j^T (\mathbf{x}_i + \alpha \mathbf{s}) - b_j \geq 0, \quad (5.5.16)$$

یا

$$\alpha \leq -(\mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_i - b_j) / \mathbf{a}_j^T \mathbf{s} = -g_j(\mathbf{x}_i) / \mathbf{a}_j^T \mathbf{s}. \quad (5.5.17)$$

معادله (۵.۵.۱۷) در صورتی معتبر است که  $\mathbf{a}_j^T \mathbf{s} < 0$  باشد. در غیر این صورت، به سبب قید  $\alpha$  محدود بالایی برای  $\alpha$  وجود ندارد. از معادله (۵.۵.۱۷) برای هر قید یک  $\alpha$  دیگر مثلاً  $\alpha_j$  به دست می آوریم. حد بالایی  $\alpha$  مینیمم زیر است.

$$\bar{\alpha} = \min_{\alpha_j > 0, j \in I_A} \alpha_j. \quad (5.5.18)$$

در پایان حرکت، قیدهای جدید ممکن است فعال شوند، بنابراین لازم است مجموعه قیدهای فعال قبل از انجام حرکت جدید بهنگام شود.

این نوع روش تصویر گرادیان که تاکنون ارائه شد یک تعمیم از روش تندترین کاهش است. مانند روش تندترین کاهش ممکن است همگرایی کندی داشته باشد. روش تصویر گرادیان را می توان به شکلی تعمیم داد که به روشهای نیوتن یا شبه نیوتن مربوط شود. در حالت نامقید، این روشها جهت جست و جوی زیر را به کار می برند:

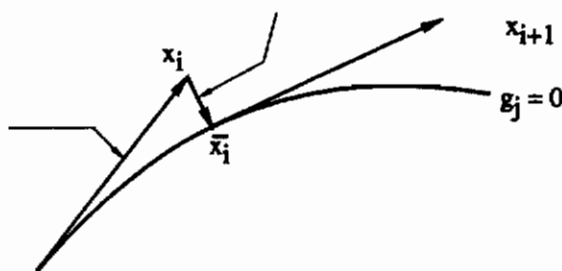
$$\mathbf{s} = -\mathbf{B} \nabla f, \quad (5.5.19)$$

در حالی که  $\mathbf{B}$  وارون ماتریس هسیان  $\mathbf{f}$  یا یک تقریب از آن است. جهتی که از چنین روشی در زیر فضای مماس بر قیدهای فعال به وجود می آید را می توان نشان داد [4] که برابر است با:

$$\mathbf{s} = -\mathbf{Q}_2^T (\mathbf{Q}_2^T \mathbf{A}_L \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}_2 \nabla f, \quad (5.5.20)$$

در حالی که  $\mathbf{A}_L$  هسیان تابع لاگرانژین یا یک تقریب از آن است.

روش تصویر گرادیان توسط روزن برای قیدهای غیر خطی تعمیم یافته است [9]. این روش بر مبنای



شکل ۵.۵.۱ حرکت‌های تصویری و جبرانی

خطی سازی قیدها حول  $x_i$  استوار است، بنابراین:

$$N = [\nabla g_1(x_i), \nabla g_2(x_i), \dots, \nabla g_r(x_i)] . \quad (5.5.21)$$

مشکل اصلی که به سبب غیر خطی بودن قیدها به وجود می آید این است که معمولاً جست و جوی یک بعدی از مرز قید دور می شود. این دور شدن به سبب این است که ما در زیر فضای مماس حرکت می کنیم که دیگر دقیقاً مرزهای قیدها را دنبال نمی کند. بعد از پایان جست و جوی یک بعدی، روزی یک حرکت جبرانی برای برگرداندن  $x$  به مرز قیدها اعمال کرد، (شکل ۵.۵.۱ را مشاهده کنید).

برای یافتن معادله ای برای حرکت جبرانی، ابتدا یادآور می شود که اکنون به جای معادله (۵.۵.۲) از تقریب خطی زیر استفاده می کنیم:

$$g_j \approx g_j(x_i) + \nabla g_j^T(\bar{x}_i - x_i) . \quad (5.5.22)$$

می خواهیم یک تصحیح  $\bar{x}_i - x_i$  در زیر فضای مماس (یعنی  $P(\bar{x}_i - x_i) = 0$ ) چنان بیابیم که  $g_j$  را به صفر کاهش دهد. به آسانی می توان نشان داد که:

$$\bar{x}_i - x_i = -N(N^T N)^{-1} g_m(x_i) , \quad (5.5.23)$$

تصحیح مورد نظر است، در حالی که  $g_m$  بردار قیدهای فعال است. معادله (۵.۵.۲۳) بر اساس یک تقریب خطی است، بنابراین باید تا زمانی که  $g_m$  به اندازه کافی کوچک شود، پی در پی به کار رود. افزون بر نیاز به یک حرکت جبرانی، غیر خطی بودن قیدها ارزیابی مجدد  $N$  در هر نقطه را ضروری



## ۴۴۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۵: بهینه سازی مقید)

می سازد. همچنین انتخاب یک حد بالایی برای  $\alpha$ ، که تضمین کننده 'عدم نقض قیدهای فعال فعلی' است، را نیز پیچیده می کند. هاگ و آرورا<sup>۱</sup> [10] روشی را که برای حالت غیر خطی مناسب تر است پیشنهاد می کنند. اولین مزیت روش آنان این است که به جست و جوی یک بعدی نیاز ندارد. به جای آن،  $\alpha$  در معادله ' (۵.۵.۴) با در نظر گرفتن یک مقدار کاهش مشخص  $\gamma$  در تابع هدف تعیین می شود. یعنی رابطه زیر را داریم:

$$f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_{i+1}) \approx \gamma f(\mathbf{x}_i). \quad (5.5.24)$$

با استفاده از معادله (۵.۵.۴) و با یک تقریب خطی داریم:

$$\alpha^* = -\frac{\gamma f(\mathbf{x}_i)}{\mathbf{s}^T \nabla f}. \quad (5.5.25)$$

مزیت دوم روش هاگ و آرورا ترکیب حرکت‌های تصویر و جبرانی است به شکلی که

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha^* \mathbf{s} - \mathbf{N}(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{g}_\alpha, \quad (5.5.26)$$

که در آن از معادله های (۵.۵.۴)، (۵.۵.۲۳)، و (۵.۵.۲۵) استفاده شده است.

## مثال ۵.۵.۱

مسئله ' زیر را با استفاده از روش تصویر گرادیان حل کنید.

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1 - 3x_4 \\ g_1 &= 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 7 \geq 0, \\ g_2 &= x_1 + x_2 + x_3^2 + x_4 - 5.1 \geq 0, \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{را به شرط} \\ \text{مینیم کنید} \end{array}$$

فرض کنید در نتیجه ' حرکت‌های قبلی از نقطه '  $\mathbf{x}_0^T = (2, 2, 1, 0)$ ،  $f(\mathbf{x}_0) = 5.0$  شروع می کنیم که قید  $g_2$  کمی نقض شده است. قید اول و قید روی  $x_4$  فعالند. با یک حرکت ترکیبی از تصویر و جبرانی شروع می کنیم و یک بهبود 10% در تابع هدف را در نظر می گیریم. در  $\mathbf{x}_0$  داریم:

1) Haug and Arora

بخش ۵.۵: روشهای تصویرگرادیان و گرادیان کاهش یافته ۴۴۳

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad N^T N = \begin{bmatrix} 22 & 9 & 4 \\ 9 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(N^T N)^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 6 & -5 & -19 \\ -5 & 6 & 14 \\ -19 & 14 & 73 \end{bmatrix},$$

$$P = I - N(N^T N)^{-1} N^T = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla f = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{Bmatrix}.$$

جهت حرکت تصویر عبارت است از  $s = -P \nabla f = [8/11, -24/11, 8/11, 0]^T$ . از آن جا که مقدار بردار جهت مهم نیست  $s$  را به شکل  $s^T = [1, -3, 1, 0]$  مقیاس بندی می کنیم. برای 10% بهبود در تابع هدف  $\gamma = 0.1$  است و از معادله (۵.۵.۲۵) داریم:

$$\alpha^* = -\frac{0.1 f}{s^T \nabla f} = -\frac{0.1 \times 5}{-8} = 0.0625.$$

برای حرکت تصحیحی بردار  $g$  مقدار قیود را نیاز داریم،  $g_a^T = (0, -0.1, 0)$  بنابراین تصحیح برابر است با

$$-N(N^T N)^{-1} g_a = \frac{-1}{110} \begin{Bmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

با ترکیب حرکتهای تصویر و جبرانی، معادله (۵.۵.۲۶) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$x_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + 0.0625 \begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{1}{110} \begin{Bmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.026 \\ 1.822 \\ 1.126 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

در نتیجه داریم  $f(x_1) = 4.64$ ,  $g_1(x_1) = 0$ ,  $g_2(x_1) = 0.016$ . توجه کنید که به جای 10% کاهش به سبب غیر خطی بودن تابع هدف تنها 7% کاهش داریم. با این وجود، قیدهای غیر خطی برآورده شده اند.

### مثال ۵.۵.۲

خرپای چهار عضوی مثال ۵.۱.۲ را در نظر بگیرید. مسأله طراحی یافتن وزن مینیمم مشروط به

۲۲۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۵: بهینه سازی مقید)

قیدهای تنش و تغییر مکان به شکل زیر رابطه سازی شد:

$$f = 3x_1 + \sqrt{3}x_2$$

را مشروط به

$$g_1 = 3 - \frac{18}{x_1} - \frac{6\sqrt{3}}{x_2} \geq 0,$$

$$g_2 = x_1 - 5.73 \geq 0,$$

$$g_3 = x_2 - 7.17 \geq 0,$$

مینیمم کنید.

در حالی که  $x_i$  مساحت‌های پی بعد زیر است:

$$x_i = \frac{A_i E}{1000P}, \quad i = 1, 2.$$

اولین قید نشانگر محدودیت تغییر مکان عمودی است، و دو قید دیگر قیدهای تنشند.

فرض کنید جست و جورا از محل تقاطع  $g_1 = 0$  و  $g_3 = 0$  آغاز می کنیم که در آن  $x_1 = 11.61$ ،

$x_2 = 7.17$  و  $f = 47.25$  است. گرادینان تابع هدف و دو قید فعال عبارت است از:

$$\nabla f = \left\{ \frac{3}{\sqrt{3}} \right\}, \quad \nabla g_1 = \left\{ \begin{matrix} 0.1335 \\ 0.2021 \end{matrix} \right\}, \quad \nabla g_3 = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0.1335 & 0 \\ 0.2021 & 1 \end{bmatrix}.$$

چون  $\mathbf{N}$  نامنفرد است، معادله  $(5.3.8)$  نشان می دهد که  $\mathbf{P} = 0$  است. همچنین چون تعداد قیدهای

فعال به طور خطی مستقل برابر با تعداد متغیرهای طراحی است زیر فضای مماس یک نقطه منفرد است،

بنابراین جایی برای بهبود نیست. با استفاده از معادله های  $(5.3.6)$  یا  $(5.3.11)$  داریم:

$$\lambda = \left\{ \begin{matrix} 22.47 \\ -2.798 \end{matrix} \right\}.$$

ضریب منفی مربوط به  $g_3$  بیانگر آن است که قید می تواند از مجموعه فعال حذف شود. اکنون داریم:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0.1335 \\ 0.2021 \end{bmatrix}.$$

ماتریس تصحیح از معادله  $(5.3.8)$  محاسبه می شود.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.6962 & -0.4600 \\ -0.4600 & 0.3036 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = -\mathbf{P}\nabla f = \left\{ \begin{matrix} -1.29 \\ 0.854 \end{matrix} \right\}.$$

5% کاهش در تابع هدف را مورد نظر قرار می دهیم و از معادله  $(5.5.25)$  داریم:

بخش ۵.۵: روشهای تصویرگرادیان و گرادیان کاهش یافته ۲۲۵

$$\alpha^* = \frac{0.05 \times 47.25}{[-1.29 \ 0.854] \left\{ \frac{3}{\sqrt{3}} \right\}} = 0.988 .$$

از آن جایی که قیدی در  $\mathbf{x}_0$  نقض نشده، به گام ترکیبی تصویر و تصحیح نیازی نداریم، و داریم:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \alpha^* \mathbf{s} = \left\{ \begin{matrix} 11.61 \\ 7.17 \end{matrix} \right\} + 0.988 \left\{ \begin{matrix} -1.29 \\ 0.854 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 10.34 \\ 8.01 \end{matrix} \right\} .$$

در  $\mathbf{x}_1$  داریم  $f(\mathbf{x}_1) = 44.89$ ،  $g_1(\mathbf{x}_1) = -0.0382$ . روشن است که  $g_2$  نقض نشده است. اگر خطر نقض شدن آن وجود داشت باید با استفاده از معادله (۵.۵.۱۷)  $\alpha^*$  را محدود می کردیم. نقض قید غیر خطی تعجب آمیز نیست، و اندازه آن نشان می دهد که در حرکت بعدی کاهش  $f$  را در نظر بگیریم. در  $\mathbf{x}_1$  تنها  $g_1$  فعال است، بنابراین:

$$\mathbf{N} = \nabla g_1 = \left\{ \begin{matrix} 0.1684 \\ 0.1620 \end{matrix} \right\} .$$

ماتریس تصویر به شکل زیر محاسبه می شود.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.4806 & -0.4996 \\ -0.4996 & 0.5194 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = -\mathbf{P} \nabla f = \left\{ \begin{matrix} -0.5764 \\ 0.5991 \end{matrix} \right\} .$$

به سبب نقض شدن، کاهش  $f$  را با 25% در نظر می گیریم، بنابراین

$$\alpha^* = -\frac{0.025 \times 44.89}{[-0.567 \ 0.599] \left\{ \frac{3}{\sqrt{3}} \right\}} = 1.62 .$$

به یک تصحیح هم به سبب نقض قید ( $g_a = -0.0382$ ) نیاز داریم.

$$-\mathbf{N}(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{g}_a = \left\{ \begin{matrix} 0.118 \\ 0.113 \end{matrix} \right\} .$$

همه اینها با هم به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \alpha^* \mathbf{s} - \mathbf{N}(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{g}_a = \left\{ \begin{matrix} 10.34 \\ 8.01 \end{matrix} \right\} - 1.62 \left\{ \begin{matrix} 0.576 \\ -0.599 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 0.118 \\ 0.113 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 9.52 \\ 9.10 \end{matrix} \right\} .$$

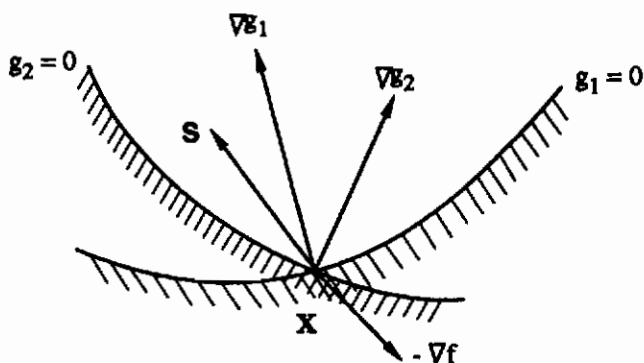
و داریم  $g_1(\mathbf{x}_2) = -0.0328$ ،  $f(\mathbf{x}_2) = 44.32$

۴۴۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۵: بهینه سازی مقید)

طراحی بهین واقعی عبارت است از  $x^T = (9.464, 9.464)$ ،  $f(x) = 44.78$ ، بنابراین بعد از دو چرخه به طراحی بهین کاملاً نزدیک هستیم. ....

## ۵.۶ روش جهت‌های قابل قبول

روش جهت‌های قابل قبول [11] در مقایسه با روش تصویرگردان فلسفه متضادی دارد. به جای دنبال کردن مرز قیدها، سعی می‌کنیم تا حد امکان از آنها دور بمانیم. یک چرخه 'روش جهت قابل قبول' معمولاً از مرز ناحیه 'قابل قبول' شروع می‌شود (اگر قیدی فعال نبود برای به وجود آوردن جهت از فنون بهینه سازی نامقید استفاده می‌شود).



شکل ۵.۶.۱ انتخاب جهت جست و جو با استفاده از روش جهت‌های قابل قبول

شکل ۵.۶.۱ را در نظر بگیرید. در نتیجه 'حرکت قبلی'، طراحی در نقطه  $x$  است و دنبال جهت‌هایی مانند  $s$  می‌گردیم که  $x$  را در ناحیه 'قابل قبول' نگهدارد و تابع هدف را بهبود بخشد. یک بردار در صورتی به عنوان یک جهت قابل قبول تعریف می‌شود که دست کم یک گام کوچک بتواند در امتداد آن برداشته شود که بی‌درنگ ناحیه 'قابل قبول' را ترک نکند. اگر قیدها هموار باشند در صورتی این کار محقق می‌شود که داشته باشیم:

$$s^T \nabla g_j > 0, \quad j \in I_A, \quad (5.6.1)$$

در حالی که  $I_A$  مجموعه قیدهای بحرانی در  $x$  است. جهت  $s$  جهت قابل استفاده در نقطه  $x$  است اگر

افزون بر این داشته باشیم:

$$\mathbf{s}^T \nabla f = \mathbf{s}^T \mathbf{g} < 0. \quad (5.6.2)$$

یعنی،  $\mathbf{s}$  جهتی است که تابع هدف را کاهش می‌دهد.

از میان تمامی گزینه‌های جهت‌های قابل قبول و قابل استفاده دنبال جهتی می‌گردیم که از جهاتی بهترین باشد. دو معیار برای انتخاب یک جهت داریم. از طرفی می‌خواهیم تابع هدف تا حد ممکن کاهش یابد و از طرف دیگر می‌خواهیم تا حد ممکن از مرز قید دور بمانیم. چنین چیزی با مسأله ماکزیمم سازی زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} & \beta \\ & -\mathbf{s}^T \nabla g_j + \theta_j \beta \leq 0, \quad j \in I_A, \quad \text{را مشروط به} \\ & \mathbf{s}^T \nabla f + \beta \leq 0, \quad \theta_j \geq 0, \quad (5.6.3) \\ & |\mathbf{s}_i| \leq 1. \quad \text{ماکزیمم کنید.} \end{aligned}$$

$\theta_j$  اعداد مثبتی هستند که عاملهای «سوق دهنده» نامیده می‌شوند زیرا مقدار آنها نشانگر میزان دوری حرکت  $\mathbf{x}$  از مرز قیدهاست. مقدار  $\theta_j = 0$  سبب حرکت مماسی مرز قید زام است، و بنابراین می‌شود برای یک قید خطی مورد توجه باشد. مقدار بزرگی برای  $\theta_j$  سبب می‌شود زاویه بزرگی بین مرز قید و جهت حرکت باشد، و بنابراین می‌تواند برای یک قید بسیار غیر خطی مورد استفاده قرار گیرد.

مسأله بهینه‌سازی تعریف شده با معادله (۵.۶.۳) خطی است و می‌توان آن را با الگوریتم سیمپلکس حل کرد. اگر  $\beta_{\max} > 0$  باشد، یک جهت قابل قبول قابل استفاده را یافته ایم. اگر داشته باشیم  $\beta_{\max} = 0$  می‌توان نشان داد که شرایط کان-تاکر برآورده شده‌اند.

زمانی که یک جهت جست و جو پیدا شد، انتخاب اندازه گام معمولاً بر اساس میزان کاهش در تابع هدف انجام می‌شود (با استفاده از معادله (۵.۶.۲۵)). اگر در پایان گام قیدی فعال شود، تا زمانی که  $\mathbf{s}^T \nabla f$  منفی باشد، حرکت را در همان جهت ادامه می‌دهیم. چرخه بعدی را زمانی آغاز می‌کنیم که  $\mathbf{x}$  به مرز قیدها برخورد کند، یا اگر  $\mathbf{x}$  در داخل ناحیه قابل قبول است جهت را بر اساس یک روش نامقید بدست می‌آوریم. در نهایت اگر بعضی از قیدها نقض شده باشند، بعد از گام اولیه  $\mathbf{x}$  را بر اساس مقدار نقض قید تعیین می‌کنیم. روش جهت‌های قابل قبول در برنامه مشهور کان مین (CONMIN) ارائه

شده است [12].

### مثال ۵.۶.۱

خرپای چهار عضوی مثال ۵.۱.۲ را در نظر بگیرید. مسأله یافتن طراحی وزن مینیمم مشروط به قیدهای تنش و تغییر مکان به شکل زیر رابطه سازی شد:

$$\begin{aligned} f &= 3x_1 + \sqrt{3}x_2 \\ g_1 &= 3 - \frac{18}{x_1} - \frac{6\sqrt{3}}{x_2} \geq 0, & \text{را مشروط به} \\ g_2 &= x_1 - 5.73 \geq 0, \\ g_3 &= x_2 - 7.17 \geq 0, & \text{مینیمم کنید.} \end{aligned}$$

در رابطه های فوق  $x_i$  مساحت های بی بعد است که به شکل زیر تعریف می شود:

$$x_i = \frac{A_i E}{1000P}, \quad i = 1, 2.$$

اولین قید بیانگر حدى روی تغییر مکان عمودی، و دو قید دیگر بیانگر قیدهای تنش هاست.

فرض کنید جست و جو را از محل تقاطع  $g_1 = 0$  و  $g_3 = 0$  یعنی  $\mathbf{x}_0^T = (11.61, 7.17)$  و  $f = 47.25$  شروع کنیم. گرادیان تابع هدف و دو قید فعال دیگر عبارت است از:

$$\nabla f = \left\{ \frac{3}{\sqrt{3}} \right\}, \quad \nabla g_1 = \left\{ \begin{matrix} 0.1335 \\ 0.2021 \end{matrix} \right\}, \quad \nabla g_3 = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\}.$$

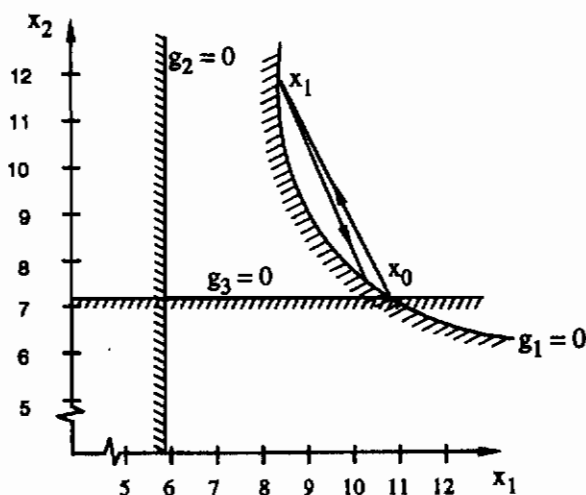
با انتخاب  $\theta_1 = \theta_2 = 1$ ، می بینیم که معادله (۵.۶.۳) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \beta & \\ -0.1335s_1 - 0.2021s_2 + \beta &\leq 0, & \text{را مشروط به} \\ -s_2 + \beta &\leq 0, \\ 3s_1 + \sqrt{3}s_2 + \beta &\leq 0, \\ -1 \leq s_1 &\leq 1, \\ -1 \leq s_2 &\leq 1. & \text{ماکزیمم کنید.} \end{aligned}$$

جواب این برنامه ریزی خطی عبارت است از  $s_1 = -0.6172$ ،  $s_2 = 1$ ، و اکنون باید جست و جوی

یک بعدی را محاسبه کنیم.

$$\mathbf{x}_1 = \left\{ \begin{matrix} 11.61 \\ 7.17 \end{matrix} \right\} + \alpha \left\{ \begin{matrix} -0.6172 \\ 1 \end{matrix} \right\}.$$



شکل ۵.۶.۲ جواب جهت قابل قبول برای مثال خرابای چهار عضوی

از آن جا که تابع هدف خطی است، این جهت تا بی نهایت یک جهت کاهش باقی می ماند، و  $\alpha$  تنها با قیود محدود خواهد شد. شرط این که  $g_2$  نقض نشود به  $\alpha = 9.527$ ،  $x_1 = 5.73$ ،  $x_2 = 16.7$  می انجامد که  $g_1$  را نقض می کند. چون  $g_1$  غیر خطی است، می بینیم هر چند که حرکت را با دور شدن از آن آغاز کرده ایم مجدداً به آن برخورد می کنیم (به شکل ۵.۶.۲ مراجعه کنید). می توان به آسانی دید که برای  $\alpha > 5.385$  قید  $g_1$  نقض خواهد شد. بنابراین  $\alpha = 5.385$  می گیریم و داریم  $x_1 = 8.29$ ،  $x_2 = 12.56$ ،  $f = 46.62$ .

برای چرخه بعدی تنها یک قید فعال داریم

$$\nabla g_1 = \begin{Bmatrix} 0.2619 \\ 0.0659 \end{Bmatrix}, \quad \nabla f = \begin{Bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix}.$$

برنامه ریزی خطی بدست آوردن  $\beta$  عبارت است از:

$$\beta - 0.2619s_1 - 0.0659s_2 + \beta \leq 0, \quad \text{را مشروط به}$$

$$3s_1 + \sqrt{3}s_2 + \beta \leq 0,$$

$$-1 \leq s_1 \leq 1,$$

$$-1 \leq s_2 \leq 1.$$

ماکزیمم کنید



## ۲۵۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۵: بهینه سازی مقید)

جواب برنامه ریزی خطی عبارت است از  $s_1 = 0.5512$ ،  $s_2 = -1$ ، بنابراین جست و جوی یک بعدی عبارت است از:

$$x = \left\{ \begin{array}{c} 8.29 \\ 12.56 \end{array} \right\} + \alpha \left\{ \begin{array}{c} 0.5512 \\ -1 \end{array} \right\}.$$

این بار نیز  $\alpha$  با قیدها محدود می شود. حد پایینی  $x_2$  نشان می دهد که  $\alpha \leq 5.35$  است. با این وجود، قید  $s_1$  بحرانی تر است می توان نشان داد که برای  $\alpha > 4.957$  قید نقض می شود، بنابراین  $\alpha = 4.957$ ،  $x_1 = 11.02$ ،  $x_2 = 7.60$ ،  $f = 46.22$  را انتخاب می کنیم. فضای طراحی و دو چرخه در شکل ۵.۶.۲ نشان داده شده اند. ...

## ۵.۷ روشهای تابع جریمه

زمانی که بحران انرژی در میانه قرن هفدهم اتفاق افتاد، کنگره ایالات متحده برای کاهش مصرف سوخت خودروهای آمریکائی قانونی را به تصویب رساند. نهایت مصرف سوخت طی ۲۷/۵ مایل به ازای یک گالن برای خودروهای جدید در سال ۱۹۸۵ بود. به جای این که کنگره تنها این قانون را بگذراند، یک رویکرد تدریجی را در پیش گرفت به این ترتیب که هر سال یک حد اعمال کرد تا مصرف را از متوسط حدود ۱۴ مایل طی مسافت برای هر گالن به مقدار نهایی بالا بیاورد. بنابراین حد عبارت بود از ۲۶ برای ۱۹۸۴، ۲۵ برای ۱۹۸۳، ۲۴ برای ۱۹۸۲ و غیره. افزون بر این، حد مطلق نبود، و به ازای نقض هر ۰/۱ مایل طی مسافت در گالن، ۵۰ دلار جریمه تعلق می گرفت.

این رهیافت که شرکتهای خودروسازی را مقید می کند که اتوموبیلهای با مصرف سوخت کمتر تولید کنند دو جنبه مهم دارد. اول، با اعمال قانون جریمه متناسب با میزان نقض به جای حد مطلق، دولت به شرکتهای خودروساز انعطاف پذیری بیشتری می دهد. مفهوم این کار این است که آنها می توانند یک جدول زمانی را در پیش گیرند که نزدیک به زمانهای دولت باشد بدون آن که با صلبیت به آن چسبیده باشند. دوم، رهیافت تدریجی اجبار را از نظر سیاسی ساده تر می سازد. اگر دولت یک دفعه حد نهایی را تنها برای سال ۱۹۸۵ اعلام کند، در سال ۱۹۷۰ کسی به قانون توجه نمی کند. آن گاه هر چه سال ۱۹۸۵ نزدیکتر شود شتاب برای ارائه خودروهای با سوخت با صرفه تر زیادتر می شود. تلاشهای شتابزده می تواند هم به طراحی خودروهای غیر بهینه بینجامد و هم سبب اعمال فشار برای تأخیر در اعمال قانون شود.

## بخش ۵.۷: روشهای تابع جریمه ۲۵۱

قانون سوخت کمتر مثالی است که در آن قیدهای عملکرد یا فعالیتهای اقتصادی از راه جریمه‌هایی اعمال می‌شود که میزان آن به درجه 'نقض قید بستگی دارد. بدیهی است که این رهیافت ساده و جالب کاربردهایی در بهینه‌سازی مقید داشته باشد. به جای اعمال قیدها، آنها را با جریمه‌هایی جایگزین می‌کنیم که به میزان نقض قیدها بستگی داشته باشد. این رهیافت به سبب این که مسأله 'بهینه‌سازی مقید را به یک مسأله 'نامقید تبدیل می‌کند، مورد توجه است.

جریمه‌ای که مربوط به نقض قید می‌شود باید به اندازه 'کافی بزرگ باشد تا قیدها تنها کمی نقض شده باشند. با این وجود، همچنان که در ارتباط با اعمال ناگهانی جرایم در زندگی روزمره، مسائل سیاسی وجود داشت، در بهینه‌سازی عددی نیز چنین کاری دشواریهای عددی دارد. به این سبب یک رهیافت تدریجی شروع با جرایم سبک و افزایش تدریجی آنها را انتخاب می‌کنیم.

## ۵.۷.۱ تابع جریمه خارجی

تابع جریمه 'خارجی برای نقض یک قید جریمه‌ای را در نظر می‌گیرد. عبارت «خارجی» به این حقیقت بر می‌گردد که جرایم تنها در خارج از ناحیه 'قابل قبول اعمال می‌شوند. مشهورترین تابع جریمه 'خارجی تابعی است که جریمه آن متناسب با مجذور یک نقض است. یعنی مسأله 'مینیم سازی مقید معادله (۵.۱)

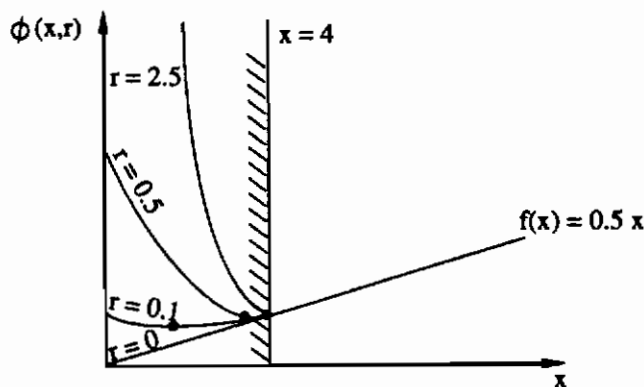
$$\begin{aligned} & f(x) \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n_e, \quad \text{را مشروط به} \\ & g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \quad \text{مینیم کنید} \end{aligned} \quad (5.7.1)$$

با مسأله 'مینیم سازی

$$\begin{aligned} \phi(x, r) &= f(x) + r \sum_{i=1}^{n_e} h_i^2(x) + r \sum_{j=1}^{n_g} \langle -g_j \rangle^2 \\ r &= r_1, r_2, \dots, \quad r_i \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5.7.2)$$

که در آن  $\langle a \rangle$  نشانگر بخش مثبت  $a$  یا  $\max(a, 0)$  است، جایگزین می‌شود. برخورد با عبارتهای نامساوی و برخورد با عبارتهای تساوی متفاوت است زیرا جریمه تنها برای نقض قید اعمال می‌شود. ضریب مثبت  $r$  مقدار عبارت جریمه را کنترل می‌کند. ممکن است انتخاب یک مقدار بالا برای  $r$  برای

حصول اطمینان از نقض شدن قید منطقی به نظر برسد. ولی چنین رهیافتی، همچنان که قبلاً بیان شد، مشکلات عددی به بار می آورد که بعداً در یک مثال تشریح می شود. به جای این کار، مینیم سازی با یک مقدار نسبتاً کم  $r$  شروع شده و مقدار آن کم کم افزایش می یابد. یک مقدار معمول برای  $r_{i+1}/r_i$ ، ۵ است. یک نمودار معمولی  $\phi(x, r)$  بر حسب تابع  $r$  برای یک مثال ساده در شکل ۵.۷.۱ نشان داده شده است.



شکل ۵.۷.۱ تابع جریمه 'خارجی' برای  $f = 0.5x$  مشروط به  $x - 4 \geq 0$

می بینیم که با افزایش  $r$ ، مینیم  $\phi$  به مرز قید نزدیکتر می شود. انحنای  $\phi$  در نزدیک مینیم نیز افزایش می یابد. همین مقدار بالای انحنای مربوط به مقادیر بالای  $r$  است که اغلب مشکلات عددی را به وجود می آورد. با در نظر گرفتن رشته ای از  $r$ ها، از مینیم هایی که برای مقادیر کوچک  $r$  بدست آمده برای نقاط شروع جست و جو با مقادیر بزرگ  $r$  استفاده می کنیم. بنابراین، شرایط بدخیم عددی مربوط به انحنای بزرگ با در دسترس بودن یک نقطه 'شروع خوب' متعادل می شود.

بر اساس نوع مقیاس بندی قید که در معادله (۵.۲) داده شده، می توان یک مقدار اولیه 'منطقی' برای ضریب جریمه  $r$  انتخاب کرد. یک راه ساده این است که شخص با مقدار کل جریمه برابر با مقدار تابع هدف برای نقض قید 50% محدوده های پاسخ شروع کند. در بیشتر مسائل بهینه سازی، تعداد کل قیدهای فعال برابر و یا کمی کمتر از تعداد متغیرهای طراحی است. فرض کنید با نقض یک چهارم قیدهای فعال نهایی در حدود 50% (یا  $-0.5$ ) شروع کنیم. آن گاه داریم:

$$f(x_0) \approx r_0 \frac{n}{4} (0.5)^2, \quad \text{یا} \quad r_0 = 16 \frac{f(x_0)}{n}. \quad (5.7.3)$$

## بخش ۵.۷: روشهای تابع جریمه ۲۵۳

به دست آوردن یک نقطه شروع خوب، برای شروع مجدد بهینه سازی با  $r$  های افزایش یافته، نیز مهم است. مینیمم بهینه سازی قبلی برای  $r$  یک نقطه شروع معقولی است، اما شخص می تواند کار بهتری انجام دهد. فیاکو و مکورمیک<sup>۱</sup> [13] نشان دادند که موقعیت مینیمم  $\phi(x, r)$  وقتی  $r \rightarrow \infty$  می رود مجانب زیر را دارد

$$x^*(r) = a + b/r \quad (۵.۷.۴)$$

زمانی که بهین برای دو مقدار  $r$  مثلاً  $r_{i-1}$  و  $r_i$  پیدا شد، بردارهای  $a$  و  $b$  را می شود حدس زد، و مقدار  $x^*(r)$  مقادیر بعدی  $r$  را پیش بینی می کند. به آسانی می توان دید که به منظور برآورده ساختن معادله (۵.۷.۴)  $a$  و  $b$  به شکل زیر خواهند بود.

$$\begin{aligned} a &= \frac{cx^*(r_{i-1}) - x^*(r_i)}{c-1}, \\ b &= [x^*(r_{i-1}) - a]r_{i-1}, \end{aligned} \quad (۵.۷.۵)$$

در حالی که

$$c = r_{i-1}/r_i. \quad (۵.۷.۶)$$

معادله (۵.۷.۴) افزون بر پیش بینی یک مقدار خوب برای متغیرهای طراحی برای شروع مجدد بهینه سازی برای مقدار بعدی  $r$ ، معیار همگرایی مقید

$$\|x^* - a\| \leq \epsilon_1, \quad (۵.۷.۷)$$

را به ما می دهد که در آن  $a$  از دو مقدار آخر  $r$  حدس زده می شود و  $\epsilon_1$  مقدار رواداری (تولرانس) است که نسبت به مقدار معمول  $\|x\|$  کوچک است.

معیار همگرایی دیگر بر اساس مقدار عبارت جریمه قرار دارد که، همچنان که در مثال ۵.۷.۱ نشان داده شد، با میل  $r$  به سمت بینهایت به طرف صفر میل می کند. بنابراین، یک معیار همگرایی معقول عبارت است از:

1) Fiacco and McCormick

۲۵۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۵: بهینه سازی مقید)

$$\left| \frac{\phi - f}{f} \right| \leq \epsilon_2. \quad (۵.۷.۸)$$

در نهایت، معیار همگرایی دیگری بر اساس تغییر مقدار تابع هدف در مینیمم،  $f^*$ ، نیز استفاده می شود.

$$\left| \frac{f^*(r_i) - f^*(r_{i-1})}{f^*(r_i)} \right| \leq 0. \quad (۵.۷.۹)$$

یک مقدار معمول برای  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$ ، 0.001 است.

### مثال ۵.۷.۱

تابع  $f = x_1^2 + 10x_2^2$  را با شرط  $x_1 + x_2 = 4$  مینیمم کنید. داریم

$$\phi = x_1^2 + 10x_2^2 + r(4 - x_1 - x_2)^2.$$

گرادیان  $\nabla \phi$  برابر است با

$$\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} 2x_1(1+r) + 2rx_2 - 8r \\ 2x_2(10+r) + 2rx_1 - 8r \end{Bmatrix}.$$

با مساوی صفر قرار دادن گرادیان داریم:

$$x_1 = \frac{40r}{10+11r}, \quad x_2 = \frac{4r}{10+11r}.$$

جواب به عنوان تابعی از  $r$  در جدول ۵.۷.۱ نشان داده شده است.

جدول ۵.۷.۱ مینیمم سازی  $\phi$  با ضرایب جریمه مختلف

$r$	$x_1$	$x_2$	$f$	$\phi$
1	1.905	0.1905	3.992	7.619
10	3.333	0.3333	12.220	13.333
100	3.604	0.3604	14.288	14.144
1000	3.633	0.3633	14.518	14.532

دیده می شود که با افزایش  $r$  جواب به جواب دقیق  $x^T = (3.636, 0.3636)$ ،  $f = 14.54$  همگرا

می شود. همگرایی با کم شدن فاصله بین تابع هدف و تابع شناسه  $\phi$  مشخص می شود. هسیان  $\phi$  عبارت

است از:

$$H = \begin{bmatrix} 2 + 2r & 2r \\ 2r & 20 + 2r \end{bmatrix}$$

با افزایش  $r$  ماتریس بدخیم تر می شود زیرا تمامی درایه ها تقریباً  $2r$  می شوند. بدخیمی ماتریس هسیان برای  $r$  های بزرگ اغلب هنگامی اتفاق می افتد که تابع جریمه خارجی استفاده شود، و می تواند برای مسائل بزرگ مشکلات عددی به بار بیاورد.

می توانیم برای آزمایش روش برون یابی، معادله  $(5.7.4)$ ، از جدول ۱. ۵.۷ استفاده کنیم. به عنوان مثال، با مقادیر  $r = 1$  و  $r = 10$ ، از معادله  $(5.7.5)$  داریم:

$$a = \frac{0.1x^*(1) - x^*(10)}{-0.9} = \begin{Bmatrix} 3.492 \\ 0.3492 \end{Bmatrix},$$

$$b = x^*(1) - a = \begin{Bmatrix} -0.159 \\ -0.0159 \end{Bmatrix}.$$

اکنون برای یافتن یک نقطه شروع برای بهینه سازی برای  $r = 100$ ، می توانیم از معادله  $(5.7.4)$  استفاده کنیم

$$a + b/100 = (3.490, 0.3490)^T,$$

که به  $x^*(100) = (3.604, 0.3604)^T$  بسیار نزدیکتر است تا  $x^*(10) = (3.333, 0.3333)^T$ .

## ۵.۷.۲ توابع جریمه داخلی و داخلی گسترش یافته

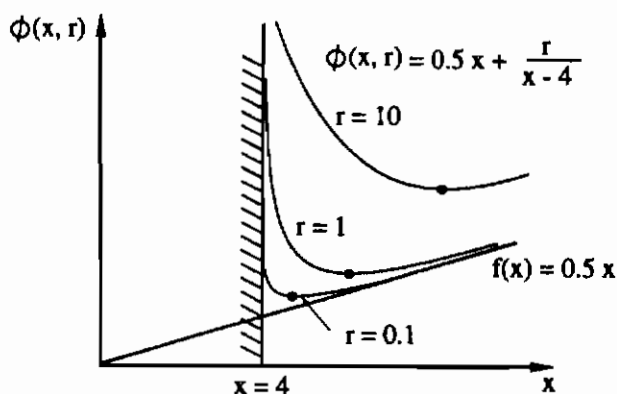
در تابع جریمه خارجی، قیود تنها زمانی در جملات جریمه شرکت می کردند که نقض می شدند. در نتیجه، طراحی در ناحیه غیر قابل قبول حرکت می کند. اگر قبل از این که  $r$  خیلی بزرگ شود، مینیمم سازی قطع شود (مثلاً به سبب کمبود منابع رایانه ای)، طراحی های حاصل ممکن است بی استفاده باشند. وقتی تنها قیود نامساوی وجود دارند، این امکان وجود دارد که یک تابع جریمه داخلی تعریف کرد که طراحی را در ناحیه قابل قبول نگهدارد. شکل عمومی روش جریمه داخلی، مسأله مقید با قیدهای نامساوی

$$(۵.۷.۱۰) \quad \begin{aligned} & f(\mathbf{x}) \\ & \text{باشد} \quad g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \quad \text{را چنان مینیمم کنید که} \end{aligned}$$

را با مینیمم سازی

$$(۵.۷.۱۱) \quad \begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, r) &= f(\mathbf{x}) + r \sum_{j=1}^{n_g} 1/g_j(\mathbf{x}), \\ r &= r_1, r_2, \dots, \quad r_i \rightarrow 0, \quad r_i > 0. \end{aligned}$$

تعویض می کند.



شکل ۵.۷.۲ تابع جریمه داخلی برای  $f(x) = 0.5x$  با قید  $x - 4 \geq 0$

جمله جریمه با  $1/g_j$  متناسب است و در مرز ناحیه قابل قبول بسیار بزرگ می شود و در آن جایگاه مانع ایجاد می کند (روشهای تابع جریمه داخلی، گاهی روشهای مانع نامیده می شوند). فرض می شود که جست و جو در ناحیه قابل قبول محدود می شود. در غیر این صورت، جریمه منفی می شود که معنی دار نیست. شکل ۵.۷.۲ کاربرد تابع جریمه داخلی را برای مثال ساده ای که برای تابع جریمه خارجی در شکل ۵.۷.۱ استفاده شد را نشان می دهد. افزون بر تابع جریمه وارون تعریف شده در معادله (۵.۷.۱۱)، از تابع جریمه داخلی لگاریتمی نیز استفاده می شود

$$(۵.۷.۱۲) \quad \phi(\mathbf{x}, r) = f(\mathbf{x}) - r \sum_{j=1}^{n_g} \log(g_j(\mathbf{x})).$$

## بخش ۵.۷: روشهای تابع جریمه ۲۵۷

در حالی که تابع جریمه داخلی از نظر این که رشته ای از طراحی های قابل قبول به وجود می آورد بر تابع جریمه خارجی برتری دارد، نقطه شروع قابل قبولی نیز احتیاج دارد. متأسفانه، در بیشتر مواقع پیدا کردن چنان طراحی شروع قابل قبولی دشوار است. همچنین، به خاطر استفاده از تقریب (به فصل ۶ مراجعه کنید)، گاه به گاه افتادن در ناحیه غیر قابل قبول در فرایند بهینه سازی کاملاً عادی است. به خاطر این دلایل، استفاده از ترکیبی از توابع جریمه داخلی و خارجی، که تابع جریمه داخلی گسترش یافته نامیده می شود، برتری دارد. یک نمونه از این توابع، تابع جریمه داخلی گسترش یافته درجه دوم هفتکه و استارنز<sup>۱</sup> [14] است.

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{x}) + r \sum_{j=1}^{n_g} p(g_j), \quad (5.7.13)$$

$$\mathbf{r} = r_1, r_2, \dots, \quad r_i \rightarrow 0,$$

که در آن

$$p(g_j) = \begin{cases} 1/g_j & \text{for } g_j \geq g_0 \\ 1/g_0 [3 - 3(g_j/g_0) + (g_j/g_0)^2] & \text{for } g_j < g_0 \end{cases} \quad (5.7.14)$$

به آسانی می توان دید که  $p(g_j)$  تا دو بار مشتق گیری پیوسته است. پارامتر انتقال  $g_0$  که مرز بین قسمت داخلی و خارجی جملات جریمه را تعریف می کند باید چنان انتخاب شود که وقتی  $r$  به سمت صفر میل می کند جریمه مربوط به قید،  $rp(g_j)$ ، برای  $g_j$  منفی به سمت بی نهایت میل کند. این شرط یعنی لازم است که داشته باشیم

$$r/g_0^3 \rightarrow \infty, \quad \text{همچنان که} \quad \text{as } r \rightarrow 0. \quad (5.7.15)$$

با انتخاب  $g_0$  به شکل

$$g_0 = cr^{1/2}, \quad (5.7.16)$$

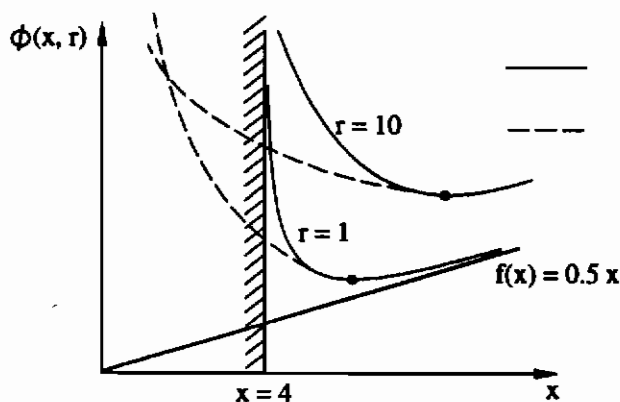
که در آن  $c$  یک عدد ثابت است به این هدف می توان رسید.

در توابع جریمه داخلی و داخلی گسترش یافته، وارد کردن قیدهای تساوی نیز امکان پذیر است. به عنوان مثال، تابع جریمه داخلی معادله (۵.۷.۱۱) به شکل زیر گسترش می یابد:



$$\phi(x, r) = f(x) + r \sum_{j=1}^{n_g} 1/g_j(x) + r^{-1/2} \sum_{i=1}^{n_a} h_i^2(x), \quad (5.7.17)$$

$$r = r_1, r_2, \dots, \quad r_i \rightarrow 0.$$



شکل ۵.۷.۳ تابع جریمه داخلی گسترش یافته برای  $f(x) = 0.5x$  با قید  $g(x) = x - 4 \geq 0$

ملاحظات انتخاب مقدار اولیه  $r$  مشابه آنچه در تابع جریمه خارجی بیان شد می باشد. یک انتخاب معقول برای تابع جریمه داخلی که به  $n/4$  قیدهای فعال در  $g = 0.5$  (یعنی 50% حاشیه برای قیدهای نرمال شده مناسب) نیاز دارد به جریمه ای کلی برابر با تابع هدف می انجامد. با استفاده از معادله (۵.۷.۱۱) داریم:

$$f(x) = \frac{n}{4} \frac{r}{0.5}, \quad \text{یا} \quad r = 2f(x)/n.$$

برای تابع جریمه داخلی گسترش یافته، معقول ترین این است که فرض شود  $n/4$  قیدها بحرانیند ( $g = 0$ )، بنابراین از معادله (۵.۷.۱۳) داریم:

$$f(x) = \frac{n}{4} \frac{3}{g_0}, \quad \text{یا} \quad r = \frac{4}{3} g_0 f(x)/n.$$

مقدار شروع منطقی برای  $g_0$  برابر است با 0.1. مانند تابع جریمه خارجی، بدمست آوردن یک عبارت برای مختصات معجانب (هنگامی که  $r \rightarrow 0$  می رود) مینیمم  $\phi$  امکان پذیر است [10]

بخش ۵.۷: روشهای تابع جریمه ۲۵۹

$$\mathbf{x}^*(r) = \mathbf{a} + \mathbf{b}r^{1/2}, \quad r \rightarrow 0, \quad (5.7.18)$$

$$f^*(r) = a + br^{1/2}, \quad r \rightarrow 0. \quad \text{و}$$

$\mathbf{a}$ ،  $\mathbf{b}$  و  $a$  و  $b$  را می توان وقتی مینیمم سازی برای دو مقدار  $r$  انجام شد حدس زد. به عنوان مثال، تخمین  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  عبارت است از:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{c^{1/2} \mathbf{x}^*(r_{i-1}) - \mathbf{x}^*(r_i)}{c^{1/2} - 1}, \\ \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{x}^*(r_{i-1}) - \mathbf{a}}{r_{i-1}^{1/2}}, \end{aligned} \quad (5.7.19)$$

در حالی که  $c = r_i/r_{i-1}$  است. مانند حالت تابع جریمه خارجی، این عبارات را می شود برای آزمایش همگرایی و برون یابی به کار برد.

### ۵.۷.۳ مینیمم سازی نامقید با توابع جریمه

توابع جریمه یک مسأله مینیمم سازی مقید را به نامقید تبدیل می کنند. ممکن است چنین به نظر برسد که اکنون ما باید برای مسأله مینیمم سازی نامقید، بهترین روشهای موجود مانند روشهای شبه نیوتن را استفاده کنیم. چنین الزامی وجود ندارد. جملات جریمه سبب می شوند که تابع  $\phi$  در نزدیکی مرز قید انحنای زیادی داشته باشد، هر چند انحنای تابع هدف و قیدها کوچک باشند. این اثر سبب محاسبه تقریبی ارزاتر ماتریس هسیان می شود؛ بنابراین می توانیم روش نیوتن را بدون تحمیل هزینه بالای محاسبه مشتقات دوم قیدها استفاده کنیم. این کار بسیار پر جاذبه تر از استفاده از روشهای شبه نیوتن (که در آن هسیان نیز بر اساس مشتقات اول تقریب زده می شود) است؛ زیرا یک تقریب خوب با یک تحلیل تنها بدست می آید و نه با  $n$  حرکت که در روش شبه نیوتن لازم است. به عنوان مثال، تابع جریمه خارجی را در نظر بگیرید که در مورد قیدهای تساوی به کار می رود.

$$\phi(\mathbf{x}, r) = f(\mathbf{x}) + r \sum_{i=1}^{n_s} h_i^2(\mathbf{x}). \quad (5.7.20)$$

مشتقات دوم عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} + r \sum_{i=1}^{n_s} 2 \left( \frac{\partial h_i}{\partial x_k} \frac{\partial h_i}{\partial x_l} + h_i \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_k \partial x_l} \right). \quad (5.7.21)$$

به سبب این که قید تساوی  $h_i$  به صفر نزدیک است، به ویژه برای مراحل بعدی بهینه سازی، ( $n$  بزرگ)، می توان جمله آخر در معادله (۵.۷.۲۱) را حذف کرد. برای مقادیر بزرگتر  $n$  می توانیم اولین جمله را نیز حذف کنیم. بنابراین می توانیم مشتقات دوم  $\phi$  را بر حسب مشتقات اول قیدها محاسبه کنیم. در دسترس بودن مشتقات دوم با هزینه کم، استفاده از روش نیوتن را امکان پذیر می نماید که در آن تعداد چرخه ها معمولاً مستقل از تعداد متغیرهای طراحی است. از طرف دیگر، روشهای شبه نیوتن و گرادینان مزدوج به تعداد چرخه ای متناسب با تعداد متغیرها نیاز دارند. بنابراین، کاربرد روش نیوتن وقتی تعداد متغیرهای طراحی زیاد است جذاب تر می شود. کاربرد روش نیوتن با تقریب مشتقات دوم بالا به عنوان روش گوس-نیوتن<sup>۱</sup> شناخته می شود.

برای تابع جریمه داخلی نیز شرایط مشابهی داریم. تابع هدف افزایش یافته  $\phi$  عبارت است از:

$$\phi(\mathbf{x}, \tau) = f(\mathbf{x}) + \tau \sum_{j=1}^{n_g} 1/g_j(\mathbf{x}), \quad (5.7.22)$$

و مشتقات دوم عبارتند از:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} + \tau \sum_{j=1}^{n_g} \frac{1}{g_j^3} \left( 2 \frac{\partial g_j}{\partial x_k} \frac{\partial g_j}{\partial x_l} - g_j \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_k \partial x_l} \right). \quad (5.7.23)$$

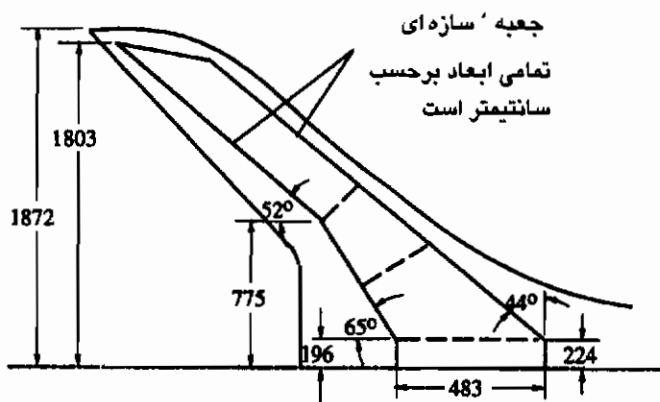
اکنون بحث حذف اولین و آخرین جمله در معادله (۵.۷.۲۳) طولانی تر است. ابتدا مشاهده می کنیم که به سبب جمله  $1/g_j^3$ ، مشتقات دوم تحت غلبه قیدهای بحرانی (  $g_j$  کوچک). برای این قیدها جمله آخر در معادله (۵.۷.۲۳) در مقایسه با جمله مشتق اول قابل صرف نظر کردن است زیرا  $g_j$  کوچک است. در نهایت، می توان از معادله (۵.۷.۱۸) نشان داد که  $1/g_j^3$  برای قیدهای فعال با میل  $n$  به طرف صفر به طرف بی نهایت میل می کند، بنابراین در معادله (۵.۷.۲۳) از جمله اول در مقایسه با جمله دوم می توان صرف نظر کرد. بحث مشابهی می تواند برای توابع جریمه داخلی گسترش یافته نیز به کار رود [14].

توانایی روش گوس-نیوتن برای طراحی یک بال با نسبت ظاهر بالا که از مواد مرکب ساخته شده (به شکل ۵.۷.۴ نگاه کنید) و تحت قیود تنش و تغییر مکان است در مرجع [14] نشان داده شده است.

جعبه سازه ای بال با یک مدل اجزای محدود با ۶۷ گروه و ۲۹۰ جزء محدود مدل شده است. تعداد متغیرهای طراحی که ضخامت اجزای مختلف را کنترل می کنند از ۱۳ تا ۱۴۶ تغییر می کند. اثر تعداد

1) Gauss-Newton

بخش ۵.۷: روشهای تابع جریمه ۲۶۱



شکل ۵.۷.۲: شکل مستوی آئرو دینامیکی و جعبه سازه ای برای بال با نسبت ظاهر بالا از مرجع [14]

جدول ۵.۷.۲: نتایج مطالعات بال با نسبت ظاهر بالا

تعداد متغیرهای طراحی	با CDC 6600 CPU زمان ثانیه	تعداد کل مینیمم سازه های نامقید	تعداد کل تحلیل ها	جرم نهائی kg
13	142	4	21	887.3
25	217	4	19	869.1
32	293	5	22	661.7
50	460	5	25	658.2
74	777	5	28	648.6
146	1708	5	26	513.0

متغیرهای طراحی روی تعداد چرخه ها (تحلیل ها) در جدول ۵.۷.۲ نشان داده شده است. دیده می شود که تعداد چرخه ها به ازای هر مینیمم سازی نامقید تقریباً ثابت است (حدود پنج). در روش شبه نیوتن انتظار می رود این عدد برابر با تعداد متغیرهای طراحی باشد.

به سبب انحنای تیز  $\phi$  در نزدیکی مرز قید، مناسبتر است که از یک جست و جوی خط ویژه با توابع جریمه نیز استفاده شود [15].

۵.۷.۴ برنامه ریزی عدد صحیح با توابع جریمه

تعمیمی از رهیافت تابع جریمه توسط شین<sup>۱</sup> و دیگران [16] برای مسائل با متغیرهای طراحی با مقادیر

1) Shin

گسسته پیاده شده است. این تعمیم بر اساس معرفی جملات جریمه 'اضافی در تابع هدف افزایش یافته است تا مقادیر گسسته گرفتن متغیرهای طراحی را منعکس کند. این مقادیر گسسته عبارتند از:

$$x_i \in X_i = \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in_i}\}, \quad i \in I_d, \quad (5.7.24)$$

که در آن  $I_d$  مجموعه متغیرهای طراحی است که تنها می تواند مقادیر گسسته بگیرد، و  $X_i$  مجموعه مقادیر گسسته مجاز است. دقت کنید که می شود متغیرهای مختلفی مجموعه مجاز یکسانی از مقادیر گسسته داشته باشند. در این حالت، تابع هدف افزایش یافته که به سبب قیدها و مقادیر گسسته متغیرهای طراحی شامل جملات جریمه است به شکل زیر تعریف می شود:

$$\phi(x, r, s) = f(x) + r \sum_{j=1}^{n_g} p(g_j) + s \sum_{i \in I_d} \psi_d(x_i), \quad (5.7.25)$$

که در آن  $s$  ضریب جریمه برای مقادیر غیر گسسته متغیرهای طراحی، و  $\psi_d(x_i)$  جمله جریمه برای مقادیر غیر گسسته 'آمین متغیر طراحی است. شکلهای مختلفی از توابع جریمه گسسته امکان پذیر است. در مرجع [16] فرض شده که جملات جریمه '  $\psi_d(x_i)$  شکل تابع سینوسی زیر را می گیرند.

$$\psi_d(x_i) = \frac{1}{2} \left( \sin \frac{2\pi [x_i - \frac{1}{4}(d_{i(j+1)} + 3d_{ij})]}{d_{i(j+1)} - d_{ij}} + 1 \right), \quad d_{ij} \leq x_i \leq d_{i(j+1)}. \quad (5.7.26)$$

هنگام جریمه متغیرهای طراحی با مقادیر غیر گسسته، توابع  $\psi_d(x_i)$  پیوستگی مشتقات اول تابع افزایش یافته را در مقادیر گسسته متغیرهای طراحی تضمین می کنند. سطوح پاسخی که توسط معادله (5.7.25) تولید شده، بر اساس مقادیر ضرایب جریمه  $r$  و  $s$  بدست آمده اند. برخلاف ضریب  $r$ ، که در ابتدا مقادیر بزرگ داشته و با حرکت از یک چرخه به چرخه دیگر افزایش می یابد، مقدار ضریب  $s$  در ابتدا صفر است و به تدریج افزایش پیدا می کند.

یکی از عوامل مهم در کاربرد روش ارائه شده، مشخص کردن زمان فعال کردن  $s$  و چگونگی افزایش آن برای بدست آوردن طراحی بهین گسسته است. روشن است که، اگر مقدار اولیه  $s$  خیلی بزرگ باشد و زودتر از موقع مناسب در فرایند طراحی وارد شود، متغیرهای طراحی در جایی به غیر از مینیمم فراگیر محصور می شوند و به یک جواب زیر بهین می انجامد. برای جلوگیری از این اتفاق، ضریب  $s$  باید بعد از بهینه سازی سطوح پاسخ متعدد که تنها جملات جریمه قید را شامل می شود، فعال شود. در حقیقت،

بخش ۵.۷: روشهای تابع جریمه ۲۶۳

چون گاهی طراحی بهین با مقادیر گسسته در همسایگی بهین پیوسته است، ممکن است بهتر این باشد که جریمه متغیرهای طراحی ناگسسته تا حصول همگرایی معقولی به جواب پیوسته، فعال نشود. این کار به ویژه در مورد مسائلی که در آنها بازه بین مقادیر گسسته بسیار کوچک است صادق است.

معیاری برای فعال کردن ضریب جریمه ناگسستگی  $s$  مانند معیار همگرایی معادله (۵.۷.۶) است، یعنی:

$$\left| \frac{\phi - f}{f} \right| \leq \epsilon_c. \quad (5.7.27)$$

مقدار معمول برای  $\epsilon_c$ ، 0.01 است. مقدار ضریب جریمه ناگسسته،  $s$ ، در اولین چرخه گسسته چنان محاسبه می شود که جریمه مربوط به متغیرهای طراحی با مقادیر گسسته که در مقادیر مجازشان نیستند از مرتبه ۱۰ درصد جریمه قید باشد.

$$s \approx 0.1rp(g). \quad (5.7.28)$$

با جلو رفتن چرخه های بهینه سازی گسسته، ضریب جریمه ناگسسته برای چرخه جدید با ضریبی از مرتبه ۱۰ افزایش می یابد. تصمیم چگونگی کنترل ضریب جریمه قیدها،  $r$ ، در فرایند بهینه سازی گسسته نیز مهم است. اگر  $r$  در هر چرخه بهینه سازی گسسته مانند فرایند بهینه سازی پیوسته کاهش یابد، به سبب جریمه زیاد نقض قید طراحی می تواند معطل بماند. بنابراین، پیشنهاد می شود که ضریب جریمه  $r$  در پایان فرایند بهینه سازی پیوسته ثابت نگهداشته شود. با این وجود، نزدیکترین جواب گسسته در این سطح پاسخ ممکن است یک طراحی قابل قبول نباشد، در این صورت طراحی باید با برگشتن به سطح پاسخ قبلی از بهین پیوسته دور شود. این کار را می شود با افزایش ضریب جریمه،  $r$ ، با یک ضریب ۱۰ انجام داد.

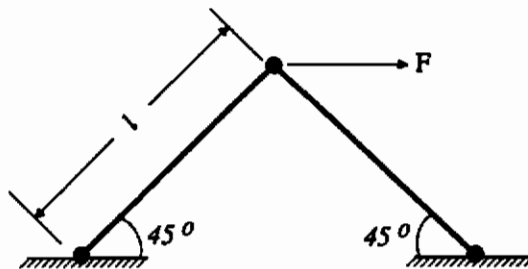
فرایند حل بهینه سازی گسسته در صورتی که متغیرهای طراحی به اندازه کافی به مقادیر گسسته داده شده نزدیک باشند، قطع می شود. معیار همگرایی برای بهینه سازی گسسته عبارت است از:

$$\max_{i \in I_i} \left\{ \min \left\{ \frac{|x_i - d_{ij}|}{d_{i(j+1)} - d_{ij}}, \frac{|x_i - d_{i(j+1)}|}{d_{i(j+1)} - d_{ij}} \right\} \right\} \leq \epsilon_d, \quad (5.7.29)$$

که در آن مقدار معمول رواداری (تولرانس) همگرایی  $\epsilon_d$  برابر با 0.001 است.

## مثال ۵.۷.۲

مساحت‌های سطح مقطع یک خربای دو عضوی که در شکل ۵.۷.۵ نشان داده شده باید از میان مجموعه‌ای از مقادیر گسسته  $A_i \in \{1.0, 1.5, 2.0\}$ ,  $i = 1, 2$  انتخاب گردند. با استفاده از رهیافت تابع جریمه بهبود یافته، سازه‌ای با وزن مینیم چنان بدست آورید که تغییر مکان افقی  $u$  در نقطه اثر نیرو از  $2/3(FI/E)$  تجاوز نکند. رواداری (تولرانس) را برای فعال کردن جملات جریمه برای متغیرهای طراحی با مقادیر ناگسسته،  $\epsilon_e = 0.1$  و رواداری (تولرانس) همگرایی برای متغیر طراحی  $\epsilon_d = 0.001$  در نظر بگیرید.



شکل ۵.۷.۵ خربای دو میله‌ای

بعد از نرمال سازی، مسأله طراحی عبارت است از:

$$f = \frac{W}{\rho l} = x_1 + x_2$$

$$g = \frac{uE}{Fl} = 1.5 - 1/x_1 - 1/x_2 \geq 0, \quad \text{را مشروط به}$$

$$x_i = A_i \in \{1.0, 1.5, 2.0\}, \quad i = 1, \dots, 2. \quad \text{مینیم کنید.}$$

با استفاده از طراحی اولیه  $x_1 = x_2 = 5$  و پارامتر انتقال  $g_0 = 0.1$ ، داریم  $g = 1.1 > g_0$ ، بنابراین،

از معادله (۵.۷.۱۴) جملات جریمه برای قیدها به شکل  $p(g) = 1/g$  خواهند بود. تابع افزایش یافته برای رهیافت تابع جریمه داخلی گسترش یافته عبارت است از:

$$\phi = x_1 + x_2 + \frac{r}{1.5 - 1/x_1 - 1/x_2}.$$

با برابر صفر قرار دادن گرادیان، می‌توانیم نشان دهیم که مینیم تابع افزایش یافته به عنوان یک تابع از

بخش ۵.۷: روشهای تابع جریمه ۴۶۵

ضریب جریمه  $r$  عبارت است از:

$$x_1 = x_2 = \frac{24 + \sqrt{576 - 36(16 - 4r)}}{18}.$$

مقدار اولیه ضریب جریمه  $r$  به شکلی انتخاب می گردد که جریمه قیدها برابر با مقدار تابع هدف شود،

$$r \frac{1}{g(x_0)} = f(x_0), \quad r = 11.$$

مینیم تابع افزایش یافته به عنوان تابعی از ضریب جریمه  $r$  در جدول ۵.۷.۳ نشان داده شده است. بعد از چهار چرخه، جریمه قید  $(\phi - f)$  در محدوده مطلوب تابع هدف است و جملات جریمه برای مقادیر ناگسسته متغیرهای طراحی را فعال می کند.

از معادله (۵.۷.۲۵) تابع افزایش یافته برای رهیافت تابع جریمه بهبود یافته به شکل زیر است:

$$\phi = x_1 + x_2 + \frac{r}{1.5 - 1/x_1 - 1/x_2} + \frac{s \{1 + \sin[4\pi(x_1 - 1.125)]\}}{2} + (s/2) \{1 + \sin[4\pi(x_2 - 1.125)]\}.$$

جدول ۵.۷.۳: مینیم سازی  $\phi$  بدون جریمه گسستگی

$r$	$x_1$	$x_2$	$f$	$g$	$\phi$
-	5.000	5.000	10.00	1.100	-
11	3.544	3.544	7.089	0.9357	18.844
1.1	2.033	2.033	4.065	0.5160	6.197
0.11	1.554	1.554	3.109	0.2134	3.624
0.011	1.403	1.403	2.807	0.0747	2.954

مینیم تابع افزایش یافته را این بار نیز می توان با برابر صفر قرار دادن گرادیان

$$1 - \frac{r}{(1.5 - 2/x_1)^2 x_1^2} + 2\pi s \cos[4\pi(x_1 - 1.125)] = 0,$$

بدست آورد که می تواند به روش عددی حل شود. مقدار اولیه ضریب جریمه  $s$  از معادله (۵.۷.۲۸)

محاسبه می شود.

$$s = 0.1 (0.011) \frac{1}{0.0747} = 0.0147.$$

مینیم تابع افزایش یافته (که جریمه متغیرهای ناگسسته را شامل می شود) در جدول ۵.۷.۴ بر



حسب تابعی از  $s$  نشان داده شده است.

جدول ۵.۷.۲ مینیم سازی  $\phi$  با جریمه گسستگی

$r$	$s$	$x_1$	$x_2$	$f$	$\phi$
0.011	0.0147	1.406	1.406	2.813	2.963
	0.1472	1.432	1.432	2.864	3.021
	1.472	1.493	1.493	2.986	3.060
	14.72	1.499	1.499	2.999	3.065
	147.2	1.500	1.500	3.000	3.066

بعد از چهار چرخه 'گسسته مینیم را در  $x_1 = x_2 = 3/2$  بدست می آوریم. دو مینیم دیگر نیز

وجود دارد،  $x = (2, 1)$  و  $x = (1, 2)$  با دو مقدار یکسان تابع هدف  $f = 3.0$ . •••

## ۵.۸ روشهای ضرایب

روشهای ضرایب، استفاده از ضربگرهای لاگرانژ و توابع جریمه را با هم ترکیب می کنند. هنگامی که تنها ضربگرهای لاگرانژ به کار می روند، بهین به جای این که یک مینیم تابع لاگرانژین باشد یک نقطه ایستاست. هنگامی که تنها توابع جریمه به کار می روند، یک مینیم داریم، ولی بدخیمی نیز وجود دارد. با به کارگیری هر دو امید است که یک مسأله نامقید داشته باشیم که تابع مینیم شونده 'آن بدخیم نباشد. توسط برتسکاس<sup>۱</sup> [17] یک بررسی خوب راجع به روشهای ضرایب انجام گرفته است. ما در ابتدا استفاده از روشهای ضرایب را برای مسائل با قید تساوی مطالعه می کنیم.

$$f(x) \quad (5.8.1) \quad \text{را با قیدهای} \quad h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n_e \quad \text{مینیم کنید.}$$

تابع لاگرانژین افزایش یافته را تعریف می کنیم

$$\mathcal{L}(x, \lambda, r) = f(x) - \sum_{j=1}^{n_e} \lambda_j h_j(x) + r \sum_{j=1}^{n_e} h_j^2(x). \quad (5.8.2)$$

اگر تمامی ضربگرهای لاگرانژ برابر صفر قرار داده شوند، تابع جریمه خارجی معمولی را خواهیم داشت. از طرف دیگر، اگر از مقادیر درست ضربگرهای لاگرانژ استفاده کنیم،  $\lambda_j$ ، می توان نشان داد که برای هر

1) Bdrtskas

بخش ۵.۸: روشهای ضرایب ۲۶۷

مقدار مثبت ۳ مینیمم درست مسأله (۵.۸.۱) را بدست خواهیم آورد. آن گاه دیگر نیازی به استفاده از مقادیر بزرگ ۳، که برای تابع جریمه خارجی لازم بود، نداریم. البته، مقادیر صحیح ضربگرهای لاگرانژ را نمی دانیم.

روشهای ضرایب بر مبنای حدس ضربگرهای لاگرانژ قرار دارند. وقتی حدس خوب باشد امکان دارد که بدون استفاده از مقادیر بزرگ ۳ به مینیمم نزدیک شویم. مقدار ۳ تنها باید به اندازه ای بزرگ باشد که  $\mathcal{L}$  در بهین یک مینیمم داشته باشد و نه یک نقطه ایستا. برای داشتن یک حدس برای ضربگرهای لاگرانژ شرایط ایستایی برای  $\mathcal{L}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n_s} (\lambda_j - 2r h_j) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0, \quad (5.8.3)$$

را با شرایط دقیق برای ضربگرهای لاگرانژ

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n_s} \lambda_j^* \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0. \quad (5.8.4)$$

مقایسه می کنیم. با مقایسه معادلات (۵.۸.۳) و (۵.۸.۴) انتظار داریم که با نزدیک شدن به مینیمم داشته باشیم.

$$\lambda_j - 2r h_j \rightarrow \lambda_j^*, \quad (5.8.5)$$

بر اساس این رابطه، هستنس<sup>۱</sup> [18] استفاده از معادله (۵.۸.۵) را به عنوان تخمین  $\lambda_j^*$  پیشنهاد کرد. یعنی

$$\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_j^{(k)} - 2r^{(k)} h_j^{(k)}, \quad (5.8.6)$$

که در آن  $k$  شماره چرخه است.

### مثال ۵.۸.۱

مثال ۵.۷.۱ را با استفاده از روش ضرایب هستنس تکرار می کنیم.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + 10x_2^2, \\ h(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 - 4 = 0. \end{aligned}$$

1) Hestenes

۲۶۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۵: بهینه سازی مقید)

لاگرانژین افزایش یافته عبارت است از:

$$\mathcal{L} = x_1^2 + 10x_2^2 - \lambda(x_1 + x_2 - 4) + r(x_1 + x_2 - 4)^2.$$

برای یافتن نقاط ایستای لاگرانژین افزایش یافته، نسبت به  $x_1$  و  $x_2$  مشتق می گیریم. داریم:

$$\begin{aligned} 2x_1 - \lambda + 2r(x_1 + x_2 - 4) &= 0, \\ 20x_2 - \lambda + 2r(x_1 + x_2 - 4) &= 0, \end{aligned}$$

که خواهیم داشت

$$x_1 = 10x_2 = \frac{5\lambda + 40r}{10 + 11r}.$$

می خواهیم نتایج را با آنچه در مثال ۵.۷.۱ داشتیم مقایسه کنیم، بنابراین با مقدار اولیه یکسانی برای  $r$  که  $r_0 = 1$  بود و حدس اولیه  $\lambda = 0$  شروع می کنیم. داریم:

$$\mathbf{x}_1 = (1.905, 0.1905)^T, \quad h = -1.905.$$

بنابراین، با استفاده از معادله (۵.۸.۶)  $\lambda^{(1)}$  را به شکل زیر حدس می زنیم

$$\lambda^{(1)} = -2 \times 1 \times (-1.905) = 3.81.$$

آن گاه بهینه سازی را با  $r^{(1)} = 10$ ،  $\lambda^{(1)} = 3.81$  تکرار می کنیم و داریم:

$$\mathbf{x}_2 = (3.492, 0.3492)^T, \quad h = -0.1587.$$

برای مقدار یکسان  $r$ ، در مثال ۵.۷.۱ داشتیم  $\mathbf{x}_2 = (3.333, 0.3333)^T$ ، بنابراین اکنون به جواب دقیق  $\mathbf{x} = (3.636, 0.3636)^T$  نزدیکتریم. اکنون از معادله (۵.۸.۶) یک  $\lambda$  جدید حدس می زنیم.

$$\lambda^{(2)} = 3.81 - 2 \times 10 \times (-0.1587) = 6.984.$$

برای چرخه بعدی، به عنوان مثال، می شود مقدار  $r$  را در 10 ثابت نگهداشت و تنها  $\lambda$  را تغییر داد. برای  $\lambda = 6.984$  داریم:

بخش ۵.۹: روشهای لاگرانژی تصویر شده ... ۲۶۹

$$\mathbf{x}_3 = (3.624, 0.3624), \quad h = -0.0136,$$

که نشان می دهد بدون افزایش  $r$  می توان همگرایی خوبی بدست آورد. ...  
 برای گسترش روش ضرایب به قیدهای نامساوی راههای مختلفی وجود دارد. رابطه سازی زیر براساس کار فلتچر<sup>۱</sup> [19] قرار دارد. مسأله مقیدی که در نظر می گیریم عبارت است از:

$$f(\mathbf{x}) \quad (5.8.7) \\ g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g. \quad \text{را با قیدهای} \quad \text{مینیم کنید.}$$

تابع لاگرانژین افزایش یافته عبارت است از:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda, r) = f(\mathbf{x}) + r \sum_{j=1}^{n_g} \left( \frac{\lambda_j}{2r} - g_j \right)^2, \quad (5.8.8)$$

که در آن  $\langle a \rangle = \max(a, 0)$ . شرط ایستایی  $\mathcal{L}$  عبارت است از:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - 2r \sum_{j=1}^{n_g} \left( \frac{\lambda_j}{2r} - g_j \right) \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \quad (5.8.9)$$

شرط ایستایی دقیق عبارت است از:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \quad (5.8.10)$$

که لازم است  $\lambda_j^* g_j = 0$  نیز باشد. با مقایسه معادله (۵.۸.۹) و (۵.۸.۱۰) یک حدس  $\lambda_j^*$  به شکل زیر انتظار داریم.

$$\lambda_j^* = \max(\lambda_j - 2r g_j, 0). \quad (5.8.11)$$

## ۵.۹ روشهای لاگرانژی تصویر شده (برنامه ریزی درجه دوم دنباله ای)

اضافه کردن جملات جریمه به تابع لاگرانژین، توسط روشهای ضرایب، بهین را از نقطه ایستا بودن برای تابع لاگرانژین به نقطه مینیمم لاگرانژین افزایش یافته تبدیل می کند. روشهای لاگرانژی تصویر

1) Fletcher

شده با روش دیگری به نتیجه مشابهی می‌رسند. آنها بر اساس این قضیه قرار دارند که می‌گویند: بهین‌مینیم تابع لاگرانژین در زیر فضای بردارهای عمود بر گرادینهای قیدهای فعال (زیر فضای مماس) است. روشهای لاگرانژی تصویر شده یک تقریب درجه دوم برای لاگرانژین در این زیر فضا به کار می‌برند. الگوریتم جست و جوی جهت آن از روشهای دیگری که تاکنون گفته شد پیچیده ترند. این الگوریتم به جواب مسأله برنامه ریزی درجه دوم نیاز دارد که یک مسأله بهینه سازی با تابع هدف درجه دوم و قیدهای خطی است. روشهای لاگرانژی تصویر شده زیر مجموعه ای از روشهای برنامه ریزی درجه دوم دنباله ای (SQP) اند. کار بیشتری که در جواب مسأله یافتن جهت در برنامه ریزی درجه دوم انجام می‌شود اغلب با همگرایی سریعتر آن جبران می‌شود.

بحث فعلی یک شکل ساده شده از روش لاگرانژی تصویر شده پاول [20] است. به ویژه ما تنها حالت قیدهای نامساوی را در نظر می‌گیریم:

$$(5.9.1) \quad f(x) \quad \text{را با قیدهای} \quad g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g \quad \text{مینیم کنید.}$$

فرض می‌شود طراحی در چرخه  $i$ ام در  $x_i$  است، و ما دنبال یافتن یک جهت حرکت  $s$  هستیم. جهت جواب مسأله برنامه ریزی درجه دوم زیر است.

$$(5.9.2) \quad \phi(s) = f(x_i) + s^T g(x_i) + \frac{1}{2} s^T A(x_i, \lambda_i) s$$

را با شرط  $g_j(x_i) + s^T \nabla g_j(x_i) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g$  مینیم کنید.

در حالی که  $g$  گرادین  $f$ ، و  $A$  یک تقریب معین مثبت هسیان تابع لاگرانژین است که در بالا بحث شد. این مسأله برنامه ریزی درجه دوم می‌تواند با روشهای مختلفی که از مزایای طبیعت خاص آن بهره می‌گیرند حل شود. جواب مسأله برنامه ریزی درجه دوم  $s$  و  $\lambda_{i+1}$  را می‌دهد. آن گاه داریم:

$$(5.9.3) \quad x_{i+1} = x_i + \alpha s,$$

که در آن  $\alpha$  با مینیم سازی تابع زیر بدست می‌آید:

$$(5.9.4) \quad \psi(\alpha) = f(x) + \sum_{j=1}^{n_g} \mu_j |\min(0, g_j(x))|,$$

و  $\mu_j$ ها برابر با مقادیر مطلق ضربگرهای لاگرانژ چرخه اولند، یعنی:

بخش ۵.۹: روشهای لاگرانژی تصویر شده... ۲۷۱

$$\mu_j = \max\left[\lambda_j^{(i)}, \frac{1}{2}(\mu_j^{(i-1)} + |\lambda_j^{(i-1)}|)\right], \quad (5.9.5)$$

که اندیس پایینی  $i$  نشانگر شماره چرخه است، ماتریس  $A$  مقدار اولیه ای دارد که معین مثبت است (مثلاً ماتریس واحد) و آن گاه با استفاده از یک معادله از نوع BFGS بهنگام می شود.

$$A_{\text{new}} = A - \frac{A\Delta x\Delta x^T A}{\Delta x^T A\Delta x} + \frac{\Delta l\Delta l^T}{\Delta x^T \Delta x}, \quad (5.9.6)$$

که در آن

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta l = \nabla_x \mathcal{L}(x_{i+1}, \lambda_i) - \nabla_x \mathcal{L}(x_i, \lambda_i), \quad (5.9.7)$$

و  $\mathcal{L}$  تابع لاگرانژین و  $\nabla_x$  گرادیان تابع لاگرانژین نسبت به  $x$  است. برای تضمین معین مثبت بودن  $A$ ، اگر  $\Delta x^T \Delta l \leq 0.2 \Delta x^T A \Delta x$  باشد  $\Delta l$  بهبود می یابد و با مقدار زیر جایگزین می شود.

$$\Delta l' = \theta \Delta l + (1 - \theta) A \Delta x, \quad (5.9.8)$$

در حالی که

$$\theta = \frac{0.8 \Delta x^T A \Delta x}{\Delta x^T A \Delta x - \Delta x^T \Delta l}. \quad (5.9.9)$$

### مثال ۵.۹.۱

خریای چهار میله ای مثال ۵.۱.۲ را در نظر بگیرید. مسأله یافتن طراحی با وزن مینیمم مشروط به قیدهای تنش و تغییر مکان به شکل زیر رابطه سازی شد.

$$f = 3x_1 + \sqrt{3}x_2$$

$$g_1 = 3 - \frac{18}{x_1} - \frac{6\sqrt{3}}{x_2} \geq 0, \quad \text{را به شرط}$$

$$g_2 = x_1 - 5.73 \geq 0,$$

$$g_3 = x_2 - 7.17 \geq 0.$$

مینیمم کنید.

فرض کنید جست و جو را از محل تقاطع  $g_1 = 0$  و  $g_3 = 0$  یعنی جایی که  $x_1 = 11.61$ ،  $x_2 = 7.17$

۴۷۴ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۵: بهینه سازی مقید)

و  $f = 47.25$  است شروع می کنیم. گرادیان تابع هدف و دوقید فعال عبارت است از:

$$\nabla f = \left\{ \frac{3}{\sqrt{3}} \right\}, \quad \nabla g_1 = \left\{ \begin{matrix} 0.1335 \\ 0.2021 \end{matrix} \right\}, \quad \nabla g_3 = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0.1335 & 0 \\ 0.2021 & 1 \end{bmatrix}.$$

در شروع  $\mathbf{A}$  را برابر ماتریس واحد قرار داده داریم:

$$\phi(\mathbf{s}) = 47.25 + 3s_1 + \sqrt{3}s_2 + 0.5s_1^2 + 0.5s_2^2,$$

و توابع خطی شده عبارتند از:

$$g_1(\mathbf{s}) = 0.1335s_1 + 0.2021s_2 \geq 0,$$

$$g_2(\mathbf{s}) = 5.88 + s_1 \geq 0,$$

$$g_3(\mathbf{s}) = s_2 \geq 0.$$

این مسأله برنامه ریزی درجه دوم را مستقیماً با استفاده از شرایط کان-تاکر حل می کنیم.

$$3 + s_1 - 0.1335\lambda_1 - \lambda_2 = 0,$$

$$\sqrt{3} + s_2 - 0.2021\lambda_1 - \lambda_3 = 0.$$

توجه به تمامی حالت‌های ممکن برای قیدهای فعال نشان می دهد که بهین تنها وقتی  $g_1$  فعال است بدست می آید، بنابراین  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  و  $\lambda_1 = 12.8$ ،  $s_1 = -1.29$  و  $s_2 = 0.855$ . طراحی بعدی عبارت است از:

$$\mathbf{x}_1 = \left\{ \begin{matrix} 11.61 \\ 7.17 \end{matrix} \right\} + \alpha \left\{ \begin{matrix} -1.29 \\ 0.855 \end{matrix} \right\},$$

که در آن  $\alpha$  با مینیمم سازی  $\psi(\alpha)$  معادله (۴.۹.۵) بدست می آید. در چرخه اول  $|\lambda_j| = \mu_j$  بنابراین:

$$\psi = 3(11.61 - 1.29\alpha) + \sqrt{3}(7.17 + 0.855\alpha) + 12.8 \left| 3 - \frac{18}{11.61 - 1.29\alpha} - \frac{6\sqrt{3}}{7.17 + 0.855\alpha} \right|.$$

با تغییر نظام مند  $\alpha$  در می یابیم که  $\psi$  در نزدیک  $\alpha = 2.2$  مینیمم است، بنابراین

$$\mathbf{x}_1 = (8.77, 9.05)^T, \quad f(\mathbf{x}_1) = 41.98, \quad g_1(\mathbf{x}_1) = -0.201.$$

برای بهنگام کردن  $\mathbf{A}$  نیاز به  $\Delta \mathbf{x}$  و  $\Delta 1$  است. داریم:

بخش ۵.۹: روشهای لاگرانژی تصویر شده ... ۲۷۳

$$\mathcal{L} = 3x_1 + \sqrt{3}x_2 - 12.8(3 - 18/x_1 + 6\sqrt{3}/x_2),$$

بنابراین

$$\nabla_x \mathcal{L} = (3 - 230.4/x_1^2, \sqrt{3} - 133.0/x_2^2)^T,$$

و

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \begin{Bmatrix} -2.84 \\ 1.88 \end{Bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{l} = \nabla_x \mathcal{L}(\mathbf{x}_1) - \nabla_x \mathcal{L}(\mathbf{x}_0) = \begin{Bmatrix} -1.31 \\ 0.963 \end{Bmatrix}.$$

اگر  $\mathbf{A}$  ماتریس واحد باشد داریم  $\Delta \mathbf{x}^T \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = 11.6$ ،  $\Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{l} = 5.53$ . چون  $\Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{l} > 0.2 \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}$  است می‌توانیم از رابطه '۵.۹.۵' برای بهنگام کردن  $\mathbf{A}$  استفاده کنیم.

$$\mathbf{A}_{\text{new}} = \mathbf{I} - \frac{\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{x}^T}{\Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x}} + \frac{\Delta \mathbf{l} \Delta \mathbf{l}^T}{\Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0.453 & 0.352 \\ 0.352 & 0.775 \end{bmatrix}.$$

برای چرخه بعدی:

$$\phi(\mathbf{s}) = 41.98 + 3s_1 + \sqrt{3}s_2 + 0.5(0.453s_1^2 + 0.775s_2^2 + 0.704s_1s_2),$$

$$g_1(\mathbf{s}) = -0.201 + 0.234s_1 + 0.127s_2 \geq 0,$$

$$g_2(\mathbf{s}) = 3.04 + s_1 \geq 0,$$

$$g_3(\mathbf{s}) = 1.88 + s_2 \geq 0.$$

مجدداً می‌توانیم برنامه ریزی درجه دوم را مستقیماً با استفاده از شرایط کان-تاکر حل کنیم.

$$3 + 0.453s_1 + 0.352s_2 - 0.234\lambda_1 - \lambda_2 = 0,$$

$$\sqrt{3} + 0.352s_1 + 0.775s_2 - 0.127\lambda_1 - \lambda_3 = 0.$$

جواب عبارت است از:

$$\lambda_1 = 14.31, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad s_1 = 1.059, \quad s_2 = -0.376.$$

جست وجوی یک بعدی در پی یافتن مینیمم

$$\psi(\alpha) = f(\alpha) + \mu_1 g_1(\alpha),$$



است که در آن :

$$\mu_1 = \max(\lambda_1, \frac{1}{2}(|\lambda_1| + \mu_1^{old})) = 14.31 .$$

جست و جوی یک بعدی تقریباً به  $\alpha = 0.5$  می رسد، بنابراین :

$$\mathbf{x}_2 = (9.30, 8.86)^T, \quad f(\mathbf{x}_2) = 43.25, \quad g_1(\mathbf{x}_2) = -0.108 ,$$

دیده می شود که پیشرفت خوبی به طرف بهین  $\mathbf{x}^* = (9.46, 9.46)^T$  داشته ایم. . . .

### ۵.۱۰ تمرینها

۱. طبیعت نقاط ایستای مسأله مقید زیر را بررسی کنید.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 30, \\ x_2x_3 &\geq 2, \\ x_3 &\geq 4, \\ x_1x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

را مشروط به

مینیم کنید.

۲. برای مسأله

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= 3x_1^2 - 2x_1 - 5x_2^2 + 30x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 8, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 15, \\ x_2 &\leq 5. \end{aligned}$$

را مشروط به

مینیم کنید،

مینیمم بودن نقاط : (a)  $(5/3, 5.00)$ ، (b)  $(1/3, 5.00)$ ، (c)  $(3.97, 1.55)$  را بررسی کنید.

۳. مشتقهای جواب مثال ۵.۱۰ را نسبت به تغییرات تغییر مکان مجاز محاسبه کنید. ابتدا از

ضربگرهای لاگرانژ استفاده کرده و مشتقات تابع هدف را بدست آورید، و آن گاه مشتقات متغیرهای

طراحی و ضربگرهای لاگرانژ را محاسبه کرده و مشتقات تابع هدف را کنترل کنید. در نهایت، از مشتقات

جواب حدس بزنید که چه میزان می توان تغییر مکان مجاز را بدون تغییر مجموعه قیدهای فعال تغییر داد.

۴. مینیمم مسأله ۱ را با استفاده از روش تصویر گرادیان از نقطه  $(17, 1/2, 4)$  بدست آورید.

بخش ۵.۱۱: مراجع ۲۷۵

۵. دو حرکت دیگر از مثال ۵.۵.۲ را کامل کنید.
۶. یک جهت قابل قبول قابل استفاده برای مسأله ۱ در نقطه  $(17, 1/2, 4)$  بیابید.
۷. مثال ۵.۱.۲ را با استفاده از یک تابع جریمه 'خارجی' حل کنید.
۸. مثال ۵.۱.۲ را با استفاده از یک تابع جریمه 'داخلی' حل کنید.
۹. طراحی یک جعبه با بیشترین حجم را در نظر بگیرید که مساحت سطح جانبی آن  $S$  بوده و مساحت یک وجه آن  $S/4$  باشد. برای حل این مسأله از روش ضرایب استفاده کرده و سه متغیر طراحی در نظر بگیرید.
۱۰. دو چرخه 'دیگر' را در مثال ۵.۹.۱ کامل کنید.

### ۵.۱۱ مراجع

- [1] Kreisselmeier, G., and Steinhauser, R., "Systematic Control Design by Optimizing a Vector Performance Index," Proceedings of IFAC Symposium on Computer Aided Design of Control Systems, Zurich, Switzerland, pp. 113-117, 1979.
- [2] Sobieszczanski-Sobieski, J., "A Technique for Locating Function Roots and for Satisfying Equality Constraints in Optimization," NASA TM-104037, NASA LaRC, 1991.
- [3] Wolfe, P., "The Simplex Method for Quadratic Programming," Econometrica, 27 (3), pp. 382-398, 1959.
- [4] Gill, P.E., Murray, W., and Wright, M.H., Practical Optimization, Academic Press, 1981.
- [5] Dahlquist, G., and Bjorck, A., Numerical Methods, Prentice Hall, 1974.
- [6] Sobieszczanski-Sobieski, J., Barthelmy, J.F., and Riley, K.M., "Sensitivity of Optimum Solutions of Problem Parameters", AIAA Journal, 20 (9), pp. 1291-1299, 1982.
- [7] Rosen, J.B., "The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming—Part I: Linear Constraints", The Society for Industrial and Appl. Mech. Journal, 8 (1), pp. 181-217, 1960.
- [8] Abadie, J., and Carpentier, J., "Generalization of the Wolfe Reduced Gradient Method for Nonlinear Constraints", in: Optimization (R. Fletcher, ed.), pp. 37-49, Academic Press, 1969.
- [9] Rosen, J.B., "The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming—Part II: Nonlinear Constraints", The Society for Industrial and Appl. Mech. Journal, 9 (4), pp. 514-532, 1961.
- [10] Haug, E.J., and Arora, J.S., Applied Optimal Design: Mechanical and Structural Systems, John Wiley, New York, 1979.

- [11] Zoutendijk, G., *Methods of Feasible Directions*, Elsevier, Amsterdam, 1960.
- [12] Vanderplaats, G.N., "CONMIN—A Fortran Program for Constrained Function Minimization", NASA TM X-62282, 1973.
- [13] Fiacco, V., and McCormick, G.P., *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, John Wiley, New York, 1968.
- [14] Haftka, R.T., and Starnes, J.H., Jr., "Applications of a Quadratic Extended Interior Penalty Function for Structural Optimization", *AIAA Journal*, 14 (6), pp.718-724, 1976.
- [15] Moe, J., "Penalty Function Methods in Optimum Structural Design—Theory and Applications", in: *Optimum Structural Design* (Gallagher and Zienkiewicz, eds.), pp. 143-177, John Wiley, 1973.
- [16] Shin, D.K, Gürdal, Z., and Griffin, O. H. Jr., "A Penalty Approach for Nonlinear Optimization with Discrete Design Variables," *Engineering Optimization*, 16, pp. 29-42, 1990.
- [17] Bertsekas, D.P., "Multiplier Methods: A Survey," *Automatica*, 12, pp. 133-145, 1976.
- [18] Hestenes, M.R., "Multiplier and Gradient Methods," *Journal of Optimization Theory and Applications*, 4 (5), pp. 303-320, 1969.
- [19] Fletcher, R., "An Ideal Penalty Function for Constrained Optimization," *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, 15, pp.319-342, 1975.
- [20] Powell, M.J.D., "A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations", *Proceedings of the 1977 Dundee Conference on Numerical Analysis*, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 630, pp. 144-157, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

معمولاً تحلیلگران سازه یک برنامه طراحی می نویسند که در برگیرنده 'محاسبه پاسخ سازه هاست و افزون بر آن یک الگوریتم بهینه سازی مقید را که پیش از این در فصل ۵ مورد بحث قرار گرفتند مورد استفاده قرار می دهند. در بسیاری از موارد، تحلیلگر یک بسته 'تحلیل سازه مانند برنامه 'اجزای محدود و یک بسته نرم افزاری بهینه سازی در اختیار دارد. کار تحلیلگر ترکیب این دو برنامه و اعمال آن بر روی مسائل طراحی سازه ای است که می خواهد آنها را حل نماید.

در فرایند تعامل یک بسته تحلیل سازه با یک برنامه بهینه سازی دو مشکل اساسی وجود دارد. مشکل اول مشکل برنامه نویسی است. بسته های نرم افزاری بهینه سازی نوعاً نیازمند به برنامه های فرعی هستند که تابع هدف و قیود را ارزیابی نماید. هنگامی که برنامه تحلیل سازه بزرگ باشد، یا زمانی که تحلیلگر به کُد منبع اصلی برنامه دسترسی نداشته باشد (که معمولاً ندارد)، تبدیل بسته تحلیل به یک برنامه فرعی که توسط برنامه بهینه سازی فرا خوانده شود، بسیار مشکل است.

مشکل جدی دوم این است که در بسیاری از کاربردها هزینه محاسبات خیلی زیاد است. برای بسیاری از مسائل بهینه سازی سازه ها، ارزیابی تابع هدف و قیود مستلزم اجرا نمودن تحلیلهای اجزای محدود پر هزینه است تا بتوان تغییر مکانها، تنشها و پاسخهای دیگر سازه را بدست آورد. در فرایند بهینه سازی، ممکن است لازم باشد تابع هدف و قیود صدها و یا هزاران بار ارزیابی گردند. هزینه تحلیل اجزای محدود برای این تعداد تکرار، معمولاً بسیار زیاد است.

خوشبختانه برای تعامل برنامه بهینه سازی با یک برنامه تحلیل، راهکاری وجود دارد که هر دو مشکل را حل می کند. این راهکار که شهرت فزاینده ای دارد، بهینه سازی تقریبی دنباله ای نامیده می شود و

توسط اشمیت و فرشی<sup>۱</sup> [۱] پیشنهاد گردیده است. با استفاده از تحلیلهای تقریبی در بخشهایی از فرایند بهینه سازی مشکل هزینه محاسباتی مرتفع می گردد. بسته تحلیل سازه، ابتدا برای تحلیل طراحی اولیه استفاده می شود، و سپس اطلاعاتی را برای تقریب قیدها تولید می کند. به عنوان مثال، هنگامی که تعداد متغیرهای طراحی کم باشد، عملاً در چند نقطه در فضای طراحی، سازه را تحلیل می کنیم و با پاسخ بدست آمده در این نقاط یک تقریب چند جمله ای می سازیم که پاسخ تقریبی در نقاط دیگر را بدست دهد. آن گاه بسته نرم افزاری بهینه سازی در مسأله تقریبی که به صورت تقریب چند جمله ای بیان شده، به کار گرفته می شود. چون برنامه ریزی تقریب چند جمله ای ساده است، می توان آن را به راحتی با بسته نرم افزاری بهینه سازی ترکیب کرد.

تقریبهای ساده تولید شده، توسط استفاده مکرر از بسته های تحلیل، تقریبهای صریح کم هزینه نامیده می شوند و در مقابل وابستگی ضمنی پاسخ به متغیرهای طراحی در یک جواب اجزای محدود قرار دارند. تقریب چند جمله ای بدست آمده توسط تحلیل سازه در چند نقطه، طراحی یک تقریب فراگیر است. دستیابی به چنین تقریب فراگیر، در صورت زیاد بودن تعداد متغیرهای طراحی، می تواند بسیار پرهزینه باشد. برای مثال اگر بخواهیم پاسخ سازه را توسط برازش یک چند جمله ای درجه دوم تقریب بزنیم، لازم است تا سازه را در حداقل  $n(n+1)/2$  نقطه طراحی تحلیل نماییم که  $n$  تعداد متغیرهای طراحی است (نوعاً برای اطمینان از تقریب مستحکم به تعداد بیشتری تحلیل نیاز است). وقتی که تعداد متغیرهای طراحی به عنوان مثال از ۴۰ بیشتر باشد، بدست آوردن جواب مستلزم هزاران بار تحلیل است. بنابراین معمول آن است که از تقریبهای محلی، که بر مشتقهای تابع هدف و قیود نسبت به متغیرهای طراحی متکی است، استفاده شود. ساده ترین راهکار، جایگزینی تابع هدف و قیدها با تقریبهای خطی است که بر پایه این مشتقاتند. لکن این تقریبها فقط در یک همسایگی از فضای طراحی مفیدند. بنابراین وقتی از تحلیل تقریبی استفاده می شود، لازم است حدودی را به نام حدود حرکت برای بزرگی مجاز این تغییرات در طراحی تعریف نماییم.

در پی بهینه سازی انجام شده بر اساس تحلیل تقریبی و حدود حرکت، در نقاط بدست آمده از بهینه سازی تقریبی، یک تحلیل دقیق انجام شده و مشتقات جدید محاسبه می شود و بر اساس آنها تقریب جدیدی برای تابع هدف و قید ساخته می شود. این فرایند تا رسیدن به یک همگرایی تکرار می شود. معیار

1) Schmit and Farshi

بخش ۶.۱: تقریبهای عام ۲۷۹

همگرایی معمولاً مقدار تغییر تابع هدف و یا میزان برآورده شدن شرایط بهینگی (به عنوان مثال، شرایط کان-تاکر) است. از آن جا که هر بهینه سازی تقریبی در فرایند بهینه سازی کلی فقط یک دوره (سیکل) است، برای این نوع مسائل تقریبی معمولاً به کار بردن ملاک همگرایی ضعیفتری امکان پذیر است، به جز در مورد آخرین مسأله تقریبی. برای تمایز آنها از چرخه های داخلی بهینه سازی تقریبی، به چنین بهینه سازی ها یک حلقه (سیکل) می گویند و نه یک چرخه.

هنگامی که از تقریبهای خطی استفاده و حدود حرکت به عنوان نامساویهای خطی در نظر گرفته می شوند، این فرایند برنامه ریزی خطی دنباله ای (SLP) نامیده می شود و سالها پیش از آن که اشمیت و فرشی استفاده از آن را برای تقریب در بهینه سازی سازه ها پیشنهاد کنند، شناخته شده بوده است. با این وجود تا جایی که تقریبا بسیار کم هزینه تر از محاسبه تحلیلهای دقیق باشد لزومی ندارد که فرایند به تقریبهای خطی محدود شود. به عنوان مثال، اشمیت و فرشی کاربرد تقریبهای غیر خطی کم هزینه را با استفاده از تقریبهای وارونی، که در بخش ۶.۱ تشریح می شود، نشان دادند.

استفاده از بهینه سازی تقریبی دنباله ای در فرایند طراحی، گام کلیدی در تعامل یک برنامه تحلیل سازه با یک برنامه بهینه سازی است و بنابراین موضوع اصلی در بحث این فصل است. با این وجود، جنبه های دیگری از کاربرد عملی فرایند بهینه سازی در طراحی وجود دارد که باید مورد توجه قرار گیرد. در مسائل بهینه سازی شکلی وقتی که طراحی تغییر می کند مهم آن است که بتوانیم گسسته سازی سازه (به عنوان مثال، مدل اجزای محدود) را بهبود بخشیم. این کار در گرو داشتن یک برنامه تولید تقسیم بندی خبره است و در بخش ۶.۵ درباره آن بحث می شود. موضوعات دیگری که در این فصل بحث می شوند عبارتند از: بسته های نرم افزاری بهینه سازی و مسائل آزمایشی که اغلب برای ارزیابی عملکرد این نرم افزارها استفاده می شود. یکی از موضوعات مهمی که در این فصل به آن پرداخته نمی شود عبارت است از محاسبه مشتقات پاسخهای سازه که برای ساختن تقریب مورد نیاز است. این موضوع به مطالعه دقیقتری نیاز دارد که در فصلهای ۷ و ۸ به آن پرداخته می شود.

استفاده از بهینه سازی تقریبی دنباله ای بدون تردید به عنوان تنها راه پرداختن به بهینه سازی سازه های پیچیده مورد اقبال عمومی است. بیشتر تحلیلگران ترجیح می دهند که با اتکا به قضاوتشان یک مدل طراحی از مسأله به وجود بیاورند که تقسیم بندی اجزا در آن از آنچه آنها به عنوان تحلیل نهایی سازه قبول می کنند بازتر و بزرگتر باشد. آنها امیدوارند که گرایش طراحی آشکار شده در بهینه سازی مدل بازتر برای مدل

فشرده تر نیز کارایی داشته باشد. هر چند چنین رهیافتی قابل قبول می نماید، ولی در این جا بحث نخواهد شد زیرا به میزان زیادی به تجربه تحلیلگر متکی است و همچنین به نوع مسأله مورد بحث بستگی زیادی دارد. به این دلایل دسته بندی منطقی آن در یک کتاب درسی بسیار مشکل است.

## ۶.۱ تقریبهای عام

تقریبهای توابع هدف و توابع قیدی که معمولاً بیشتر استفاده می شوند بر اساس مقدار تابع و مشتقات آن در یک یا چند نقطه استوارند. بیشتر این تقریبه‌ها برای هر تابعی صرفنظر از این که پاسخ سازه باشد یا نه به کار می رود. به این دلیل، ما به چنین تقریبهای عام می گوئیم. تقریبهایی که به شکل خاصی از تحلیل مربوط می شوند و برای تولید تابع استفاده می شوند در بخش بعدی بحث می شوند. تقریبهای عام را می توان به تقریبهای محلی، که تنها در یک ناحیه محدودی از فضای طراحی دقت کافی دارند، و تقریبهای فراگیر که تابع را برای تمامی فضای طراحی تقریب می زنند، تقسیم کرد. تقریبهای بینابینی نیز وجود دارند که چیزی بین آن دو را می دهند.

### ۶.۱.۱ تقریبهای محلی

ساده ترین تقریب محلی، تقریب خطی بر اساس سری تیلور است. برای تابع  $g(x)$ ، تقریب خطی  $g_L(x)$  عبارت است از:

$$g_L(x) = g(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x_0} \quad (6.1.1)$$

در بسیاری از کاربردها، تقریب خطی حتی برای نقاط طراحی  $x$  که بسیار نزدیک  $x_0$  هستند، دقت کافی ندارد. دقت را می توان با در نظر گرفتن جملات بیشتری از بسط سری تیلور افزایش داد. البته این کار مستلزم محاسبات هزینه بر مشتقات مرتبه های بالاتر است. یک راه جذاب تر دیگر این است که متغیرهای مانعی پیدا شوند که تابع تقریب زده شده را آن گونه بسازند که رفتار خطی بیشتری داشته باشد. یعنی، متغیرهایی مانند:

$$y_i = y_i(x) \quad i = 1, \dots, m \quad (6.1.2)$$

تعریف شوند که در آن  $y_i$  ها  $m$  تابع از متغیرهای طراحی اند و متغیرهای مانع نامیده می شوند. تقریب

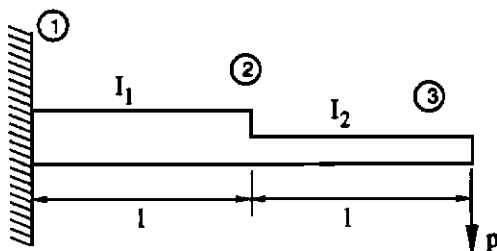
بخش ۶.۱: تقریبهای عام ۲۸۱

خطی،  $g_I$ ، بر حسب متغیرهای مانع عبارت است از:

$$g_I(y) = g(y_0) + \sum_{i=1}^m (y_i - y_{0i}) \left( \frac{\partial g}{\partial y_i} \right)_{y_0}, \quad (6.1.3)$$

که در آن  $y_{0i} = y_i(x_0)$ ، و مشتقات  $g$  نسبت به  $y_i$ ‌ها می‌تواند از مشتقات نسبت به  $x_i$ ‌ها محاسبه شود.

### مثال ۶.۱.۱



شکل ۶.۱.۱ مثال تیر

تیر نشان داده شده در شکل (۶.۱.۱) دارای سطح مقطع مستطیلی به عرض  $b_i$  و ارتفاع  $h_i$  است که  $i = 1, 2$  است. تغییر مکان سر آزاد چنان مقید شده که از  $w_{all}$  تجاوز نکند؛ با استفاده از نظریه 'مقدماتی' تیرها، این قید را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$g = w_{all} - \left( \frac{23}{6} \right) \frac{pl^3}{EI_1} - \left( \frac{5}{6} \right) \frac{pl^3}{EI_2}.$$

اگر متغیرهای طراحی عرض و ارتفاع هر بخش باشند، می‌توانیم  $g$  را بر حسب این متغیرهای طراحی به شکل زیر بیان کنیم:

$$g = w_{all} - \frac{46pl^3}{Eb_1h_1^3} - \frac{10pl^3}{Eb_2h_2^3}.$$

این عبارت یک تابع غیر خطی از درجه 'بالا' از متغیرهای طراحی است، اما با استفاده از متغیرهای مانع زیر:

$$y_1 = \frac{1}{I_1} = \frac{12}{b_1h_1^3}, \quad \text{و} \quad y_2 = \frac{1}{I_2} = \frac{12}{b_2h_2^3}.$$

می‌توان آن را خطی ساخت. بنابراین تابع قید را می‌توان به شکل تابع خطی زیر نوشت:



$$g = w_{all} - \left(\frac{23}{6}\right) \frac{pl^3}{E} y_1 - \left(\frac{5}{6}\right) \frac{pl^3}{E} y_2 \quad \dots$$

حالت‌هایی که متغیرهای مانع بتوانند قیدها را دقیقاً خطی سازند، بسیار کم است. مثال (۶.۱.۱) نمونه‌ای از سازه<sup>۱</sup> از نظر ایستایی معین است که معمولاً چنین خطی سازهایی در آنها امکان پذیر است. با این وجود، همچنان که توسط میلز کوران و دیگران<sup>۲</sup> [2] نشان داده شد، حتی اگر سازه‌های تیر و قاب از نظر ایستایی نامعین باشند، وارون گشتاورهای ماند، متغیرهای مانع خوبی برای قیدهای تغییر مکانند. در بسیاری از کاربردها، متغیرهای مانع توابعی از یک متغیر طراحی اند، یعنی:

$$y_i = y_i(x_i) \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.1.4)$$

در این حالت، نوشتن  $g_I$  معادله (۶.۱.۳) بر حسب متغیرهای اصلی راحت تر است.

$$g_I(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \left( y_i(x_i) - y_i(x_{0i}) \right) \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{dy_i}{dx_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \quad (6.1.5)$$

توجه کنید که در حالی که  $g_I$  تابعی خطی از  $y$  است، در حالت کلی تابعی غیر خطی از  $x$  است. یکی از متغیرهای مانع مشهور وارون متغیر  $x_i$  است.

$$y_i = \frac{1}{x_i} \quad (6.1.6)$$

این بازگو کننده این حقیقت است که مطالعات اولیه بهینه سازی سازه‌ها روی سازه‌هایی انجام شده که از اجزای خرابایی یا تنش صفحه‌ای تشکیل شده بودند. متغیرهای طراحی در این مطالعات معمولاً مساحت‌های سطح مقطع اجزای خراب و ضخامت اجزای تنش صفحه‌ای بودند. برای سازه‌های از نظر ایستایی معین، قیدهای تنش و تغییر مکان توابع خطی از وارون این متغیرهای طراحی اند. برای سازه‌هایی که از نظر ایستایی نامعینند، استفاده از وارون متغیرهای طراحی باز هم ابزار مفیدی برای بیشتر خطی ساختن قیدهاست (به عنوان مثال، مراجع استور اسلی و سوبیزانسکی<sup>۳</sup> [3] و نور و لودر<sup>۴</sup> [4] را ببینید). با تقریب وارون معادله<sup>۵</sup> (۶.۱.۵) به شکل زیر در می‌آید:

$$g_R(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \frac{x_{0i}}{x_i} \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \quad (6.1.7)$$

1) Mills- Curran et al.

2) Storaasli and Sobieszczanski

3) Noor and Lowder

بخش ۶.۱: تقریهای عام ۲۸۳

یکی از جنبه های جذاب تقریب وارون، حتی برای سازه های از نظر ایستایی نامعین، این است که خاصیت مقیاس بندی را همچنان حفظ می کند. یعنی، هنگامی که ماتریس سختی یک تابع همگن از مرتبه  $h$  از مؤلفه های  $x$  است، تغییر مکانها نیز توابع همگن از مرتبه  $h$  از مؤلفه های  $x$  هستند. برای اجزای خراب و غشائی،  $h=1$ ، بنابراین تغییر مکانها توابع همگنی از وارون متغیرهای طراحی اند. اگر تمامی متغیرهای طراحی با یک عاملی مقیاس بندی شوند، بردار تغییر مکان با وارون آن عامل مقیاس بندی می شود. فوچس<sup>۳</sup> [5] اهمیت خاصیت همگن بودن را مورد بررسی قرار داده است و فوچس و حاج علی<sup>۴</sup> [6] تعدادی تقریب پیشنهاد کرده اند که تقریب وارون را برای هر مرتبه از همگنی تعمیم می دهد. تقریب دیگر، که تقریب محافظه کارانه [7] نامیده می شود، ترکیبی از تقریبهای خطی و وارون است که محافظه کارتر از هر دو آنهاست. این تقریب برای روشهای تابع جریمه داخلی و تعمیم یافته داخلی (بخش ۵.۷ را ببینید) که به خوبی نقص قید را تحمل نمی کند، مناسب است. برای بدست آوردن تقریب محافظه کارانه از تفاضل تقریب وارون از تقریب خطی شروع می کنیم.

$$g_L(x) - g_R(x) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{0i})^2}{x_i} \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x_0} \quad (6.1.8)$$

علامت هر جمله در حاصل جمع از علامت نسبت  $(\partial g / \partial x_i) / x_i$  که علامت حاصلضرب  $x_i (\partial g / \partial x_i)$  نیز هست تعیین می شود. نقش متغیرهای طراحی که برای آنها این حاصلضرب منفی است، باعث می شود که تقریب وارون از تقریب خطی بزرگتر (مثبت تر) شود و بر عکس. از آن جا که قید به شکل  $g(x) \geq 0$  بیان می شود، یک تقریب مثبت تر، کمتر محافظه کار است. بنابراین، تقریب محافظه کارانه  $g_C$  برای هر متغیر طراحی با انتخاب سهم کوچکتر (کمتر مثبت) زیر صورت می گیرد.

$$g_C(x) = g(x_0) + \sum_{i=1}^n G_i (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x_0}, \quad (6.1.9)$$

که در آن

$$G_i = \begin{cases} 1 & x_{0i}(\partial g / \partial x_i) \leq 0, \\ x_{0i}/x_i & \end{cases} \quad (6.1.10)$$

توجه کنید که  $G_i = 1$  مربوط به یک تقریب خطی و  $G_i = x_{0i}/x_i$  با یک تقریب وارون از  $x_i$  متناظر است.

تقریب محافظه کارانه تنها تقریب ترکیبی خطی - وارون ممکن نیست. گاهی جنبه های فیزیکی ممکن است استفاده از تقریب خطی برای بعضی از متغیرها و وارون برای بعضی دیگر را ایجاب کند. (به مراجع هفتکه و شور<sup>۱</sup> [8] و پراساد<sup>۲</sup> [9] مراجعه شود). با این وجود، تقریب محافظه کارانه این مزیت را دارد که مقعر است (تمرین ۱). اگر تمامی قیدها با تقریب محافظه کارانه تقریب زده شود، ناحیه قابل قبول مسأله بهینه سازی تقریبی محدب است (بخش ۱.۲.۵ را ببینید). اگر تابع هدف را نیز با یک تابع محدب تقریب بزنیم، مسأله بهینه سازی تقریبی محدب است. در مسائل محدب داشتن یک بهین منحصر به فرد تضمین شده است و می توان آنها را با روشهای دوگان حل کرد (به بخش ۲.۲.۹ مراجعه کنید). در حقیقت، یک تقریب محدب  $f_C(x)$  از تابع هدف  $f(x)$ ، از وارون کردن فرایند بدست آوردن تقریب مقعر محافظه کارانه بدست می آید. یعنی (تمرین ۱)،

$$f_C(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n F_i(x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_0}, \quad (۶.۱.۱۱)$$

که در آن

$$F_i = \begin{cases} x_{0i}/x_i & x_{0i}(\partial f/\partial x_i) \leq 0, \\ 1 & \end{cases} \quad (۶.۱.۱۲)$$

این فرایند استفاده از تقریب محافظه کارانه برای قیدها و تقریب محدب برای تابع هدف توسط برایننت و فلوری<sup>۳</sup> [10] پیشنهاد شده و به عنوان خطی سازی محدب شناخته می شود. در بسیاری از کتابهای درسی و مقاله ها، قیدها به شکل  $g(x) \leq 0$  بیان می شوند و نه به شکل  $g(x) \geq 0$ . در این حالت تقریب محافظه کارانه محدب است و نه مقعر (یعنی برای قیدها نیز از معادله های (۶.۱.۱۱) و (۶.۱.۱۲) استفاده می کنیم). تقریبهای محافظه کارانه دیگری نیز وجود دارند (به عنوان مثال، پراساد [11] یا وو<sup>۴</sup> [12])، اما به این نکته مهم باید توجه داشت که تقریب ارائه شده در این جا مانند دیگر تقریبها، تضمینی برای محافظه کار بودن نشان به طور قطعی وجود ندارد (یعنی، نمی دانیم که تقریب محافظه کارانه تر از قید دقیق  $g_C(x) \leq g(x)$  است). تقریبی که در این جا ارائه شد تنها از تقریبهای خطی و وارون محافظه کارانه تر است.

گاهی از تقریبهای مرتبه بالاتر نیز استفاده می شود. به عنوان مثال، تقریب درجه دو،  $q_2$  با آوردن جملات

بخش ۶.۱: تقریبهای عام ۲۸۵

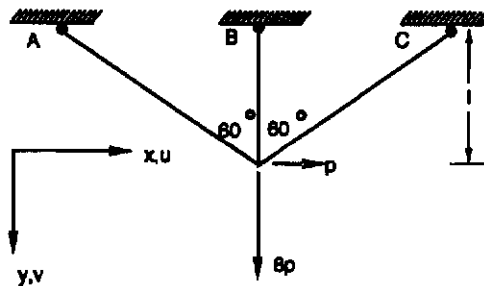
مرتبه دو در بسط سری تیلور بدست می آید.

$$g_Q(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\mathbf{x}_0} \quad (۶.۱.۱۳)$$

تقریب مرتبه دو وارون  $g_{QR}$  با استفاده از تقریب درجه دو برحسب وارون متغیرهای طراحی بدست می آید (تمرین ۲)،

$$g_{QR}(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_{0i}}{x_i} \right) \left( 2 - \frac{x_{0i}}{x_i} \right) (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{x_{0i}}{x_i} \right) \left( \frac{x_{0j}}{x_j} \right) (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\mathbf{x}_0} \quad (۶.۱.۱۴)$$

مثال ۶.۱.۲



شکل ۶.۱.۲ خرابای سه میله ای

مقایسه تقریبهای مختلف با استفاده از یک خرابای سه میله ای ساده نشان داده شده در شکل ۶.۱.۲. تشریح می شود. نیروی افقی  $p$  می تواند به طرف راست اعمال شود (مانند شکل) و یا به طرف چپ. خرابا باید چنان طراحی شود که قیدهای تنش و تغییر مکان برآورده شوند. متغیرهای طراحی مساحتهای سطح مقطع هاینده، یعنی  $A_A$ ،  $A_B$  و  $A_C$ . به خاطر تقارن خرابا و جهت اختیاری بار افقی باید  $A_A = A_C$  باشد. ما تقریب را برای تنش عضو C به کار می بریم که باید تنش کششی و فشاری در آن از  $\sigma_0$  کمتر باشد.

۲۸۶ مابنی بهینه سازی سازه ها (فصل ۶: سیمای بهینه سازی در عمل)

تشهای اعضا را می توان بر حسب مؤلفه های تغییر مکان سر خریا به شکل زیر بیان کرد:

$$\sigma_A = E(v + \sqrt{3}u)/4l, \quad \sigma_B = Ev/l, \quad \text{و} \quad \sigma_C = E(v - \sqrt{3}u)/4l.$$

از معادله های تعادل افقی داریم

$$\frac{\sqrt{3}}{2} A_A (\sigma_A - \sigma_C) = p, \quad \text{یا} \quad \frac{3EA_A}{4l} u = p.$$

به طور مشابه، از معادله تعادل عمومی داریم:

$$\frac{1}{2} A_A (\sigma_A + \sigma_C) + A_B \sigma_B = 8p, \quad \text{یا} \quad \frac{Ev}{l} \left( A_B + \frac{A_A}{4} \right) = 8p,$$

بنابراین

$$u = 4pl/3EA_A, \quad v = 8pl/E(A_B + 0.25A_A),$$

و

$$\sigma_C = p \left( -\frac{\sqrt{3}}{3A_A} + \frac{2}{A_B + 0.25A_A} \right).$$

با فرض این که عضو C در کشش باشد، تابع قید را می توان به شکل زیر نوشت:

$$g = 1 - \frac{\sigma_C}{\sigma_0} = 1 - \frac{p}{\sigma_0} \left( -\frac{\sqrt{3}}{3A_A} + \frac{2}{A_B + 0.25A_A} \right).$$

اکنون متغیرهای طراحی نرمال شده را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$x_1 = A_A \sigma_0 / p, \quad x_2 = A_B \sigma_0 / p,$$

بنابراین:

$$g = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3x_1} - \frac{2}{x_2 + 0.25x_1}.$$

g را حول نقطه  $x_0^T = (1, 1)$  تقریب می زنیم. مشتقهای اول عبارتند از:

بخش ۶.۱: تقریبهای عام ۴۸۷

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \left( -\frac{\sqrt{3}}{3x_1^2} + \frac{0.5}{(x_2 + 0.25x_1)^2} \right)_{\mathbf{x}_0} = -0.2574 ,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{2}{(x_2 + 0.25x_1)^2} \Big|_{\mathbf{x}_0} = 1.28 .$$

و مشتقهای دوم عبارتند از:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = \left( \frac{2\sqrt{3}}{3x_1^3} - \frac{0.25}{(x_2 + 0.25x_1)^3} \right)_{\mathbf{x}_0} = 1.0267 ,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{1}{(x_2 + 0.25x_1)^3} \Big|_{\mathbf{x}_0} = -0.512 ,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = -\frac{4}{(x_2 + 0.25x_1)^3} \Big|_{\mathbf{x}_0} = -2.048 .$$

با استفاده از این مشتقها و  $g(\mathbf{x}_0) = -0.0227$  می توانیم تقریبهای زیر را بسازیم

$$g_L = -0.0227 - 0.2574(x_1 - 1) + 1.28(x_2 - 1) ,$$

$$g_R = -0.0227 - 0.2574 \left( 1 - \frac{1}{x_1} \right) + 1.28 \left( 1 - \frac{1}{x_2} \right) = 1 + .2574/x_1 - 1.28/x_2 ,$$

$$g_C = -0.0227 - 0.2574(x_1 - 1) + 1.28 \left( 1 - \frac{1}{x_2} \right) ,$$

$$g_Q = g_L + 0.5134(x_1 - 1)^2 - 0.512(x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1.024(x_2 - 1)^2 ,$$

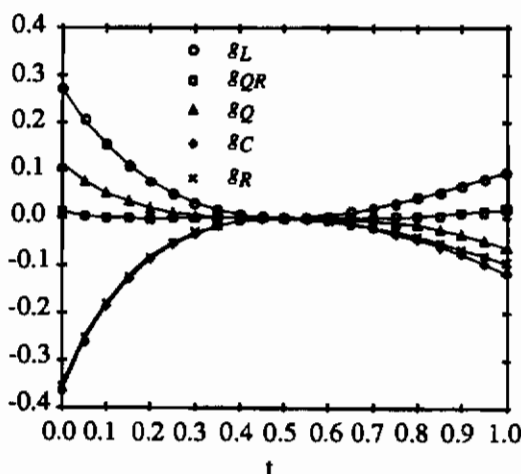
$$g_{QR} = -0.0227 - 0.2574 \left( 2 - \frac{1}{x_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{x_1} \right) + 1.28 \left( 2 - \frac{1}{x_2} \right) \left( 1 - \frac{1}{x_2} \right) \\ + 0.5134 \left( 1 - \frac{1}{x_1} \right)^2 - 0.512 \left( 1 - \frac{1}{x_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{x_2} \right) - 1.024 \left( 1 - \frac{1}{x_2} \right)^2 .$$

تمامی این تقریبها در  $\mathbf{x}_0 = (1, 1)^T$  مقادیر و مشتقهای دقیق دارند. دو تقریب درجه دو نیز در آن نقطه مشتق دوم دقیق دارند. تقریبهای وارون با میل کردن متغیرهای طراحی به سمت بی نهایت به سمت یک میل می کنند. این تقریبها مربوط به تنش در عضو C است که با میل مساحت سطح مقطع به سمت بی نهایت به صفر میل می کند. این رفتار فیزیکی صحیح در دیگر تقریبها دیده نمی شود. جدول ۶.۱.۱ پیش بینی پنج تقریب مقادیر دقیق را وقتی که  $x_1$  و  $x_2$  بین 0.75 و 1.25 تغییر می کنند نشان می دهد.

جدول ۶.۱.۱

$x_1$	$x_2$	$g$	$g_L$	$g_R$	$g_C$	$g_Q$	$g_{QR}$
0.75	0.75	-0.3635	-0.2783	-0.3635	-0.3850	-0.3422	-0.3635
1.00	0.75	-0.4227	-0.3426	-0.4493	-0.4493	-0.4066	-0.4209
1.25	0.75	-0.4205	-0.4070	-0.5008	-0.5137	-0.4070	-0.4280
0.75	1.00	0.0856	0.0417	0.0631	0.0417	0.0738	0.0915
1.25	1.00	-0.0619	-0.0870	-0.0741	-0.0871	-0.0549	-0.0639
0.75	1.25	0.3786	0.3617	0.3191	0.2977	0.3617	0.3919
1.00	1.25	0.2440	0.2974	0.2334	0.2334	0.2334	0.2435
1.25	1.25	0.1819	0.2330	0.1819	0.1690	0.1691	0.1819

جدول نشان می دهد که تقریبهای براساس وارون متغیرها از تقریبهای براساس متغیرهای واقعی بسیار دقیقترند و به ویژه اگر دو متغیر با ضریب مشابهی مقیاس بندی شوند (یعنی  $x$  با  $\alpha x$  جایگزین شود که  $\alpha$  یک عدد اسکالر است)، آنها دقیقند. تقریبهای درجه دو به مراتب از سه تقریب مرتبه اول دقیقترند. تضمینی برای اینکه تقریب محافظه کارانه ای که از تقریبهای مرتبه دو محافظه کارانه تر باشد وجود ندارد، ولی معمولاً مانند این مثال، محافظه کارانه تر است. با این وجود می بینیم که بهای این فوق محافظه کارانه بودن این است که کمترین دقت تقریب را دارد.



شکل ۶.۱.۳ مقایسه خطاهای تقریب قید

تقریبهای قید نیز می توانند برای بررسی خطاهای مشتق هایی که برای ساخت آنها به کار رفته استفاده شوند. این کار با محاسبه دقیق قید در امتداد یک خط در فضای طراحی و رسم خطا در تقریب در امتداد آن

## بخش ۶.۱: تقریبهای عام ۲۸۹

خط انجام می شود. یک تقریب مرتبه اول باید در طراحی اسمی منحنی خطای ضریب زاویه صفر داشته باشد، در صورتی که تقریب مرتبه دو باید در آن جانحنای صفر داشته باشد. به عنوان مثال، تقریبهای مختلف را در امتداد خط

$$x_1 = 1.25 - 0.5t, \quad x_2 = 0.5 + 1.0t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

مقایسه می کنیم که در آن  $t = 0.5$  طراحی اسمی را نمایش می دهد. شکل ۶.۱.۳ خط را به عنوان تابعی از  $t$  نشان می دهد. دیده می شود که تقریبهای مرتبه اول در  $t = 0.5$  شیب صفر دارند، و تقریبهای مرتبه دو در آنجا شعاع انحنای صفر دارند. برای این مثال، تقریب وارون کاملاً محافظه کارانه است، بنابراین تقریب محافظه کارانه تقریباً با آن برابر است. •••

تقریبهایی که تاکنون بیان شد از عملیات جبری روی توابع قیود بدست آمده بودند. در تلاشهایی که اخیراً به منظور بهبود بخشیدن به کیفیت تقریبهای انجام می شود روی تعمیم مفهوم متغیرهای طراحی میانی در مفهوم کمیتهای پاسخ میانی تأکید می شود. این مفهوم توسط اشمیت و میرا<sup>۱</sup> [13] در سال ۱۹۷۶ معرفی شد، ولی تا ده سال بعد به کار نرفت (به عنوان مثال به مرجع [14] مراجعه کنید). این رهیافت کمیتهای پاسخ میانی را جستجو می کند که به خوبی تقریب خطی شوند. اگر کمیتهای پاسخ ظاهر شده در قید را بتوان از پاسخ میانی با هزینه کمی محاسبه کرد، آن گاه می توانیم یک تقریب غیر خطی کم هزینه و دقیق داشته باشیم.

یکی از تقریبهای پاسخ میانی موفق برای قیدهای تنش در طراحی سازه ها توسط واندربلاتز<sup>۲</sup> و همکارانش (به عنوان مثال ۱۷-۱۴) پیشنهاد شد. واندربلاتز به این نتیجه رسید که تقریب نیروی اعضا دقیقتر از تقریب تنش اعضاست. این نتیجه مورد انتظار بود زیرا با تغییر مساحتهای سطح مقطع، نیروهای اعضا بسیار کندتر از تنشهای اعضا تغییر می کنند. به ویژه، برای خرپاهای از نظر ایستایی معین، نیرو در هر عضو ثابت است در حالی که تنش های اعضا با وارون مساحتهای سطح مقطع متناسبند. این موضوع انگیزه استفاده از نیروی اعضا به عنوان کمیتهای پاسخ میانی است.

به عنوان مثال، یک قید تنش برای یک عضو سازه ای به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$g_i = 1 - \frac{\sigma_i}{\sigma_{all}} \geq 0. \quad (6.1.15)$$

1) Schmit and Miura

2) Vanderplaats



یک تقریب عمومی برای تنشهای اعضا از وارون متغیرهای طراحی  $x_i = 1/A_i$ ، استفاده می کند که  $A_i$  مساحت سطح مقطع عضو  $i$ ام است. با استفاده از یک تقریب خطی برای نیروهای اعضا، و سپس تقسیم آن بر مساحت سطح مقطع برای داشتن یک تقریب برای تنش، بر اساس پیشنهاد واندریلاتز، قیدی به شکل زیر بدست می آوریم:

$$g_{LFi} = A_i - \frac{[F_i(A_0) + \nabla^T F_i(A_0)(A - A_0)]}{\sigma_{all}} \geq 0. \quad (6.1.16)$$

این قید بر حسب متغیرهای طراحی مساحت سطح مقطعه‌ها خطی است. توجه کنید که برای یک خرابی از نظر ایستایی معین، که گرادیان نیروهای اعضا نسبت به مساحت‌های سطح مقطع صفر است، تقریب معادله (۶.۱.۱۶) یک عدد ثابت است. معادله (۶.۱.۱۶) بعد مساحت دارد و باید آن را با تقسیم بر یک مساحت مبنا، بی بعد ساخت. مقایسه ای بین عملکرد این تقریب نیروی خطی و دیگر تقریبها در بخش ۶.۴ ارائه می شود.

## ۶.۱.۲ تقریبهای فراگیر و میانه

معمول ترین تقریب فراگیر رهیافت رویه پاسخ است. در این رهیافت تابع در چند نقطه نمونه گیری می شود، آن گاه یک عبارت تحلیلی به نام رویه پاسخ (معمولاً یک چند جمله ای) بر روی داده ها برازنده می شود. ساختن رویه پاسخ بیشتر به نظریه تجربه ها [18] متکی است و یک فرایند چرخه ای است که با فرض شکل تحلیلی رویه پاسخ، به عنوان مثال، یک چند جمله ای درجه دو، شروع می شود. تقریب، تعدادی پارامتر مجهول (مانند ضرایب چند جمله ای) دارد که باید برای تطبیق با تابع تقریب زده شده تنظیم گردد. برای تنظیم، در تعدادی از نقاط طراحی که به دقت انتخاب شده اند، تحلیل انجام می شود و آن گاه برای بدست آوردن مقادیر پارامترها از نتایج تحلیل، معمولاً از روش کمترین مربعات استفاده می شود. سپس مدل تقریبی (رویه پاسخ) برای پیش بینی تابع در چند نقطه آزمایشی منتخب استفاده می شود و از روشهای آماری کیفیت شایستگی آن و یا دقت رویه پاسخ ارزیابی می گردد. اگر شایستگی و برازنده شدن رضایت بخش نبود، فرایند بار دیگر شروع می شود و تجربیات بیشتری انجام می شود و یا مدل فرض شده با حذف و یا اضافه کردن جملاتی بهبود می یابد.

بخش ۶.۱: تقریبهای عام ۲۹۱

فنون رویه پاسخ در بهینه سازی سازه ها کمتر به کار رفته است (به مرجع بارثلمی و هفتکه<sup>۱</sup> [19] مراجعه کنید). کاربرد کمتر آن شاید به این سبب بوده که این فن تنها برای مسائلی عملی است که تعداد متغیرهای طراحی آنها کم است (کمتر از ۲۰). تعداد تحلیل هایی که برای ساختن رویه پاسخ لازم است، به طور چشمگیری با افزایش تعداد متغیرها افزایش می یابد.

### مثال ۶.۱.۳

برای تشریح استفاده از رویه پاسخ، یک رویه پاسخ خطی را بر قید تنش مثال ۶.۱.۲ زیر بدست می آوریم:

$$g = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3x_1} - \frac{2}{(x_2 + 0.25x_1)}.$$

فرض می شود رویه پاسخ یک چند جمله ای خطی باشد

$$g_{rs} = a + bx_1 + cx_2. \quad (\text{الف})$$

فرض می کنیم فضای طراحی به شکل زیر باشد.

$$0 \leq x_1, x_2 \leq 2.$$

برای یافتن  $a$ ،  $b$  و  $c$  باید  $g$  را حداقل در ۳ نقطه ارزیابی کنیم. برای اطمینان بیشتر از نقاط بیشتری استفاده می کنیم، مثلاً چهار نقطه<sup>۲</sup> زیر

$$\mathbf{x}_1^T = (0.5, 0.5), \quad \mathbf{x}_2^T = (1.5, 0.5), \quad \mathbf{x}_3^T = (0.5, 1.5), \quad \mathbf{x}_4^T = (1.5, 1.5).$$

با جایگزینی هر یک از این نقاط در معادله<sup>۳</sup> (الف)، چهار معادله زیر را بدست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 1.5 \\ 1 & 1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.0453 \\ -0.9008 \\ 0.9239 \\ 0.3182 \end{Bmatrix}.$$

برای بدست آوردن یک جواب حداقل مربعات از این چهار معادله و سه مجهول، دو طرف را در

1) Barthelemy and Haftka

۲۹۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۶: سیمای بهینه سازی در عمل)

ترانهاده<sup>۱</sup> ماتریس ضرایب ضرب نموده و دستگاه معادلات  $3 \times 3$  حاصل را حل می کنیم. مقادیر  $a = -1.5395$ ،  $b = -0.2306$  و  $c = 1.5941$  را بدست می آوریم، داریم:

$$g_{rs} = -1.5395 - 0.2306x_1 + 1.5941x_2.$$

این را با تقریب خطی حول  $(1,1)$  که در مثال ۶.۱.۲ یافتیم، یعنی

$$g_L = -0.0227 - 0.2574(x_1 - 1) + 1.28(x_2 - 1).$$

مقایسه می کنیم. همچنان که انتظار می رفت،  $g_L$  در نزدیکی  $(1,1)$  دقیقتر است و  $g_{rs}$  در نقاط دورتر، به عنوان مثال در  $(0.75, 0.75)$  داریم  $g = -0.3635$ ،  $g_L = -0.2783$ ،  $g_{rs} = -0.5169$ . در صورتی که در  $(0.5, 0.5)$  داریم  $g = -1.0453$ ،  $g_L = -0.5340$ ،  $g_{rs} = -0.8578$ ...

در فنون رویه پاسخ، قبل از فرایند بهینه سازی از فضای طراحی نمونه گیری می شود. اما، چون فرایند بهینه سازی به محاسبه قیدها و مشتقاتشان در بیشتر از یک نقطه نیاز دارد، استفاده از اطلاعات محاسبات قبلی در ساختن تقریبهایی با محدوده وسیعتر منطقی تر به نظر می رسد تا این که فقط از یک نقطه برای تقریب استفاده شود. این موضوع به مفهوم تقریبهایی چند نقطه که به تقریبهایی میانه مشهورند می انجامد. هفته و دیگران [20] تقریبهایی بر اساس دو و سه نقطه را مورد آزمون قرار دادند. تجربیات آنها این بود که تقریب در نقاط میانی (به عنوان مثال، در نقاط داخل مثلث متشکل از سه نقطه در یک تقریب سه نقطه ای) خوب کار می کند ولی در نقاط برون یک بهبود متوسط در دقت به وجود می آورد. یک تقریب دو نقطه ای که عملکرد بهتری دارد توسط فادل<sup>۱</sup> و دیگران [21] ارائه شد. تقریب تقریبی خطی از متغیرهای  $y_i = x_i^{p_i}$  است که نماها چنان انتخاب می شوند که با داده ها تطابق داشته باشند. کار را با ساختن یک تقریب خطی از  $y_i$  در اولین نقطه  $x_0$  شروع می کنیم. تقریب بر حسب متغیرهای اصلی به شکل زیر خواهد بود.

$$g_{tp} = g(x_0) + \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{x_i}{x_{0i}} \right)^{p_i} - 1 \right] \left( \frac{x_{0i}}{p_i} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x_0}. \quad (6.1.17)$$

آن گاه، نماهای  $p_i$  از شرط این که مشتقات  $g$  باید با مشتقات  $g_{tp}$  هایی که در نقطه دوم،  $x_1$ ، داریم تطابق

1) Fadel

بخش ۶.۱: تقریبهای عام ۴۹۳

داشته باشد، بدست می آیند. به آسانی می توان نشان داد که نماها از رابطه زیر بدست می آیند:

$$p_i = 1 + \frac{\log \left\{ \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x_1} / \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x_0} \right\}}{\log(x_{1i}/x_{0i})}. \quad (۶.۱.۱۸)$$

هنگامی که  $p_i$  از نظر مقدار از ۱ بزرگتر است با  $\text{sign}(p_i)$  یعنی علامت  $p_i$  جایگزین می شود تا از نماهای بزرگ جلوگیری شود. در مواقعی که نسبتهای موجود در صورت و مخرج معادله (۶.۱.۱۸) منفی اند و یا  $p_i$  صفر است باید دقت خاصی مبذول گردد. در حالت اول  $p_i$  را ۱ می گیرند در حالی که در حالت دوم با استفاده از بسط سری تیلور می توان نشان داد که:

$$\lim_{p_i \rightarrow 0} \frac{\left[ \left( \frac{x_i}{x_{0i}} \right)^{p_i} - 1 \right]}{p_i} = \log \left( \frac{x_i}{x_{0i}} \right). \quad (۶.۱.۱۹)$$

تقریب میانی دیگر تقریب مقیاس یا محلی - فراگیر [22] است. هدف این است که تقریب فراگیر بدست آمده از یک رهیافت سطح پاسخ یا از یک مدل ساده تر از مسأله با وارد کردن اطلاعات محلی بهبود یابد. ساده ترین رهیافت برای انجام چنین کاری استفاده از یک ضریب مقیاس بر اساس مقدار تابع در یک نقطه  $x_0$  است. یعنی، ضریب مقیاس عبارت است از:

$$s_c(x) = g(x)/g_G(x), \quad (۶.۱.۲۰)$$

که  $g_G$  تقریب فراگیر است. آن گاه تقریب فراگیر مقیاس شده،  $g_{s0}$  عبارت است از:

$$g_{s0}(x) = s_c(x_0)g_G(x). \quad (۶.۱.۲۱)$$

می توان با استفاده از مشتق  $g$  و ساختن یک ضریب مقیاس خطی  $s_{cL}$  به شکل

$$s_{cL} = s_c(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial s_c}{\partial x_i} \right)_{x_0}. \quad (۶.۱.۲۲)$$

که مشتق ضریب مقیاس عبارت است از:

$$\left( \frac{\partial s_c}{\partial x_i} \right) = s_c \left( \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{1}{g_G} \frac{\partial g_G}{\partial x_i} \right). \quad (۶.۱.۲۳)$$

بهبودی در ضریب مقیاس فوق به وجود آورد.

## ۴۹۴ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۶: سیمای بهینه سازی در عمل)

تقریب محلی - فراگیر توسط چنگ<sup>۱</sup> و دیگران [23] برای تقریب زدن تغییر مکانها، تنشها و بسامدهای یک سازه<sup>۲</sup> بال مافوق صوت که از یک مدل اجزای محدود بدست آمده بودند به کار گرفته شد. تقریب فراگیر استفاده شده یک مدل صفحه ای از بال بود.

### ۶.۲ فنون باز تحلیل سریع

فنون باز تحلیل سریع از نتیجه های محاسبات انجام شده در یک نقطه، برای کاهش هزینه محاسبه در یک نقطه<sup>۳</sup> دیگر، استفاده می کنند. بیشتر آنها طبیعتاً تقریبی اند و هر گاه نقطه<sup>۴</sup> طراحی بعدی به نقطه<sup>۵</sup> طراحی پیشین نزدیک باشد، خوب کار می کنند. در این بخش فرض می کنیم که پاسخ دقیق سازه در یک نقطه<sup>۶</sup> طراحی مانند  $x_0$  در دسترس است، و می خواهیم اثر یک اختلال کوچک یا متوسط در  $\Delta x$  را روی پاسخ محاسبه کنیم. خواص و پاسخ سازه در  $x_0$  را با، اندیس پایین صفر، و اختلال ها در خاصیت ها و پاسخ را با  $\Delta$  نشان خواهیم داد. به عنوان مثال،  $u_0 = u(x_0)$  مشخص کننده<sup>۷</sup> میدان تغییر مکان برای نقطه<sup>۸</sup> طراحی اولیه، و  $u_0 + \Delta u = u(x_0 + \Delta x)$  نشان دهنده میدان تغییر مکان نقطه<sup>۹</sup> طراحی اختلال یافته است.

#### ۶.۲.۱ پاسخ ایستایی خطی

معادلات گسسته تعادل برای پاسخ ایستایی خطی (که به عنوان مثال از یک تحلیل اجزای محدود بدست آمده) در یک نقطه<sup>۱۰</sup> طراحی مانند  $x_0$  عبارتند از:

$$K_0 u_0 = f_0, \quad (6.2.1)$$

که در آن  $K_0$ ،  $u_0$  و  $f_0$  به ترتیب ماتریس سختی، بردار تغییر مکان و بردار بار در نقطه<sup>۱۱</sup>  $x_0$  است. اکنون تغییر  $\Delta x$  در طراحی را در نظر بگیرید که به تغییر  $\Delta K$  در ماتریس سختی، و  $\Delta f$  در بردار بار می انجامد. معادلات تعادل در  $x_0 + \Delta x$  عبارت است از:

$$(K_0 + \Delta K)(u_0 + \Delta u) = f_0 + \Delta f. \quad (6.2.2)$$

از کم کردن معادله (۶.۲.۱) از معادله (۶.۲.۲) داریم:

بخش ۶.۲: فنون بازتحلیل سریع ۲۹۵

$$(K_0 + \Delta K)\Delta u = \Delta f - \Delta K u_0, \quad (6.2.3)$$

و می توانیم تقریب اول  $\Delta u_1$  از  $\Delta u$  را با صرفنظر کردن از جمله  $\Delta K \Delta u$  بدست آوریم

$$K_0 \Delta u_1 = \Delta f - \Delta K u_0. \quad (6.2.4)$$

این تقریب وقتی که  $\Delta x$  از نظر مقداری کوچک است، بسیار خوب است. افزون بر این، معمولاً در حل  $u_0$  می توانیم از  $K_0$  فاکتور گرفته و یا آن را به شکل دیگری تبدیل کنیم. بنابراین حل معادله (۶.۲.۴) نسبتاً کم هزینه است. هنگامی که  $\Delta K$  یک تابع خطی از  $x$  باشد، تقریب درست مانند تقریب خطی  $u$  بر حسب سری تیلور است. تقریب را می توانیم با تکرار همین فرایند بهبود بخشیم و تقریبی از مرتبه بالاتر از  $\Delta u$  بدست آوریم. از کم کردن معادله (۶.۲.۴) از معادله (۶.۲.۳) داریم:

$$(K_0 + \Delta K)(\Delta u - \Delta u_1) = -\Delta K \Delta u_1, \quad (6.2.5)$$

و بار دیگر می توانیم از  $\Delta K(\Delta u - \Delta u_1)$  در طرف چپ معادله صرفنظر کنیم و تقریب  $\Delta u_2$  را بر حسب  $\Delta u - \Delta u_1$  بدست آوریم:

$$K_0 \Delta u_2 = -\Delta K \Delta u_1. \quad (6.2.6)$$

فرایند را می توان تا بی نهایت ادامه داد و رابطه زیر را داشت:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta u_i, \quad (6.2.7)$$

که جمله های  $\Delta u_i$  در سری از فرایند چرخه ای حل

$$K_0 \Delta u_i = -\Delta K \Delta u_{i-1}. \quad (6.2.8)$$

به دست می آیند. البته تضمینی برای همگرا بودن سری وجود ندارد، به ویژه زمانی که  $\Delta x$  کوچک نیست. رهیافت دیگر برای بهبود بخشیدن به  $\Delta u_1$  توسط کارش و تای<sup>۱</sup> [24] پیشنهاد شد. نظر آنان این بود که

تغییرات سازه را می توان به دو قسمت مقیاس بندی کلی و باز توزیع مصالح تقسیم کرد. یعنی، ماتریس سختی اختلال یافته را به شکل زیر می نویسیم:

$$K_0 + \Delta K = sK_0 + \Delta K_s, \quad (۶.۲.۹)$$

که در آن  $s$  ضریب مقیاس بندی است. مقیاس بندی کلی را می توان به روش ساده ای مورد بحث قرار داد، بنابراین تنها به تحلیل قسمت باز توزیع نیاز داریم.  $s$  را چنان انتخاب می کنیم که  $\Delta K_s$  مینیمم شود. یعنی،  $s$  چنان انتخاب می شود که  $sK_0$  تا حد ممکن به  $K + \Delta K$  نزدیک باشد. کارش و تایی پیشنهاد مینیمم سازی مجموع مربعات اجزای  $\Delta K_s$  را نمودند. بنابراین، می توان نشان داد (تمرین ۷) که  $s$  از رابطه زیر بدست می آید:

$$s = 1 + \frac{\sum_{i,j} k_{0ij} \Delta k_{ij}}{\sum_{i,j} k_{0ij}^2}. \quad (۶.۲.۱۰)$$

اکنون طراحی اسمی که ماتریس  $sK_0$  دارد را در نظر می گیریم و نه  $K_0$ . برای این طراحی، میدان تغییر مکان به شکل زیر است:

$$u_s = (1/s)u_0. \quad (۶.۲.۱۱)$$

حالتی را در نظر می گیریم که تغییری در نیرو وجود ندارد  $\Delta f = 0$ ، آن گاه معادله (۶.۲.۴) برای این طراحی مقیاس بندی شده عبارت است از:

$$sK_0 \Delta u_{s1} = -\Delta K_s u_s = -[\Delta K - (s-1)K_0]u_0/s, \quad (۶.۲.۱۲)$$

که از معادله (۶.۲.۹) استفاده کرده ایم. با مقایسه این معادله با معادله (۶.۲.۴) داریم:

$$\Delta u_{s1} = \frac{1}{s^2} \Delta u_1 + \frac{s-1}{s^2} u_0.$$

تغییر کلی  $\Delta u$  در  $u$  در این رهیافت به شکل زیر پیش بینی می شود.

$$\Delta u_s = u_s - u_0 + \Delta u_{s1} = \left(\frac{1}{s} - 1\right)u_0 + \frac{1}{s^2} \Delta u_1 + \frac{s-1}{s^2} u_0 = \frac{1}{s^2} \Delta u_1 - \frac{(1-s)^2}{s^2} u_0. \quad (۶.۲.۱۳)$$

## مثال ۶.۲.۱

تصحیح جمله اول، با و بدون مقیاس بندی، را برای تقریب زدن قید تنش در عضو  $C$  از مثال (۶.۱.۲) اعمال کنید، در صورتی که مساحت سطح مقطع عضو  $B$ ، ۲۵ درصد  $(x_1 = 1)$  و  $x_2$  از ۱ به ۱.۲۵ افزایش می یابد، اگر مساحتها بر اساس مساحتهای بی بعد مثال ۶.۱.۲ تعریف شده باشند (افزایش یابد).

ماتریس سختی خرپای سه میله ای را می توان به شکل زیر بدست آورد:

$$\mathbf{K} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} 0.75A_A & 0 \\ 0 & A_B + 0.25A_B \end{bmatrix} = \frac{Ep}{l\sigma_0} \begin{bmatrix} 0.75x_1 & 0 \\ 0 & (x_2 + 0.25x_1) \end{bmatrix},$$

بنابراین:

$$\mathbf{K}_0 = \frac{Ep}{l\sigma_0} \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 1.25 \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathbf{K}_0 = \frac{Ep}{l\sigma_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

همچنین برای مثال (۶.۱.۲) داریم:

$$\mathbf{u}_0 = \frac{pl}{E} \left\{ \begin{array}{c} 4/3A_A \\ 8/(A_B + 0.25A_A) \end{array} \right\} = \frac{l\sigma_0}{E} \left\{ \begin{array}{c} 1.333 \\ 6.400 \end{array} \right\}.$$

با  $\Delta f = 0$ ، معادله (۶.۲.۴) به شکل زیر نوشته می شود:

$$\Delta\mathbf{u}_1 = -\mathbf{K}_0^{-1} \Delta\mathbf{K}\mathbf{u}_0 = \frac{l\sigma_0}{E} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -1.28 \end{array} \right\}.$$

از مثال (۶.۱.۲) داشتیم:

$$\sigma_C = E(v - \sqrt{3}u)/4l, \quad \text{و} \quad g = 1 - \sigma_C/\sigma_0.$$

بنابراین:

$$\Delta g = -\frac{E}{4l\sigma_0} (\Delta v - \sqrt{3}\Delta u). \quad (\text{الف})$$

با جایگزینی مؤلفه های  $\Delta\mathbf{u}_1$  داریم:

$$\Delta g = -\frac{E}{4l\sigma_0} \frac{l\sigma_0}{E} (-1.28) = 0.32.$$



۴۹۸ مبنای بهینه سازی سازه ها (فصل ۶: سیمای بهینه سازی در عمل)

از آن جا که برای طراحی اولیه  $g = -0.0227$ ، برای طراحی اختلال یافته  $g$  به صورت زیر پیش بینی می شود.

$$g \approx g_0 + \Delta g = -0.0227 + 0.32 = 0.2973,$$

همان گونه که انتظار می رفت، این مقدار مانند تقریب خطی است (به جدول ۶.۱.۱ مراجعه کنید). برای تقریب مقایس بندی شده از معادله (۶.۲.۱۰) استفاده می کنیم و داریم:

$$s = 1 + \frac{0.25 \times 1.25}{0.75^2 + 1.25^2} = 1.147.$$

معادله (۶.۲.۱۳) به شکل زیر خواهد شد:

$$\Delta \mathbf{u}_s = \frac{l\sigma_0}{1.147^2 E} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1.28 \end{Bmatrix} - \frac{0.147^2 l\sigma_0}{1.147^2 E} \begin{Bmatrix} 1.333 \\ 6.400 \end{Bmatrix} = \frac{l\sigma_0}{E} \begin{Bmatrix} 0.0218 \\ -1.0780 \end{Bmatrix}.$$

با جایگزینی در معادله (الف)، داریم:

$$\Delta g_s = -0.25(-1.078 - \sqrt{3} \times 0.0218) = 0.2789,$$

و

$$g_s = g_0 + \Delta g_s = -0.0227 + 0.2789 = 0.2562.$$

این تقریب به طور چشمگیری به نتیجه های دقیق (به جدول ۶.۱.۱ مراجعه کنید)  $g = 0.2440$  نزدیک است. • • •

این موضوع مسلم است (به عنوان مثال به مرجع هالی<sup>۱</sup> [25] مراجعه کنید) که وقتی ماتریس یک دستگاه معادلات با اضافه نمودن یک ماتریس از رتبه<sup>۲</sup> پایین بهبود یابد، یافتن اثر آن روی جواب دستگاه نسبتاً کم هزینه است. کار محاسباتی آن تقریبها برابر یافتن  $n$  جواب از دستگاه معادلات اصلی است که  $n$  رتبه<sup>۲</sup> ماتریس بهبود یافته است. هنگامی که  $n$  کوچک، و مرتبه<sup>۲</sup> دستگاه معادلات بزرگ باشد، یافتن  $n$  جواب دستگاه اصلی بسیار کم هزینه تر از یک فاکتورگیری جدید از دستگاه بهبود یافته است.

این موقعیت اغلب هنگامی به وجود می آید که ما بخش کوچکی از سازه را بهبود ببخشیم. به عنوان مثال، هنگامی که سختی یک عضو خرابا بهبود می یابد، ماتریس بهبود یافته از مرتبه<sup>۲</sup> یک است، و جواب

1) Haley

## بخش ۶.۲: فنون باز تحلیل سریع ۲۹۹

را می توان با یک بار حل مسأله اصلی به دست آورد. افزون بر این، می توان نشان داد [25] که با یافتن این جواب، جواب دقیق برای یک مقدار دلخواه از بهبود در دسترس است. فاجس و اشتانبرگ<sup>۱</sup> [26] نشان دادند که این جواب مانند جوابی است که برای بدست آوردن مشتق تغییر مکان نسبت به تغییر سختی نیاز داریم. بنابراین، آنها قادر بودند برای میدان تغییر مکان تقریبی بیابند که در بهبود یک عضو خرپا دقیق باشد. به طور مشابه، هولنیکي زولک<sup>۲</sup> [27] روشی را، بر اساس اعوجاج، ارائه دادند که بهبود دلخواه  $m$  عضو یک خرپا را به هزینه یافتن  $m$  مرتبه تغییر مکان خرپای اصلی ممکن می ساخت. این رهیافتها به ویژه برای بهینه سازی بسیار سودمندند، زیرا هنگامی که جوابهای تغییر مکانها بدست آمد، اعضای خرپا را می توان بار دیگر و بارها با هزینه محاسباتی کمی بهبود بخشید. برای اجزای محدودی که ماتریسهای سختی از رتبه بالاتری دارند، این رهیافت باز هم قابل کاربرد است، اما مزایای آن کم می شود.

## ۶.۲.۲ مسائل مقدار ویژه

پاسخ ارتعاشی یا کماتشی معمولاً با یک مسأله مقدار ویژه مقارن مدل می شود. در طراحی اسمی، مسأله مقدار ویژه ارتعاشی را می توان به شکل زیر نوشت:

$$K_0 u_0 - \mu_0 M_0 u_0 = 0, \quad (6.2.14)$$

که در آن  $K_0$  و  $M_0$  به ترتیب ماتریسهای سختی و جرم اند و  $u_0$  و  $\mu_0$  به ترتیب مقدار ویژه (مربع بسامد) و بردار ویژه (مد ارتعاشی) است که تمامی آنها در نقطه طراحی اسمی  $x_0$  ارزیابی می شوند. اگر  $\mu_0$  یک مقدار ویژه غیر تکراری باشد، اثر اختلال طراحی را می توان به راحتی تخمین زد. با نوشتن دوباره مسأله مقدار ویژه در  $x_0 + \Delta x$  داریم:

$$(K_0 + \Delta K)(u_0 + \Delta u) - (\mu_0 + \Delta \mu)(M_0 + \Delta M)(u_0 + \Delta u) = 0. \quad (6.2.15)$$

معادله (6.2.14) را از معادله (6.2.15) کم کرده و از جملات مرتبه دو و سه مانند  $\Delta K \Delta u$  در اختلال صرف نظر می کنیم. داریم:

$$(K_0 - \mu_0 M_0) \Delta u + (\Delta K - \mu_0 \Delta M) u_0 - \Delta \mu M_0 u_0 \approx 0. \quad (6.2.16)$$

۳۰۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۶: سیمای بهینه سازی در عمل)

با پیش ضرب  $u_0^T$  و استفاده از معادله (۶.۲.۱۴) و تقارن  $M_0$  و  $K_0$  داریم:

$$\Delta\mu \approx \frac{u_0^T(\Delta K - \mu_0 \Delta M)u_0}{u_0^T M_0 u_0} \quad (6.2.17)$$

می توانیم معادله (۶.۲.۱۵) را در  $(u_0 + \Delta u)^T$  ضرب کرده و از جملات مرتبه بالاتر در اختلال صرف نظر کنیم و به رابطه زیر برسیم:

$$\mu_0 + \Delta\mu \approx \frac{u_0^T(K_0 + \Delta K)u_0}{u_0^T(M_0 + \Delta M)u_0} \quad (6.2.18)$$

معادلات (۶.۲.۱۷) و (۶.۲.۱۸) از صرف نظر کردن جملات مرتبه دو و سه به دست آمده اند، و می توان نشان داد که خطای آنها (که با هم یکسان نیست) متناسب با مجذور اختلال در طراحی  $\Delta x$  است، یا این که آنها تقریبهای مرتبه اولند.

تقریب مرتبه اول دیگری توسط پریچارد و آدلمن<sup>۱</sup> [28] پیشنهاد شد. این تقریب براساس انتگرال مشتق مقدار ویژه  $\mu$  نسبت به متغیر طراحی  $x$  است. معادله (۶.۲.۱۷) برای مشتق مقدار ویژه را می شود به شکل زیر نوشت:

$$\frac{d\mu}{dx} = a - \mu b, \quad (6.2.19)$$

که

$$a = \frac{u^T \frac{dK}{dx} u}{u^T M u}, \quad \text{و} \quad b = \frac{u^T \frac{dM}{dx} u}{u^T M u} \quad (6.2.20)$$

با فرض این که  $a$  و  $b$  تغییر نمی کنند و  $a \neq 0$  است، جواب معادله دیفرانسیل را به عنوان تابعی از متغیر طراحی  $x$  بدست می آوریم که عبارت است از:

$$\mu = \left(\mu_0 - \frac{a}{b}\right)e^{-b(x-x_0)} + \frac{a}{b} \quad (6.2.21)$$

هنگامی که  $a \rightarrow 0$  میل می کند معادله (۶.۲.۲۱) به تقریب خطی استاندارد میل می کند. اگر متغیرهای متعددی همزمان تغییر یابند،  $x$  را می توان به عنوان فاصله در مسیر  $x_0$  تا  $x_0 + \Delta x$  در نظر گرفت

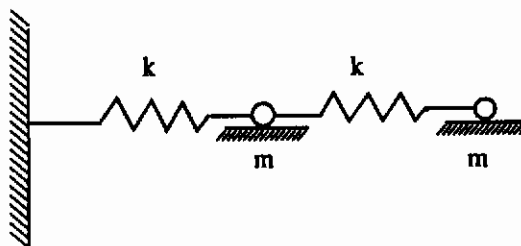
## بخش ۶.۲: فنون بازتحلیل سریع ۳۰۱

(مرجع [28] را ببینید). این تقریب را دی ای بی (DEB) (بر اساس معادله دیفرانسیل) می نامند [28]. تقریب مرتبه اول معادله (۶.۲.۱۸)، تقریب نسبت ریلی مقدار ویژه اختلال یافته براساس بردار ویژه اولیه  $u_0$  است. اگر بتوانیم تقریب خطی  $u_L$  برای بردار ویژه را محاسبه کنیم (به عنوان مثال، با استفاده از مشتق اول)، آن گاه می توانیم از نسبت ریلی استفاده کنیم و یک تقریب بسیار خوب برای مقدار ویژه اختلال یافته بدست آوریم که عبارت است از:

$$\mu_0 + \Delta\mu \approx \frac{u_L^T (K_0 + \Delta K) u_L}{u_L^T (M_0 + \Delta M) u_L} \quad (6.2.22)$$

این بار خطا در معادله (۶.۲.۲۲) متناسب با  $\|\Delta x\|^4$  است (به مرجع مرثی و هفتکه<sup>۱</sup> [29] مراجعه کنید)، بنابراین معادله (۶.۲.۲۲) یک تقریب مرتبه سوم است.

## مثال ۶.۲.۲



شکل ۶.۲.۱ سیستم جرم فنر

سیستم دو درجه آزادی نشان داده شده در شکل (۶.۲.۱) را در نظر بگیرید. اثر دو برابر کردن جرم طرف چپ را روی کمترین بسامد تخمین بزنید. ماتریسهای سختی و جرم برای این سیستم عبارت است از:

$$K = k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

کمترین مقدار ویژه و بردار ویژه مربوط به آن عبارتند از:

۳۰۴ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۶: سیمای بهینه سازی در عمل)

$$\mu_0 = 0.382k/m, \quad \mathbf{u}_0^T = (1, 1.618).$$

برای سیستم اختلال یافته تغییری در ماتریس سختی به وجود نمی آید، و داریم:

$$\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

از معادله (۶.۲.۲۰) داریم:

$$\Delta\mu \approx \frac{[1 \quad 1.618](-0.382k/m) \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}}{[1 \quad 1.618] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}} = -0.106k/m,$$

یا

$$\mu_0 + \Delta\mu \approx 0.276k/m.$$

به طور مشابه، از معادله (۶.۲.۲۱) داریم:

$$\mu_0 + \Delta\mu \approx \frac{[1 \quad 1.618] \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}}{[1 \quad 1.618] \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}} = 0.299k/m.$$

اکنون تقریب دی ای بی معادله (۶.۲.۲۱) با فرض  $x$  به عنوان تغییر در جرم چپ را در نظر می گیریم

$$b = \frac{[1 \quad 1.618] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}}{[1 \quad 1.618] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}} = 0.276/m, \quad a = 0.$$

برای طراحی اولیه  $x=0$ ، و برای طراحی اختلال یافته  $x=m$ ، بنابراین

$$\mu_0 = 0.382k/m, \quad \mathbf{u}_0^T = (1, 1.618).$$

نتیجه دقیق عبارت است از:

$$\mu_0 + \Delta\mu = 0.293k/m.$$

بخش ۶.۳: برنامه ریزی خطی دنباله ای ۳۰۳

می بینیم که خطای مربوط به سه تقریب مرتبه اول، ۵.۸٪، ۲.۰٪ و ۱.۰٪ نسبت ۳۰.۴٪ اختلاف بین مقدار ویژه اولیه  $(0.382k/m)$  و اختلال یافته بسیار کوچکند. • • •

### ۶.۳ برنامه ریزی خطی دنباله ای

تقریبهای قید و روشهای تحلیل تقریبی که در بخشهای پیشین مورد بحث قرار گرفتند، بیشتر هنگامی مفیدند که هزینه محاسباتی یک بار ارزیابی تابع هدف، قیدها، و مشتقاتشان نسبت به هزینه محاسباتی مربوط به عملیات بهینه سازی، مانند محاسبه جهت های جست و جو، بسیار بیشتر است. این حالت واقعی در بسیاری از مواردی است که برای تحلیل یک سازه، که با تعداد زیادی متغیر طراحی تعریف می شود، از یک مدل اجزای محدود با هزاران درجه آزادی استفاده می کنیم. بنابراین کاهش تعداد تحلیل های مورد نیاز برای فرایند طراحی، در کاربرد الگوریتم های بهینه سازی در مدل سازه بر اساس تقریبها، ارزشمند است. ساده ترین و مشهورترین رهیافت تقریب، برنامه ریزی خطی دنباله ای است (SLP). یک مسأله بهینه سازی به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$(۶.۳.۱) \quad \begin{array}{ll} \text{تابع} & f(\mathbf{x}), \\ \text{رابطه به} & g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g. \\ \text{مینیم کنید.} & \end{array}$$

رهیافت SLP از یک طراحی آزمایشی  $\mathbf{x}_0$  شروع می کند و تابع هدف و قیدها را با تقریبهای خطی بدست آمده از بسط سری تیلور حول نقطه  $\mathbf{x}_0$  جایگزین می کند.

$$(۶.۳.۲) \quad \begin{array}{ll} \text{تابع} & f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \\ \text{رابطه به} & g_j(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n_g \\ \text{و} & a_{li} \leq x_i - x_{0i} \leq a_{ui} \quad \text{مینیم کنید.} \end{array}$$

مجموعه قیود آخر حدود حرکت نامیده می شوند که  $a_{ui}$  و  $a_{li}$  به ترتیب کران پایین و بالای تغییرات مجاز  $x_i$  یا مقدار مجاز تغییرات  $x_i$  است.

به سبب تقریب به کار رفته و حدود حرکت، طراحی نهایی مسأله خطی سازی شده،  $\mathbf{x}_L$ ، به ندرت به طراحی بهین به شکل قابل قبولی نزدیک است. با این وجود اگر حدود حرکت به اندازه کافی کوچک باشند که یک تقریب خوبی را در این حدود حرکت تضمین کنند،  $\mathbf{x}_L$  از  $\mathbf{x}_0$  به بهین نزدیکتر خواهد بود.

## ۳۰۴ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۶: سیمای بهینه سازی در عمل)

بنابراین می توانیم  $x_0$  را با  $x_L$  جایگزین کرده و بهینه سازی خطی را با معادله (۶.۳.۱)، که حول نقطه شروع جدید خطی شده، تکرار کنیم. این فرایند تکرار می شود و ما در واقع مسأله بهینه سازی اصلی را با رشته ای از مسائل برنامه ریزی خطی (LP) جایگزین کرده ایم (بنابراین می توانیم بگوییم برنامه ریزی خطی دنباله ای). هر بهینه سازی خطی یک چرخه بهینه سازی نامیده می شود. طبیعت خطی سازی یک مسأله غیر خطی و کاربرد حدود حرکت در مثال بعدی تشریح می شود.

## مثال ۶.۳.۱

مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x_1 - x_2, & \text{تابع} \\ g_1 &= 25 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0, & \text{رانسبت به} \\ g_2 &= 7 - x_1^2 + x_2^2 \geq 0, \\ x_1, x_2 &\geq 0. & \text{مینیمم کنید} \end{aligned}$$

توابع قید را حول نقطه شروع  $x_0^T = (1.0, 1.0)$  خطی کرده و از حدود حرکت  $1.0x_i$  استفاده کنید. با ارزیابی توابع قید و مشتقات آنها در نقطه اولیه داریم:

$$g_1(x_0) = 25 - 1 - 1 = 23, \quad g_2(x_0) = 7 - 1 + 1 = 7,$$

$$\nabla g_1 = \begin{Bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{Bmatrix}, \quad (\nabla g_1)_{x_0} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -2 \end{Bmatrix},$$

$$\nabla g_2 = \begin{Bmatrix} -2x_1 \\ 2x_2 \end{Bmatrix}, \quad (\nabla g_2)_{x_0} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

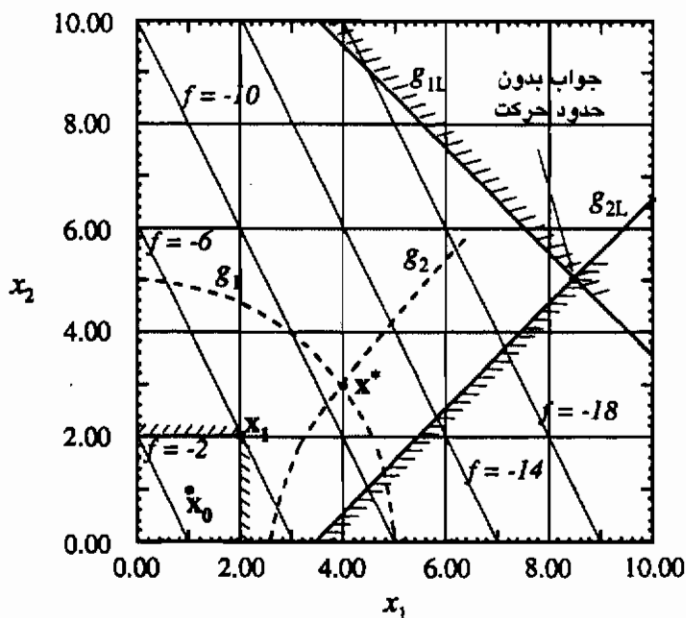
بنابراین، تقریبهای خطی به شکل زیر خواهند بود:

$$g_{1L}(x) = 23 + [-2 \ -2] \begin{Bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{Bmatrix} = 27 - 2x_1 - 2x_2 \geq 0,$$

$$g_{2L}(x) = 7 + [-2 \ 2] \begin{Bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{Bmatrix} = 7 - 2x_1 + 2x_2 \geq 0.$$

در شکل (۶.۳.۱) این خطی سازیها با خط پر و قیدهای اصلی با خط فاصله نشان داده شده است. حدود حرکت نیز در شکل نشان داده شده اند که یک مرز مربع مستطیل در اطراف نقطه طراحی اولیه

بخش ۶.۳: برنامه ریزی خطی دنباله ای ۳۰۵



شکل ۶.۳.۱ خطی سازی قید و حدود حرکت

تشکیل می دهند.

جواب این مسأله 'برنامه ریزی خطی جدید عبارت است از  $x_1^T = (2.0 \ 2.0)$  و تابع هدف  $f = -6$  است که نشان دهنده '100% بهبود در تابع هدف است. اگر حدود حرکتی وجود نمی داشت، جواب مسأله در  $x_1^T = (8.5 \ 5.0)$  و مقدار تابع هدف  $f = -22$  می شد (به شکل ۶.۳.۱ مراجعه کنید).

گرچه بدون حدود حرکت به مقدار تابع هدف بسیار بهتری می رسیدیم ولی قیود اصلی به طور چشمگیری نقض می شدند، همان گونه که در شکل (۶.۳.۱) دیده می شود. برای ارزیابی میزان نقض قید قابل قبول در ادامه این بخش روشی ارائه خواهد شد. ...

روش SLP به خاطر در دسترس بودن بسته های نرم افزاری LP مطمئن در بیشتر بسته های کتابخانه سیستم رایانه ها، جاذبه بیشتری دارد. از طرف دیگر بسته های نرم افزاری برنامه ریزی غیر خطی مطمئن به سادگی در دسترس نیستند. با این همه، راهبرد SLP مسائل متعددی دارد. اول این که، هزینه های محاسباتی مربوط به عملیات بهینه سازی را به میزان زیادی افزایش می دهد، زیرا فرآیند بهینه سازی بارها



تکرار می شود. (معمولاً پنج تا چهار بار). بنابراین، این راهبرد تنها وقتی منطقی به نظر می رسد که هزینه این محاسبات بهینه سازی در مقایسه با هزینه تحلیل و مشتقات حساسیت کمتر باشد. پس، کارایی بسته های نرم افزاری LP که در SLP به کار می رود از اهمیت بسزایی برخوردار است.

دومین مسأله این که، بدون یک انتخاب مناسب حدود حرکت، فرایند هرگز همگرا نمی شود. به طور کلی، حدود حرکت باید با نزدیک شدن طراحی به بهین کم کم کوچک شود. بخشی از دلیل کوچک ساختن حدود حرکت این است که دقت تقریب مورد نیاز، هنگام نزدیک شدن به بهین افزایش می یابد. هنگامی که از طراحی بهین دور هستیم، در هر چرخه به موفقیت های بزرگتری نایل می شویم، و می توانیم خطاهای قابل ملاحظه ای را تحمل کرده و در همان حال به سمت بهین پیش برویم. هنگامی که به بهین نزدیک می شویم، موفقیت کمتر می شود و ممکن است این بهبود با خطاهای تقریب از بین برود. از طرف دیگر، کاهش زود هنگام حدود حرکت در فرایند ممکن است باعث کاهش بی مورد سرعت همگرایی نیز بشود، به ویژه هنگامی که طراحی اولیه از بهین واقعی دور است. دلیل کاهش حدود حرکت هنگامی مشخص می شود که طراحی نهایی یک چرخه، در مقایسه با تحلیل دقیق، نسبت به طراحی اولیه آن چرخه (که طراحی نهایی چرخه قبلی است) ناکافی باشد، یا بهبودی در  $f$  به وجود نیارد. معمولاً حدود حرکت حدود ده تا پنجاه درصد مقدار قبلی شان کوچک می شوند تا این که برای یک حدود حرکت مشخص تابع هدف از یک رواداری داده شده کمتر بهبود یابد. انتخاب معمول مقدار حدود حرکت در شروع حدود ده تا سی درصد مقدار متغیرهای طراحی است. با این وجود، این گونه انتخاب تنها وقتی منطقی است که یک متغیر طراحی به سبب حرکت به سمت عوض شدن علامتش بسیار کوچک نباشد. در چنین حالتی، انتخاب حدود حرکت بین ده تا سی درصد مقدار نمونه ای (و نه مقدار فعلی) از آن متغیر طراحی منطقی به نظر می رسد.

مشکل سوم SLP که گاهی به وجود می آید این است که طراحی شروع غیر قابل قبول باشد. اثرات مشترک تقریب و حدود حرکت می توانند شرایطی به وجود آورند که مسأله 'بهینه سازی خطی شده یک جواب قابل قبول نداشته باشد. یعنی، اگر نقطه اولیه یک مسأله نسبت به قیدهای نرمال سازی شده غیر قابل قبول باشد و حدود حرکت کوچک باشد، ناحیه ای که با حدود حرکت تشکیل می شود ممکن است به طور کلی خارج از فضای طراحی خطی شده باشد و به یک مسأله غیر قابل قبول بینجامد. در این حالت توصیه می شود که قیدها در چند چرخه اول رها شوند. این کار، به عنوان مثال، می تواند با جایگزینی

بخش ۶.۳: برنامه ریزی خطی دنباله ای ۳۰۷

مسئله بهینه سازی معادله (۶.۳.۲) با مسئله زیر

$$f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_0} + k\beta, \quad \text{تابع} \quad (۶.۳.۳)$$

$$g_j(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)_{x_0} + \beta \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \quad \text{رابطه به}$$

$$a_{li} \leq x_i - x_{0i} \leq a_{ui}, \quad \text{و}$$

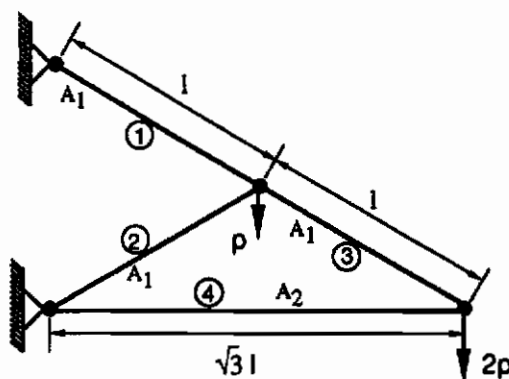
$$\beta \geq 0, \quad \text{مینیمم کنید}$$

انجام شود که  $\beta$  یک متغیر طراحی دیگر است که یک حاشیه مجاز از نقض قید را مشخص می کند و  $k$  عددی است که سهم  $\beta$  را در تابع هدف به اندازه کافی بزرگ می سازد تا چرخه بهینه سازی روی کاهش  $\beta$  بیشتر از کاهش  $f$  متمرکز شود.

در نهایت اگر جواب مسئله اصلی روی یک رأس مجموعه قید نباشد ممکن است چرخه ها بین دو نقطه رفت و برگشت داشته باشند. به عنوان مثال، اگر بهینه واقعی در مرز یک قید غیر خطی باشد، جواب مسئله خطی سازی شده ممکن است طراحی را به نقطه اولیه مسئله خطی پیشین ببرد. یک راهبرد کاهش حدود حرکت مناسب می تواند این مشکل را به راحتی حل کند.

مثال زیر بعضی از مسائل مربوط به انتخاب حدود حرکت را بازگو می کند.

مثال ۶.۳.۲



شکل ۶.۳.۲ خرابای چهار میله ای از نظر ایستایی معین

مسئله طراحی مینیمم سازی وزن یک خرابای چهار میله ای از نظر ایستایی معین نشان داده شده در

۳۰۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۶: سیمای بهینه سازی در عمل)

شکل (۶.۳.۲) را در نظر می گیریم. به سبب ساده سازی فرض می کنیم که عضو ۱ تا ۳ مساحت های سطح مقطع عضو یکسان  $A_1$  دارند و مساحت سطح مقطع عضو ۴ برابر  $A_2$  باشد. برای بارگذاری تعریف شده، نیروهای اعضاء و تغییر مکانهای عمودی در لولای ۲ را می توان به راحتی بدست آورد که عبارت است از:

$$f_1 = 5p, \quad f_2 = -p, \quad f_3 = 4p, \quad f_4 = -2\sqrt{3}p,$$

$$\delta_2 = \frac{6pl}{E} \left( \frac{3}{A_1} + \frac{\sqrt{3}}{A_2} \right),$$

در حالی که علامت منفی نشان دهنده فشاری بودن نیروی عضو است. فرض می کنیم تنش مجاز در کشش و فشار به ترتیب برابر است با  $7.73 \times 10^{-4} E$  و  $4.833 \times 10^{-4} E$ ، و حد تغییر مکان عمودی این است که از  $3 \times 10^{-3} l$  تجاوز نکند. مسأله طراحی برای مینیمم شدن وزن به شرط قیدهای تنش و تغییر مکان را می توان بر حسب متغیرهای بی بعد

$$x_1 = 10^3 \left( \frac{p}{A_1 E} \right), \quad x_2 = 10^3 \left( \frac{p}{A_2 E} \right),$$

به شکل زیر رابطه سازی کرد.

$$f(x_1, x_2) = \frac{3}{x_1} + \frac{\sqrt{3}}{x_2}, \quad \text{تابع}$$

$$18x_1 + 6\sqrt{3}x_2 \leq 3, \quad \text{را مشروط به}$$

$$0.05 \leq x_1 \leq 0.1546,$$

$$\text{مینیمم کنید} \quad 0.05 \leq x_2 \leq 0.1395,$$

در حالی که حد پایین  $x_1$  و  $x_2$  برابر ۰.۰۵ در نظر گرفته شده است.

چرخه اول را با حدس اولیه  $x_0^T = (0.1, 0.1)$  شروع می کنیم که در قیدها صدق می کند و مقدار تابع هدف در آن برابر است با  $f = 47.32$ . مسأله LP با در نظر گرفتن ده درصد برای حدود حرکت یعنی  $a_{ui} = a_{li} = 0.01$ ،  $i = 1, 2$  شروع می شود. تنها تابع هدف غیر خطی است و مشتقات آن در  $x_0$  عبارت است از:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -300, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -173.2,$$

بنابراین، اولین LP عبارت است از:

بخش ۶.۳: برنامه ریزی خطی دنباله ای ۳۰۹

$$\begin{aligned} f_L &= 47.32 - 300(x_1 - 0.1) - 173.2(x_2 - 0.1), & \text{تابع} \\ 18x_1 + 6\sqrt{3}x_2 &\leq 3, & \text{را مشروط به} \\ 0.09 \leq x_1 &\leq 0.11, \\ 0.09 \leq x_2 &\leq 0.11. & \text{مینیمم کنید} \end{aligned}$$

حل این مسأله به جوابهای  $x_1 = 0.10316$  و  $x_2 = 0.11$  و  $f_L = 44.6410$  می انجامد. البته  $f(0.10316, 0.11) = 44.8274$ ، بنابراین تقریب خطی بهبود در  $f$  را تقویت کرده است. اکنون  $f$  را حول  $(0.10316, 0.11)^T$  خطی می کنیم، و حدود حرکت را به همان اندازه در نظر می گیریم، برای چرخه دوم، مسأله LP زیر را بدست می آوریم:

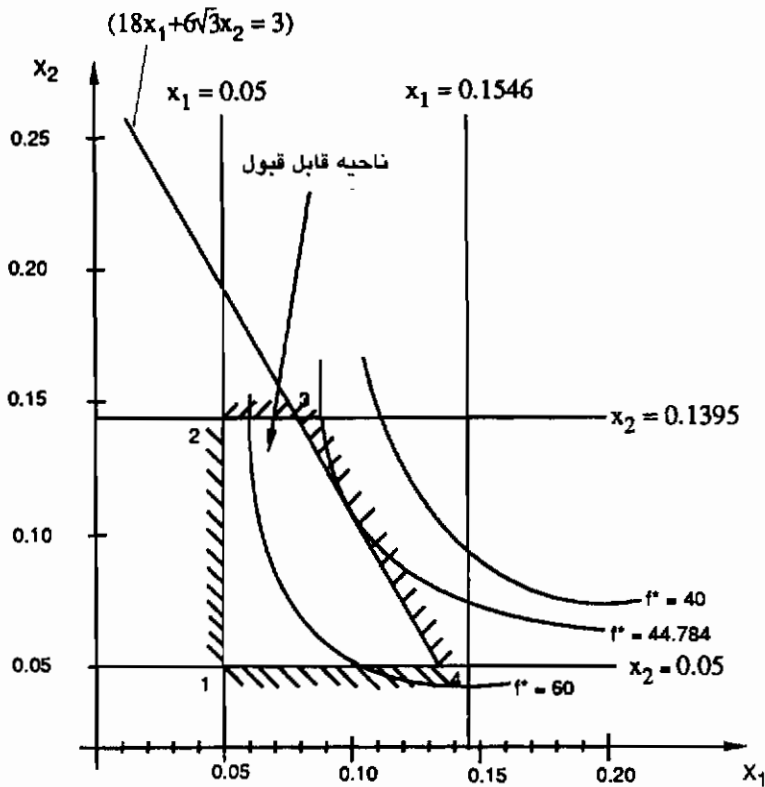
$$\begin{aligned} f_L &= 44.8274 - 281.9(x_1 - 0.10316) - 143.1(x_2 - 0.11), & \text{تابع} \\ 18x_1 + 6\sqrt{3}x_2 &\leq 3, & \text{را مشروط به} \\ 0.09316 \leq x_1 &\leq 0.11316, \\ 0.1 \leq x_2 &\leq 0.12. & \text{مینیمم کنید} \end{aligned}$$

جواب این مسأله عبارت است از  $x_1 = 0.10893$ ،  $x_2 = 0.1$ ،  $f_L = 44.63126$ ،  $f = 44.86069$ . یعنی این حرکت به یک نتیجه خوبی (از نقطه نظر  $f_L$ ) انجامید، اما در واقع به ضرر بود (از نظر  $f$ ). این مطلب دلالت بر این دارد که باید حدود حرکت را کاهش دهیم.

حدود حرکت را به 0.005 کاهش می دهیم و با شروع از بهترین طراحی که تاکنون بدست آوردیم،  $x_0^T = (0.10316, 0.11)$ ، دو چرخه دیگر انجام می دهیم. اولین چرخه به نتیجه های زیر می انجامد:  $x_1 = 0.10604$ ،  $x_2 = 0.105$ ،  $f_L = 44.72937$ ،  $f = 44.78560$ . با چرخه بعدی به نتیجه قبلی زیر می رسیم:  $x_1 = 0.10316$ ،  $x_2 = 0.11$ ، و این نوسان بار دیگر نشان می دهد که برای بهبود بیشتر به کاهش حدود حرکت نیاز است. با این همه، با آخرین حدود حرکت،  $f$  را از 44.8274 به 44.78560 کاهش می دهیم که از 0.1 درصد کمتر است. بنابراین منطقی است که چرخه را متوقف کنیم. در واقع، برای هر مسأله LP قید غیرخطی تغییر مکان فعال بود، بنابراین می توانیم جواب دقیق را با برقراری رابطه

$$18x_1 + 6\sqrt{3}x_2 = 3, \quad x_2 = \frac{3 - 18x_1}{6\sqrt{3}},$$

و جایگزینی در  $f$  بدست آوریم



شکل ۶.۳.۳ فضای طراحی مسأله خرابی چهار میله ای

$$f = \frac{3}{x_1} + \frac{6}{3 - 18x_1}$$

به راحتی می توان نتیجه گرفت که مینیمم  $f$  عبارت است از  $x_1 = x_2 = 0.105662$ ،  $f = 44.7846$ .

فضای طراحی این مسأله در شکل ۶.۳.۳ نشان داده شده است. ....

ممکن است طراحی بهین بدست آمده برای یک مسأله خطی سازی شده در هر چرخه ای از فرایند SLP قیدهای مسأله اصلی را نقض کند. در مثال ۶.۳.۱ دیدیم که اگر حدود حرکت در آن مثال اعمال نمی شد یا این که حدود حرکت به قدر کافی بزرگ بود، جواب مسأله خطی یک نقض قید قابل توجهی نسبت به مجموعه قید اصلی به وجود می آورد. چنین نقض قیدهایی معمولاً با بهبود تابع هدف به وجود می آید. همچنین ممکن است از یک جواب مسأله خطی به جواب مسأله خطی دیگر، تابع هدف بهبودی

بخش ۶.۳: برنامه ریزی خطی دنباله ای ۳۱۱

نداشته باشد و نقض قیدها کاهش یابد. این مشکلات را می توان با تغییر حدود حرکت حل کرد. با این وجود، هیچ کدام از دو مشکل را نمی توان در همگرایی کلی SLP مانع اصلی تلقی کرد. در بحث بعدی به این مطلب می پردازیم که چگونه می توان در مورد یک طراحی جدید بدست آمده از LP قضاوت کرد که آیا هنگامی که تابع هدف بهتر با نقض قید همراه است یک بهبود است و یا هنگامی که مجموعه قید بهتر برآورده شده اند ولی تابع هدف افزایش یافته می تواند بهبود به حساب آید.

فرض کنید بهمین LP در  $i$  امین چرخه،  $\mathbf{x}_{iL}^*$ ، به یک مجموعه قیود فعال یا نقض شده،  $j \in J$ ،  $g_j(\mathbf{x}_{iL}^*)$  انجامیده که  $J$  مجموعه قیده‌های فعال است. جواب مسأله خطی سازی شده را می توانیم به عنوان جواب دقیق مسأله خطی بهبود یافته زیر در نظر بگیریم.

$$(6.3.4) \quad \begin{array}{ll} \text{تابع} & f(\mathbf{x}), \\ \text{را مشروط به} & g_j(\mathbf{x}) \geq p g_j(\mathbf{x}_{iL}^*), \end{array} \quad \text{با } p = 1 \text{ مینیمم کنید}$$

مسأله اصلی که می خواهیم حل کنیم برای  $p = 0$  است. با استفاده از معادله (۵.۴.۷) می توانیم حدس بزنیم که مقدار بهین تابع هدف برای مسأله بهبود نیافته عبارت از:

$$(6.3.5) \quad \mathcal{L} = f(\mathbf{x}_{iL}^*) - \sum_{j=1}^r \lambda_j g_j(\mathbf{x}_{iL}^*),$$

که  $\mathcal{L}$  تابع لاگرانژین است. این موضوع رهیافت زیر را بازگو می نماید: اگر تابع هدف و بحرانی ترین قیدها بهبود یابند، همواره طراحی جدید پذیرفته می شود. اگر تابع هدف بهبود یافته و برآورده شدن قیدها بدتر شده یا برعکس، مقدار لاگرانژین ها را مقایسه کنید. اگر لاگرانژین در پایان یک چرخه از مقدار لاگرانژین در ابتدای چرخه کوچکتر شده باشد، آن گاه طراحی جدید پذیرفته می شود. اگر، از طرف دیگر، لاگرانژین افزایش یافته باشد، در حدود حرکت باید تجدیدنظر کرد و آن را بهبود بخشید. توصیه می کنیم که در لاگرانژین تنها قیود بحرانی و نقض شده را استفاده کنید.

### مثال ۶.۳.۳

مثال ۶.۳.۲ را با متغیرهای  $y_i = 1/x_i$  (متناسب با مساحت‌های سطح مقطع) در نظر بگیرید، مسأله به شکل زیر در می آید

$$\text{تابع} \quad f(y) = 3y_1 + \sqrt{3}y_2,$$

۳۱۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۶: سیمای بهینه سازی در عمل)

$$g = 3 - \frac{18}{y_1} - \frac{6\sqrt{3}}{y_2} \geq 0, \quad \text{را مشروط به}$$

$$8.0 \leq y_1 \leq 20,$$

$$8.0 \leq y_2 \leq 20, \quad \text{مینیمم کنید،}$$

که در آن برای راحتی کران پائین به 8.0 افزایش داده شده است. در حدس اولیه  $y_1 = 12$ ،  $y_2 = 8$  و مقدار تابع  $f = 49.856$  می باشد.

خطی سازی مسأله با 30% حدود حرکت به مسأله زیر می انجامد

$$3y_1 + \sqrt{3}y_2, \quad \text{عبارت}$$

$$0.125y_1 + 0.1624y_2 \geq 2.598, \quad \text{را مشروط به}$$

$$8.4 \leq y_1 \leq 15.6,$$

$$8.0 \leq y_2 \leq 10.4. \quad \text{مینیمم کنید،}$$

که جواب LP آن عبارت از  $y_1 = 8.4$ ،  $y_2 = 9.534$  و  $f = 41.713$ . با تحلیل مجدد می بینیم که

$g = -0.2329$ . همچنین از حل برنامه LP  $\lambda_1 = 10.667$ ،  $\lambda_2 = 1.667$  (مربوط به  $g$ ) و  $\lambda_2$  (مربوط

به حدود حرکت) بدست می آید. لاگرانژین عبارت است از:

$$\mathcal{L} = 41.713 - 10.667(-0.2329) = 44.197,$$

که در مقایسه با مقدار اولیه تابع هدف،  $f = 49.856$ ، یک بهبود نسبتاً کوچک را نسبت به جواب LP، 41.713، نشان می دهد ولی با این وجود قابل قبول است.

با خطی سازی تابع قید حول آخرین نقطه طراحی در رابطه سازی مسأله LP با حدود حرکت 30%

مسأله به شکل زیر درمی آید

$$3y_1 + \sqrt{3}y_2, \quad \text{عبارت}$$

$$0.2551y_1 + 0.1143y_2 \geq 3.4658, \quad \text{را مشروط به}$$

$$8.0 \leq y_1 \leq 10.92,$$

$$8.0 \leq y_2 \leq 12.3938, \quad \text{مینیمم کنید،}$$

که جواب آن عبارت از  $y_1 = 10.000$ ،  $y_2 = 8.0$  و  $f = 43.858$ ، که ضریب تابع قید عبارتست از

$\lambda_1 = 11.76$  و ضریب دیگر با یک کران پایین  $\lambda_2 = 0.38$ . هر چند که تابع هدف تقریباً 5% افزایش یافته،

ارزیابی قیدهای واقعی در مقایسه با طراحی اولیه این مسأله LP نشان دهنده یک نقض قید کمتر

است،  $g = -0.09896$ . بنابراین، به منظور قبول یا رد این طراحی باید لاگرانژین را محاسبه کنیم. در

پایان این گام، لاگرانژین عبارت است:

بخش ۶.۴: بهینه سازی تقریبی غیرخطی دنباله ای ۴۱۳

$$\mathcal{L} = 43.858 - 11.76(-0.09896) = 45.022 ,$$

که از مقدار لاگرانژین محاسبه شده در پایان مسأله LP قبلی بزرگتر است. بنابراین، طراحی وارد می کنیم و مسأله LP را بار دیگر با حدود حرکت کوچکتری می سازیم. ...

#### ۶.۴ بهینه سازی تقریبی غیرخطی دنباله ای

می توانیم با استفاده از تقریبهای غیرخطی برای قیدها و تابع هدف، SLP را تعمیم دهیم. برای کاربرد SLP باید حتی توابع غیرخطی ساده را نیز خطی کنیم. در یک راهکار کلی ما تنها توابعی را به طور خطی یا غیرخطی (مانند درجه دوم) تقریب می زنیم که محاسبه آنها پرهزینه باشد. قیدهای کم هزینه اصلاً نیازی به تقریب زدن ندارند. کار را با شناسایی این قیود (و احتمالاً تابع هدف) که برای ارزیابی به حجم محاسبه بالایی نیاز دارند، شروع می کنیم. این قیدها را برای تقریب زدن جدا می کنیم و قیدهای کم هزینه را به طور دقیق ارزیابی می کنیم. با فرض یک جواب آزمایشی  $x_0$  برای مسأله طراحی سازه، قیدهای پرهزینه را حول  $x_0$  تقریب می زنیم. مانند روش SLP، باید مسأله تقریبی را با حدود حرکت بیامیزیم. تا از تغییرات زیاد متغیرهای طراحی که سبب یک تقریب ضعیف می شود، جلوگیری کنیم.

جواب مسأله تقریبی با حدود حرکت، که از یک روش بهینه سازی بدست آمده باشد را با  $x_1$  نشان می دهیم. یک تحلیل سازه ای دقیق جدید در  $x_1$  انجام می دهیم و از آن برای ساختن تقریبهای جدید برای قیدهای پرهزینه استفاده و سپس جواب بهین مسأله تقریبی را بدست می آوریم. یعنی، مسأله بهینه سازی اصلی معادله (۶.۳.۱) با  $x_0$  مسأله زیر جایگزین می کنیم

$$\begin{aligned} & f_a(x, x_0^{(i)}), & \text{تابع} & & (6.4.1) \\ & g_{aj}(x, x_0^{(i)}) \geq 0 \quad j = 1, \dots, n_g, & \text{را مشروط به} & & \\ & \|x - x_0^{(i)}\| \leq a_i, & \text{و} & & \\ & i = 0, 1, 2, \dots, & \text{برای} & & \\ & \text{مینیمم کنید,} & & & \end{aligned}$$

که در آن  $f_a$  و  $g_{aj}$  به ترتیب تابع هدف تقریبی و قید،  $x_0^{(i)}$  جواب  $i$  امین مینیمم سازی، و  $a_i$  یک حدود حرکت انتخاب شده مناسب است.

از آن جا که بیشتر هزینه بهینه سازی مربوط به تحلیل دقیق و محاسبات حساسیت است، غالباً این که

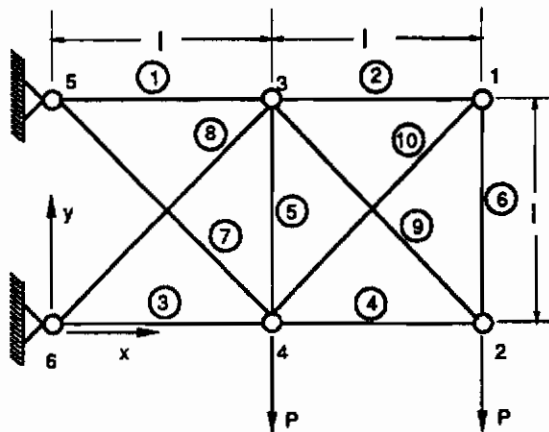


### ۳۱۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۶: سیمای بهینه سازی در عمل)

چه روش بهینه سازی برای جواب بهین مسأله تقریبی استفاده شود مهم نیست. در حالت کلی، تأکید روی قابل اطمینان بودن و توانمند بودن یک روش بهینه سازی بیشتر است تا روی بازده محاسباتی آن. مثال زیر کاربرد بهینه سازی غیرخطی دنباله ای با تقریبهای استاندارد بحث شده در بخش ۶.۱ و سایر تقریبهایی که خاص مسأله مورد بحث اند را تشریح می کند.

#### مثال ۶.۴.۱

خرپای ده میله ای نشان شده در شکل (۶.۴.۱) مثال استاندارد است که بسیاری از نویسندگان از آن استفاده کرده اند. بدست آوردن مینیمم وزن خرپا با تغییر مساحتهای سطح مقطع اعضا مشروط به قیود تنش و قیدهای مینیمم سطح مقطع  $0.1 \text{ in}^2$  مورد نظر است. تنش مجاز ماکزیمم در هر عضو در کشش و فشار یکسان است. این مقدار مجاز برای همه اعضا  $25 \text{ ksi}$  است به جز عضو ۹. برای عضو ۹ تنش مجاز  $75 \text{ ksi}$  است. چگالی مصالح خرپا عبارت است از  $0.1 \text{ lb/in}^3$ .



$$l = 360 \text{ ", } P = 100 \text{ Kips}$$

شکل ۶.۴.۱ خرپای ده میله ای

در این جا از پنج روش تقریب محلی که در بخش ۶.۱ تشریح شد و روش تقریب نیروی خطی پیشنهاد شده توسط واندربلاتز<sup>۱</sup> و همکارانش (به عنوان مثال مرجع [15]) استفاده می شود. جدول

1) Vanderplaats

بخش ۶.۴: بهینه سازی تقریبی غیرخطی دنباله ای ۳۱۵

جدول ۶.۴.۱ طراحی خرابی ده میله ای

عضو	مساحت سطح مقطع اولیه (in <sup>2</sup> )	مساحت سطح مقطع بهین (in <sup>2</sup> )	تنش (ksi)
1	5.0	7.90	25.0
2	5.0	0.10	25.0
3	5.0	8.10	-25.0
4	5.0	3.90	-25.0
5	5.0	0.10	-0.07
6	5.0	0.10	25.0
7	5.0	5.80	25.0
8	5.0	5.51	-25.0
9	5.0	3.68	37.5
10	5.0	0.14	-25.0

جدول ۶.۴.۲ همگرایی وزن بهین (پروند) با استفاده از تقریبهای مختلف

شماره چرخه	خطی	وارون	محافظة کارانه	درجه دو	درجه دو وارون	نیروی خطی
1	1845	1774	2361	2002	1931	1891
2	1637	1673	1960	1741	1684	1688
3	1601	1593	1722	1650	1595	1589
4	1558	1566	1641	1586	1548	1549
5	1531	1548	1587	1547	1522	1526
6	1514	1537	1566	1525	1509	1511
7	1507	1528	1555	1514	1506	1504
8	1502	1522	1546	1507	1502	1501
9	1500	1518	1540	1503	1500	1500
10	1500	1511	1538	1501	1500	1499
11	1500	1511	1535	1500	1499	1499
12	1499	1508	1532	1499	1499	1499

۶.۴.۱ طراحی اولیه و بهینه و تنشها را در اعضای خرابی بهین نشان می دهد.

جدول ۶.۴.۲ 'تاریخچه' همگرایی دوازده چرخه بهینه سازی تقریبی با استفاده از شش تقریب را در مقایسه با هم نشان می دهد. برای مقایسه عملکرد تقریبهای مختلف در جدول ۶.۴.۲، یک معیار عملکرد سودمند تعداد چرخه ها برای رسیدن به یک درصد وزن مینیمم (رسیدن به 1514 lb) است. تقریبهای خطی، درجه دوم وارون، و نیروی خطی شش چرخه نیاز دارند، تقریب درجه دوم هفت تا، تقریب وارون ده تا، و تقریب محافظه کارانه هرگز به آن نمی رسد. تفاوت بین تقریبهای وارون یک ویژگی خاص این مسأله است. برای بسیاری از مسائل خرابی تقریب وارون از نوع خطی آن بهتر کار می کند. اگر به گروههای مختلف روشها نگاه کنیم، تقریبهای مرتبه دو کمی از تقریبهای مرتبه اول بهترند، اما تفاوت

آن اندازه چشمگیر نیست تا هزینه محاسبات مشتقات دوم را دخالت دهیم (برای بحث هزینه محاسبات مشتقات دوم به بخش ۷.۲.۲ مراجعه کنید).

عملکرد بد تقریب محافظه کارانه را می توان به این شکل توجیه کرد که معمولاً از تقریبهای خطی یا وارون دقت کمتری دارد. در مواقعی که به محافظه کاری نیازمندیم (مانند هنگامی که این تقریب به وسیله الگوریتمهای تابع جریمه داخلی به کار می رود)، یا در تحذب (مانند الگوریتمهای دوگان، به فصل ۹ مراجعه کنید) این تقریب سودمند است. با این همه، در بهینه سازی تقریبی دنباله ای استفاده کمی دارد. در نهایت، تقریب نیروی خطی و اندرپلاتز با تقریبهای مرتبه دوم قابل مقایسه است، هر چند تنها از مشتقات اول استفاده می کند. این حقیقت به این مسأله بر می گردد که کمیتهای «بسیار خطی تر» از تنش را تقریب می زند. در استفاده از این تقریب، یک کمیت واسطه (نیروی اعضا) را تقریب می زنیم و تنشها را به کمک نیروها به طور دقیق محاسبه می کنیم. دید فیزیکی مشابهی در شناسایی پارامترهایی که تقریباً خطی هستند می تواند در مسائل دیگر مفید واقع شود.

### ۶.۵ مسائل ویژه در ارتباط با بهینه سازی شکل

عبارت بهینه سازی شکل در این جا به مفهوم فراگیر آن به کار می رود. در یک مدل اجزای محدود، بهینه سازی شکل به مسائلی اطلاق می شود که در آنها می خواهیم محل گره های مدل اجزای محدود یا اتصال اجزا را (به عنوان مثال حذف اجزا را) تغییر دهیم. بهینه سازی شکل از این نظر بر عکس مسائل بهینه سازی اندازه است که در بهینه سازی اندازه ما تنها خواص سختی جزء را تغییر می دهیم، مانند مساحتها، سطح مقطع میله ها یا ضخامت صفحه ها. بهینه سازی شکل غالباً به حالت خاصی از طراحی بهین مرزهای اجزای سازه های دو بعدی و سه بعدی اطلاق می شود. در مفهوم جامعتر، به بهینه سازی هندسه سازه های اسکلتی، و بهینه سازی ساختاری که چگونگی اتصال سازه را مشخص می کند (به عنوان مثال، کدام گره ها با اجزا به هم متصل می شوند) نیز اطلاق می شود.

مسائل بهینه سازی شکل غالباً از مسائل بهینه سازی اندازه مشکلترند. ابتدا بهینه سازی مرز شکل یک جسم دو یا سه بعدی را در نظر بگیرید. محاسبه مشتقات حساسیت برای این مسائل بهینه سازی شکل با مسأله دقت که در فصلهای ۷ و ۸ بحث شد مرتبط است. مسأله جدی دیگر تغییر شکل تقسیم بندی هاست. با تغییر شکل سازه، باید تقسیم بندی اجزای محدود را تغییر دهیم. قواعد تقسیم بندی مجدد سازه که با

## بخش ۶.۵: مسائل ویژه در ارتباط با بهینه سازی شکل ۳۱۷

تغییر مرز موقعیت گره ها را تعیین می کنند معمولاً به اجزای محدود به شدت تغییر شکل یافته می انجامند و همزمان دقت کم می شود. این مسأله را می توان با تقسیم بندی مجدد دستی در فرایند بهینه سازی (که بسیار وقت گیر است)، یا به کارگیری تولیدکنندگان تقسیم بندی خبره، حل کرد. در واقع کار روی بهینه سازی شکل انگیزه 'تدوین و استفاده از آن تولیدکنندگان تقسیم بندی خبره بوده است (به عنوان مثال، [30,31]).

مسأله 'دیگر در بهینه سازی شکل مرز به وجود آمدن مرزهای داخلی یا سوراخهاست. در بسیاری از مسائل شکل بهینه دارای سوراخهای داخلی است. بدون اطلاع پیشین از وجود این سوراخها به وجود آوردن آنها با رهیافت بهینه سازی استاندارد امکان پذیر نیست. یعنی یک رهیافت بهینه سازی می تواند به راحتی شکل بهین یک سوراخ را در صورتی که وجود آن را فرض کرده باشیم بدهد، اما نمی تواند به ما بگوید که یک، دو یا سه سوراخ باید وجود داشته باشد. یک راه برای چنین مسأله ای این است که فرض کنیم مصالح همگن نیست، ولی در عوض یک ریز ساختار دارد. این ریز ساختار می تواند از الیاف مواد مرکب ماتریسی باشد. با این همه، ریز ساختار فرض شده معمولاً از الیاف و ماتریس صفحات لایه ای کلی تر است و در برگیرنده 'سوراخهای ریز در مصالح نیز می باشد. این نوع ریز ساختار به این منظور در نظر گرفته شده که بتوان محدودیتهای مقاومتی و سختی یک سازه را با آن تعریف کرد (به عنوان مثال به مراجع کوهن و استرنج<sup>۱</sup> [32] و روضوانی<sup>۲</sup> و دیگران [33] مراجعه کنید). بندسو و کیکاچی<sup>۳</sup> [34] نشان دادند که این زیرساختار می تواند برای تعیین نیاز به وجود سوراخ در سازه به کار رود. شکل ۶.۵.۱ شکل سازه ای که توسط بندسو و کیکاچی و با فرض امکان به وجود آمدن سوراخهای ریز بدست آمده را نشان می دهد. سازه 'مورد مطالعه یک میله کششی است که مساحت سطح مقطع دو انتهای آن داده شده (مطوح توپر در شکل)، و سطح مقطع طرف چپ آن بزرگتر از سطح مقطع طرف راست است. هدف ماکزیمم سازی سختی میله برای یک حجم مشخص است. نتیجه های نشان داده شده در شکل، در حالی که به تنهایی عملی نیست، به ما این امکان را می دهد که محدوده 'سوراخها را شناسایی کنیم آن گاه می توان برای پیدا کردن شکل بهینه این سوراخها از فنون بهینه سازی استاندارد استفاده کرد.

مثال دیگری از کاربرد این فن توسط راسموسن<sup>۴</sup> [35] در طراحی تیر کف هواپیماهای مسافری گزارش شده است. شکل ۶.۵.۲ ساختاری را که توسط طراح فرض شده بود و ساختاری که با رهیافت

1) Kohn and Strang

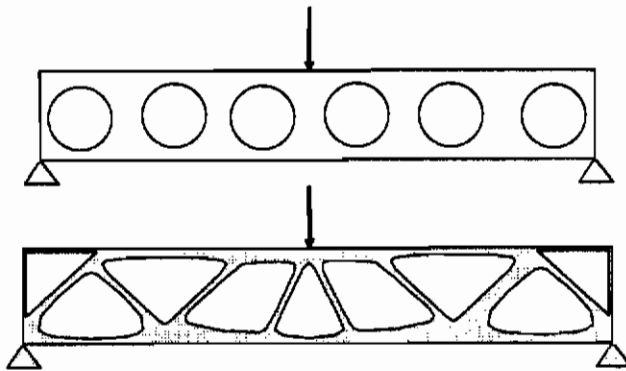
2) Rozvany

3) Bendsoe and Kikuchi

4) Rasmussen



شکل ۶.۵.۱. شکلهای بهینه مساله 'میله' کشش با استفاده از ریز ساختار



شکل ۶.۵.۲. طراحی شکل تیرکف یک هواپیمای مسافربری: شکل اولیه و نهایی

همگن سازی شناسایی شده نشان می دهد که به طراحی بسیار سبکتری انجامیده است.

مساله' یافتن سوراخها در اجسام دو و سه بعدی در حوزه' بهینه سازی ساختار است. بهینه سازی ساختار مساله' دشواری است و در سازه های اسکلتی مانند خرپاها و قابها کاربرد بیشتری داشته است. در این نوع سازه ها، ساختار بهین معمولاً عبارت از تصمیم در مورد این که کدام گره ها توسط عضوی به هم متصل شوند است. رهیافت اصلی که بیشتر پژوهشگران آن را دنبال می کنند این است که یک سازه' پایه که در آن هر گره به تمامی گره های دیگر متصل می شود به وجود می آورند. اگر مساله' طراحی مینیمم شدن وزن با قیدهایی روی بار فرو ریختگی پلاستیک باشد، آن گاه همچنان که در فصل ۳ نشان داده شد مساله' بهینه سازی خطی است و می توان برای یافتن طراحی بهین از روش سیمپلکس استفاده کرد. الگوریتم نیز به طور خودکار تمامی اعضای غیر ضروری را حذف می کند. این رهیافت اولین بار توسط

درون<sup>۱</sup> و همکارانش [36] به کار گرفته شد.

هنگامی که سازه به جای فروریختگی پلاستیک بر اساس قیدهای تنش و تغییر مکان طراحی می شود، ممکن است شروع با یک سازه پایه و استفاده از یک الگوریتم بهینه سازی استاندارد برای حذف اعضای غیر ضروری امکان پذیر نباشد. یک مسأله این است که اعضای که باید حذف شوند ممکن است با کم شدن مساحت سطح مقطع شان کرنشهای زیادی داشته باشند و الگوریتم بهینه سازی بخواهد آنها را بجای حذف کردن تقویت کند. از آن جا که این مسأله به شرایط سازگاری مربوط می شود، آزاد سازی این شرایط در بخشی از فرایند بهینه سازی به منظور حذف اعضا، امکان پذیر است (به عنوان مثال به مراجع شیو و اشمیت<sup>۲</sup> [37]، یارینشمیت و راسل<sup>۳</sup> [38] رجوع کنید). مسأله دیگر این است که ماتریس سختی ممکن است به سبب حذف اعضا منفرد شود. برای غلبه بر این مشکل می توان از فنون تحلیل و طراحی همزمان که به وارون سازی یا عامل گیری ماتریس سختی نیاز ندارند استفاده کرد (به بخش ۶.۱۰ مراجعه کنید). برای اطلاعات بیشتر در مورد بهینه سازی ساختار، خوانندگان می توانند به دو مقاله مروری تاپینگ<sup>۴</sup> [39] و کیرش<sup>۵</sup> [40] مراجعه نمایند.

بهینه سازی هندسی سازه های اسکلتی عبارت است از جستجو به منظور یافتن موقعیت بهین گره های سازه هاست. مسأله را می توان از فنون استاندارد حل کرد، ولی جداسازی متغیرهای هندسی و اندازه ای، به کمک یک رهیافت بهینه سازی دو سطحی، اغلب از نظر عددی برتری دارد. این موضوع در فصل ۱۰ و در بخش ۱۰.۵ مورد بحث قرار می گیرد.

## ۶.۶ بسته های نرم افزاری بهینه سازی

در چند سال اول تدوین بهینه سازی سازه ها، بیشتر تحلیلگران، برای استفاده خود، برنامه های اجزای محدود با کاربری خاص تدوین می کردند که روشهای بهینه سازی در داخل آنها وجود داشت. هنگامی که این برنامه ها توسط دیگر تحلیلگران استفاده می شد، می دیدند که اسناد و توضیحات آنها ناکافی است و بهبود آنها دشوار است. در سالهای اخیر، کاربرد بسته های نرم افزاری بهینه سازی مقید جامع در کنار برنامه های تحلیل سازه جامع معمول شده است. افزون بر این، شهرت فزاینده بهینه سازی سازه ها به عنوان ابزاری برای کاربردهای صنعتی، سبب شد که تقاضا برای گنجاندن توانایی بهینه سازی در

بسته‌های نرم‌افزاری تحلیل جامع افزایش باید. هدف این بخش توضیح مختصر دربارهٔ چند بستهٔ نرم‌افزاری مشهورتر به خوانندگان است.

ابتدا بسته‌های نرم‌افزاری مرکب که تحلیل سازه‌ها را با روشهای بهینه‌سازی ترکیب کرده‌اند مورد بحث قرار می‌گیرند. یکی از برنامه‌های مشهور این گروه برنامهٔ تی‌اس‌او (TSO) (که در اصل واسپ (WASP) [41,42] نامیده می‌شود) است که در ابتدا برای طراحی سازهٔ بال و دم هواپیما مشروط به قیود آئروالاستیک<sup>۱</sup> تدوین شد. برنامه، سازهٔ بال و دم را به عنوان یک صفحهٔ با خواص یکسان در سه جهت متعامد مدل کرده و به جای یک مدل اجزای محدود از یک تحلیل صفحهٔ ساده‌سازی شده استفاده می‌کند. متغیرهای طراحی ضرایب چند جمله‌ای هستند که توزیع ضخامت و جهت لایه‌ها را روی سطح مشخص می‌کنند. روش بهینه‌سازی بر اساس رابطه‌سازی تابع جریمهٔ داخلی (به فصل ۵ مراجعه کنید) است. برنامه به طور وسیعی در مطالعات طراحی و چند مورد مسائل طراحی واقعی هواپیما استفاده شده است (به [43] مراجعه کنید).

بسیاری از بسته‌های نرم‌افزاری بهینه‌سازی سازه‌های تلفیقی، بر اساس برنامه‌های خاص اجزای محدود بنا شده‌اند. یکی از برنامه‌های شناخته شده تر برنامهٔ اکسس (ACCESS) است که توسط اشمیت و همکارانش [44,45] تدوین شده است. برنامه‌های دیگر از این نوع عبارتند از فستاپ (FASTOP) [46]، اوپ‌استت (OPSTAT) [47]، اوپت کومپ (OPTCOMP) [48]، اپتیمم (OPTIMUM) [49]، ای‌اس اوپ (ASOP) [50]، استارز (STARS) [51] و دی‌سپ (DESAP) [52].

به سبب عمومیت نداشتن برنامه‌های اجزای محدود خاص، نیاز به بسته‌های نرم‌افزاری بهینه‌سازی سازهٔ ترکیب یافته در یک برنامه اجزای محدود عمومی احساس می‌شد. دو نمونه از اولین مثالهایی از این نوع برنامه‌ها پارس (PARS) [53] و پراس (PROSSS) [54] است. این برنامه‌ها بر اساس بستهٔ نرم‌افزاری اجزای محدود اسپار (SPAR) و نوع تجاری آن ای‌ال (EAL) بنا شده‌اند. با این وجود، از آن جا که نرم‌افزارهای بهینه‌سازی توسط تدوین گران بسته‌های نرم‌افزاری اجزای محدود پشتیبانی نمی‌شد، استفاده از پارس (PARS) و پراس (PROSSS) محدود بوده است. برنامه ای‌ال (EAL) همراه دیگر نرم‌افزارهای بهینه‌سازی استفاده می‌شده است؛ والش<sup>۱</sup> [55] استفاده از ای‌ال (EAL) با برنامه کان‌مین (CONMIN) [56] را گزارش کرده است.

### بخش ۶.۶: بسته های نرم افزاری بهینه سازی ۳۲۱

اخیراً برنامه های اجزای محدود دیگری نیز برای تهیه بسته های نرم افزاری بهینه سازی سازه ها استفاده شده است. بسته 'نرم افزاری اویپت سیس (OPTSYS) [57] بر اساس برنامه های اجزای محدود آسکا (ASKA) و آباکوس (ABAQUS) تدوین شده است. سیستم آستراس (ASTROS) [58] از نسخه 'عمومی نسترن (NASTRAN) به وجود آمده و بسته 'نرم افزاری نیسا اویپت (NISAOPT) (شامل برنامه 'شیپ (SHAPE) [59] و استروپت (STROPT) [60] بر اساس نیسای دو (NISA II) قرار دارد.

افزایش تقاضا برای بهینه سازی سازه ها سبب شد که تدوین کنندگان نرم افزارهای اجزای محدود، توانایی بهینه سازی را در برنامه هایشان بگنجانند. برنامه نسترن (NASTRAN) [61] و آی دیاس (I-DEAS) [62] در حال حاضر توانایی تحلیل حساسیت و بهینه سازی دارند و انسیس (ANSYS) دارای یک بهینه ساز مقدماتی است. برنامه ژنسیس (GENESIS) [63] که اخیراً تدوین شده، یک گام جلوتر رفته که برنامه 'اجزای محدود کلی است با توانایی حساسیت، تقریب و بهینه سازی. در آینده 'نزدیکی می توانیم انتظار داشته باشیم که بسته های نرم افزاری تجاری تحلیل سازه توانایی انجام بهینه سازی داشته باشند.

تا آن زمان، و حتی بعد از آن، تقاضا برای یک نرم افزار بهینه سازی جامع که بتواند با یک برنامه تحلیل سازه ترکیب شود وجود خواهد داشت. بیشتر بسته های نرم افزاری اجزای محدود، محاسبات حساسیت را با تفاضل محدود (به بخش ۱.۷ مراجعه کنید) انجام می دهند، بنابراین تحلیلگر می تواند قیدها را براساس این مشتقها (به بخش ۱.۶ مراجعه کنید) تقریب زده و از بسته های نرم افزاری بهینه سازی در یک حالت بهینه سازی تقریبی دنباله ای استفاده کند. مشهورترین بسته 'نرم افزاری بهینه سازی جامع در دسترس، برنامه های حل برنامه ریزی خطی اند (LP). این نوع برنامه ها معمولاً در بیشتر مراکز رایانه ای به عنوان بخشی از ای ام اس ال (IMSL) (روشهای حل پیش بینی شده در نرم افزار) و یا برنامه های فرعی کتابخانه ای مشابه وجود دارد. گرچه گاهی استفاده از الگوریتمهای بهینه سازی عمومی برتری دارد، به نظر می رسد بسته های نرم افزاری LP برای بیشتر کاربردها عملکرد خوبی داشته باشند.

از طرف دیگر برنامه های بسیار کلی تری نیز وجود دارند مانند: ای دی اس (ADS) [64]، دات (DOT) [65] و داک (DOC) [66] که توسط مؤسسه 'مهندسی وی ام ای (VMA) ارائه شده اند و به کاربر این اختیار را می دهند که از بین الگوریتمهای بهینه سازی مختلف و راهبردهای متعدد، روش دلخواه را انتخاب کند. این برنامه ها از تکامل بسته 'نرم افزاری کان مین (CONMIN) [56] که در بهینه سازی سازه ها به طور



وسیع استفاده می شد، به وجود آمده اند. دات (DOT) (ابزار بهینه سازی طراحی) مجموعه ای از برنامه های فرعی بهینه سازی به زبان فرترن است، و داک (DOC) (کنترل بهینه سازی طراحی) یک برنامه کنترلی است که استفاده از بهینه سازی (فراخوان برنامه های فرعی دات (DOT)) را تسهیل می کند. بسته نرم افزاری بهینه سازی جامع دیگر که در بهینه سازی سازه ها بسیار استفاده می شود، اس یوام تی جدید (NEWSUMT) [67] است که توسط میورا و اشمیت<sup>۱</sup> تدوین شده و بر اساس یک روش تابع جریمه (به فصل ۵ مراجعه کنید) کار می کند. برنامه جامع دیگر نسخه روزآمد برنامه اس یوام تی جدید-ای (NEWSUMT-A) است که می تواند قیدها را تقریب بزند [68]. بسته های نرم افزاری دیگر از این نوع عبارتند از اوپت (OPT) که بر اساس الگوریتم گرادیان کاهش یافته (به فصل ۵ مراجعه کنید) تدوین شده، و ای دیزاین (IDESIGN) [69] که بر اساس برنامه ریزی درجه دو دنباله ای تدوین شده است. بسته های نرم افزاری متعددی نیز توسط متخصصان برنامه ریزی ریاضی ارائه شده است. اما این برنامه ها در کاربردهای بهینه سازی سازه ها نسبت به برنامه های پیشتر گفته شده که توسط مهندسان تدوین شده از شهرت کمتری برخوردارند.

## ۶.۷ مسائل آزمایشی

به منظور بررسی عملکرد الگوریتمها و نرم افزارهای بهینه سازی، حل چند مسأله آزمایشی استاندارد مفید است. سه مسأله آزمایشی که در این بخش ارائه می شود، به طور وسیعی برای همین منظور استفاده شده اند.

### ۱. ۶.۷. خرپای ده میله ای

خرپای ده میله ای نشان داده شده در شکل ۱. ۴. ۶ یک مثال کلاسیک در نشان دادن تفاوت یک طراحی تمام تنیده (FSD) و یک طراحی بهین است. خواص مصالح و حداقل مساحت های سطح مقطع در جدول ۱. ۶. ۷ داده شده اند. وقتی که خرپا تنها بر اساس قیود تنش طراحی شود، طراحی بهین و اف اس دی (FSD) یکسانند. با این وجود، وقتی تنش مجاز برای عضو از 37,500 psi تجاوز کند، طراحی بهین با اف اس دی (FSD) متفاوت می شود. سه طراحی در جدول ۲. ۶. ۷ ارائه شده است. خرپا بر اساس قیود تغییر مکان نیز بهینه شده (جدول ۳. ۶. ۷) و طراحی نهایی در جدول ۳. ۶. ۷ ارائه گردیده

1) Miura and Schmit

بخش ۶.۷: مسائل آزمایشی ۳۴۳

است. برای اطلاعات بیشتر به مرجع [70] مراجعه کنید.

#### جدول ۶.۷.۱ داده‌های خرابای ده میله‌ای

جنس مصالح:	آلومینیم	جرم ویژه:	$0.1 \text{ lbm/in}^3$
ضریب ارتجاعی:	$10^7 \text{ psi}$	تنش مجاز:	$\pm 25\,000 \text{ psi}$
حداقل مساحت:	$0.1 \text{ in}^2$		

جدول ۶.۷.۲ طراحی‌های نهایی برای خرابای ده میله‌ای و با در نظر گرفتن قید تنش به تنهایی

الزایش تنش مجاز عضو ۹			
طراحی بهین مساحتها ( $\text{in}^2$ )	FSD مساحتها ( $\text{in}^2$ )	FSD و بهین مساحتها ( $\text{in}^2$ )	عضو
7.90	4.11	7.94	1
0.10	3.89	0.10	2
8.10	11.89	8.06	3
3.90	0.11	3.94	4
0.10	0.10	0.10	5
0.10	3.89	0.10	6
5.80	11.16	5.74	7
5.51	0.15	5.57	8
3.68	0.10	5.57	9
0.14	5.51	0.10	10
1497.6	1725.2	1593.2	جرم (lbm)

#### جدول ۶.۷.۳ تغییر مکانهای مجاز برای خرابای ده میله‌ای

گزارشهای تغییر مکان				
کرن بالا	کرن پایین	جهت	کرنه	حالت
-2.0	-2.0	Y	1	A
-2.0	-1.0	Y	3	
+2.0	-2.0	Y	1-4	B

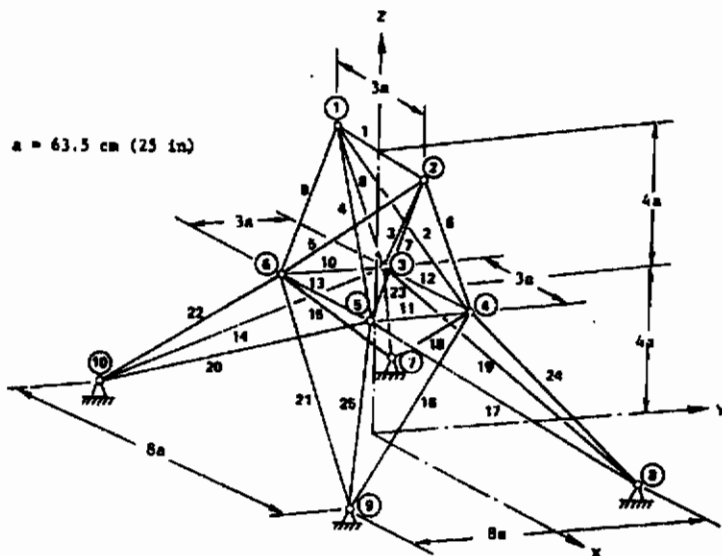
#### جدول ۶.۷.۴ طراحی‌های بهین برای خرابای ده میله‌ای با قیدهای تغییر مکان

مساحتهای سطح مقطع ها ( $\text{in}^2$ )					
حالت B	حالت A	عضو	حالت B	حالت A	عضو
0.55	0.10	6	30.52	22.66	1
7.46	12.69	7	0.10	1.40	2
21.04	14.54	8	23.20	21.58	3
21.53	11.93	9	15.22	8.43	4
0.10	1.98	10	0.10	0.10	5
			5060.85	4048.96	جرم (lbm)

۳۲۴ مابنی بهینه سازی سازه ها (فصل ۶: سیمای بهینه سازی در عمل)

## ۶.۷.۲ خرابای بیست و پنج میله ای

یک خرابای بیست و پنج میله ای در شکل ۶.۷.۱ نشان داده شده است. شرایط بارگذاری، خواص مصالح و مقادیر مجاز در جدولهای ۶.۷.۵، ۶.۷.۶، ۶.۷.۷ و ۶.۷.۸ داده شده و طراحی نهایی در جدول ۶.۷.۹ ارایه گردیده است. برای اطلاعات بیشتر به مرجع [70] مراجعه کنید.



شکل ۶.۷.۱ خرابای بیست و پنج میله ای

جدول ۶.۷.۵ داده های خرابای بیست و پنج میله ای

مصالح:	آلومینیم
ضریب ارتجاعی:	$10^7$ psi
جرم ویژه:	$0.1 \text{ lbm/in}^3$
حداقل مساحت:	$0.1 \text{ in}^2$

جدول ۶.۷.۶ تنشهای مجاز برای خرابای بیست و پنج میله ای (psi)

عضو	کشش	فشار	عضو	کشش	فشار
1	40000	-35092	12,13	40000	-35092
2-5	40000	-11590	14-17	40000	-6759
6-9	40000	-17305	18-21	40000	-6959
10,11	40000	-35092	22-25	40000	-11082

## بخش ۶.۷: مسائل آزمایشی ۳۲۵

جدول ۷. ۶.۷ مولفه های بار گره ای (lbf) برای خربای بیست و پنج میله ای

حالت بارگذاری	گره	x	y	z
1	1	1000	10000	-5000
	2	0	10000	-5000
	3	500	0	0
	6	500	0	0
2	5	0	20000	-5000
	6	0	-20000	-5000

جدول ۸. ۶.۷ تغییر مکانهای مجاز برای خربای بیست و پنج میله ای

گره	گرانه های تغییر مکان (in)		
	x	y	z
1	$\pm 0.35$	$\pm 0.35$	$\pm 0.35$
2	$\pm 0.35$	$\pm 0.35$	$\pm 0.35$

جدول ۹. ۶.۷ طراحیهای بهین خربای بیست و پنج میله ای

متغیر طراحی	عضوها	مساحت (in <sup>2</sup> )
1	1	0.010
2	2-5	1.987
3	6-9	2.991
4	10,11	0.010
5	12,13	0.012
6	14-17	0.683
7	18-21	1.679
8	22-25	2.664
(lbm) جرم		545.22

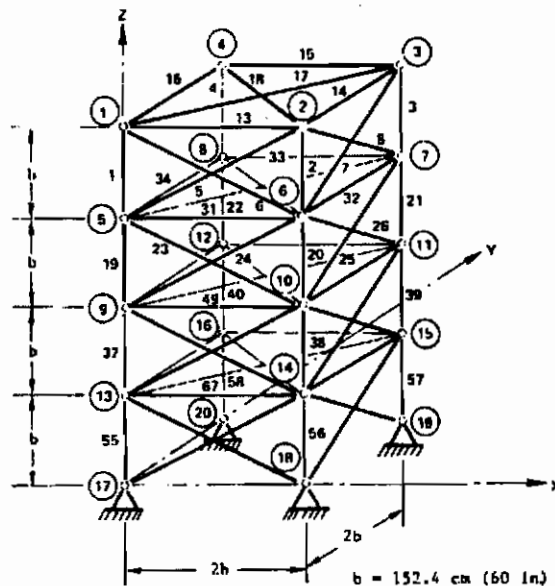
۳. ۶.۷ خربای هفتاد و دو میله ای

خربای هفتاد و دو میله ای در شکل ۶.۷.۲ نشان داده شده است. شرایط بارگذاری، خواص مصالح و مقادیر مجاز در جداول ۶.۷.۱۰، ۶.۷.۱۱ و ۶.۷.۱۲ نشان داده شده است و طراحی نهایی در جدول ۶.۷.۱۳ ارائه گردیده است. برای جزئیات بیشتر به مرجع [70] مراجعه کنید.

مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۶: سیمای بهینه سازی در عمل)

جدول ۱۰. ۶. داده های خریای هفتاد و دو میله ای

مصالح:	آلومینیم
ضریب ارتجاعی:	$10^7 \text{ psi}$
جرم ویژه:	$0.1 \text{ lbm/in}^3$
تنش مجاز:	$\pm 25\,000 \text{ psi}$
حداقل مساحت:	$0.1 \text{ in}^2$



توجه: برای وضوح بیشتر تمامی اجزا در شکل نشان داده نشده اند

شکل ۲. ۶. خریای هفتاد و دو میله ای

جدول ۱۱. ۶. مولفه های بار گره ای (lbf) برای خریای هفتاد و دو میله ای

حالت بارگذاری	گره	x	y	z
1	1	5000	5000	-5000
2	1	0	0	-5000
	2	0	0	-5000
	3	0	0	-5000
	4	0	0	-5000
3	5	0	20000	-5000
	6	0	-20000	-5000

## بخش ۶.۸: تمرینها ۳۴۷

جدول ۱۲. ۶.۷. تغییر مکانهای مجاز برای خربای هفتاد و دو میله ای

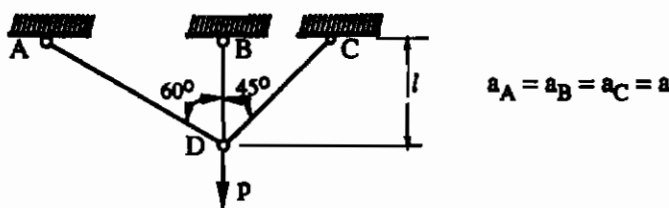
گره	گراهای تغییر مکان (in)		
	x	y	z
1	$\pm 0.25$	$\pm 0.25$	-
2	$\pm 0.25$	$\pm 0.25$	-
3	$\pm 0.25$	$\pm 0.25$	-
4	$\pm 0.25$	$\pm 0.25$	-

جدول ۱۳. ۶.۷. طراحیهای بهین خربای هفتاد و دو میله ای

متغیر طراحی	عضوها	مساحت ( $\text{in}^2$ )
1	1-4	0.1571
2	5-12	0.5356
3	13-16	0.4099
4	17,18	0.5690
5	19-22	0.5067
6	23-30	0.5200
7	31-34	0.1
8	35,36	0.1
9	37-40	1.280
10	41-48	0.5148
11	49-52	0.1
12	53,54	0.1
13	55-58	1.897
14	59-66	0.5158
15	67-70	0.1
16	71,72	0.1
جرم (lbm)		379.66

## ۶.۸ تمرینها

۱. نشان دهید تقریب محافظه کارانه معادله (۶.۱.۹) مقعر است، و تقریب معادله (۶.۱.۱۱) در صورتی که متغیرهای طراحی تغییر علامت ندهند، محدب است.
۲. معادله (۶.۱.۱۴) را بدست آورید.
۳. به جدول ۶.۱.۱ یک ستون اضافه کنید که تقریب قید بر اساس یک تقریب خطی از نیروی عضو C باشد (این تقریب خطی - نیرو توسط واندربلاتز و همکارانش پیشنهاد شده است [15-17]).
۴. خربای سه میله ای نشان داده شده در شکل ۶.۸.۱ اعضای با مساحت سطح مقطع یکسان



شکل ۶.۸. ۱ خرابی سه میله ای نامتقارن

دارد. پنج تقریب بیان شده در بخش ۱.۶ و تقریب خطی نیرو مسئله گذشته برای تنش عضو A را محاسبه کنید. دقت و محافظه کارانه بودن تقریبها را برای تغییر  $\pm 25\%$  در مساحت سطح مقطع عضو C را باهم مقایسه کنید.

۵. برای تنش عضو A در مسئله قبل یک تقریب خوب بر حسب دو زاویه 'خرابا بدست آورید.

۶. تیر شکل ۶.۱.۱ دارای چگالی جرمی  $p$  و مساحتهای سطح مقطع آن متناسب با ریشه دوم گشتاور مانند است  $A = \alpha\sqrt{I}$ . با استفاده از تقریب فراگیر- محلی پایین ترین بسامد ارتعاشی را برای تغییر  $I_2/I_1$  از ۱ به ۲ بدست آورید. برای حل دقیق از یک مدل اجزای محدود دو جزئی استفاده کرده، و برای تقریب فراگیر از مدل ۱ جزئی استفاده کنید. دقت کنید که برای این کار باید ماتریس سختی تیر با مساحتهای سطح مقطع متغیر را بدست آورید.

۷. معادله (۶.۲.۱۰) را ثابت کنید.

۸. مثال ۶.۲.۱۰ را به جای دو برابر کردن جرم با دو برابر کردن ثابت فنر چپ حل کنید.

۹. برای طراحی خرابی سه میله ای شکل ۶.۱.۲ از تقریب خطی دنباله ای استفاده کنید و آن را برای مینیمم شدن وزن مشروط به قید تنش تسلیم  $\sigma_0$  و قید حداقل  $0.1p/\sigma_0$  برای تمامی اعضا، طراحی کنید.

۱۰. مسئله قبلی را با تقریب وارون تکرار کنید.

## ۶.۹ مراجع

- [1] Schmit, L.A. Jr., and Farshi, B., "Some Approximation Concepts for Structural Synthesis," AIAA Journal, 12, 5, 692-699, 1974.
- [2] Mills-Curran, W.C., Lust, R.V., and Schmit, L.A. Jr., "Approximation Methods for Space Frame Synthesis," AIAA Journal, 21 (11), 1571-1580, 1983.

- [3] Storaasli, O.O., and Sobieszczanski, J., "On the Accuracy of the Taylor Approximation for Structure Resizing," *AIAA Journal*, 12 (2), 231-233, 1974.
- [4] Noor, A.K., and Lowder, H.E., "Structural Reanalysis via a Mixed Method," *Computers and Structures*, 5, 9-12, 1975.
- [5] Fuchs, M.B., "Linearized Homogeneous Constraints in Structural Design," *Int. J. Mech. Sci.*, 22, pp. 33-40, 1980.
- [6] Fuchs, M.B., and Haj Ali, R.M., "A Family of Homogeneous Analysis Models for the Design of Scalable Structures," *Structural Optimization*, 2, pp. 143-152, 1990.
- [7] Starnes, J.H. Jr., and Haftka, R.T., "Preliminary Design of Composite Wings for Buckling, Stress and Displacement Constraints," *Journal of Aircraft*, 16, 564-570, 1979.
- [8] Haftka, R.T., and Shore, C.P., "Approximate Methods for Combined Thermal-Structural Analysis," *NASA TP-1428*, 1979.
- [9] Prasad, B., "Explicit Constraint Approximation Forms in Structural Optimization—Part 1: Analyses and Projections," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 40 (1), 1-26, 1983.
- [10] Braibant, V., and Fleury, C., "An Approximation Concept Approach to Shape Optimal Design," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 53, pp. 119-148, 1985.
- [11] Prasad, B., "Novel Concepts for Constraint Treatments and Approximations in Efficient Structural Synthesis," *AIAA J.*, 22, 7, pp. 957-966, 1984.
- [12] Woo, T.H., "Space Frame Optimization Subject to Frequency Constraints," *AIAA J.* 25, 10, pp. 1396-1404, 1987.
- [13] Schmit, L.A., Jr., and Miura, H., "Approximation Concepts for Efficient Structural Synthesis," *NASA CR-2552*, 1976.
- [14] Lust, R.V., and Schmit, L.A., Jr., "Alternative Approximation Concepts for Space Frame Synthesis," *AIAA J.*, 24, 10, pp. 1676-1684, 1986.
- [15] Salajeghah, E., and Vanderplaats G.N., "An Efficient Approximation Method for Structural Synthesis with Reference to Space Structures," *Space Struct. J.*, 2, pp. 165-175, 1986/7.
- [16] Kodiyalam, S., and Vanderplaats G.N., "Shape Optimization of 3D Continuum Structures Via Force Approximation Technique," *AIAA J.*, 27 (9), pp. 1256-1263, 1989.
- [17] Hansen, S. R., and Vanderplaats G.N., "Approximation Method for Configuration Optimization of Trusses," *AIAA J.*, 28 (1), pp. 161-168, 1990.
- [18] Box, G.E.P., and Draper, N.R., *Empirical Model-Building and Response Surface*, Wiley, New York, 1987.



- [19] Barthelemy, J.-F., and Haftka, R.T., "Recent Advances in Approximations for Optimum Structural Design," NASA TM 104032, 1991.
- [20] Haftka, R.T., Nachlas, J.A., Watson, L.T., Rizzo, T., and Desai, R., "Two-Point Constraint Approximation in Structural Optimization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60, pp. 289-301, 1989.
- [21] Fadel, G.M., Riley, M.F., and Barthelemy, J.-F.M., "Two Point Exponential Approximation Method for Structural Optimization," *Structural Optimization*, 2, pp. 117-124, 1990.
- [22] Haftka, R.T., "Combining Local and Global Approximations," *AIAA Journal*, Vol. 29 (9), pp. 1523-1525, 1991.
- [23] Chang, K.-J., Haftka, R.T., Giles, G.L., and Kao, P.-J., "Sensitivity Based Scaling for Correlating Structural Response from Different Analytical Models," *AIAA Paper 91-0925, Proceedings of AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 32nd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Baltimore, MD, April 8-10, 1991.
- [24] Kirsch, U., and Taye, S., "High Quality Approximations of Forces for Optimum Structural Design," *Computers and Structures*, 30, 3, pp. 519-527, 1988.
- [25] Haley, S.B., "Solution of Modified Matrix Equations," *SIAM J. Numer. Anal.*, 24 (4), pp. 946-951, 1987.
- [26] Fuchs, M.B., and Steinberg, Y., "An Efficient Approximate Analysis Method Based on an Exact Univariate Model for the Element Loads," *Structural Optimization*, 3 (1), 1991.
- [27] Holnicki-Szulc, J., *Virtual Distortion Method*, Springer Verlag, Berlin, pp. 30-40, 1991.
- [28] Pritchard, J.I., and Adelman, H.M., "Differential Equation Based Method for Accurate Approximation in Optimization," *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 31st Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Long Beach, CA, April 2-4, Part I, pp. 414-424, 1990.
- [29] Murthy, D.V., and Haftka, R.T., "Approximations to Eigenvalues of Modified General Matrices," *Computers and Structures*, 29, pp. 903-917, 1988.
- [30] Shephard, M.S., and Yerry, M.A., "Automatic Finite Element Modeling for Use with Three-Dimensional Shape Optimization," in *The Optimum Shape* (Bennett, J.A., and Botkin M.E., eds.), Plenum Press, N.Y. 1986, pp. 113-135.
- [31] Yang, R.J., and Botkin, M.E., "A Modular Approach for Three-Dimensional Shape Optimization of Structures," *AIAA J.*, 25 (3), pp. 492-497, 1987.
- [32] Kohn, R.V., and Strang, G., "Optimal Design and Relaxation of Variational Problems," *Comm. Pure Appl. Math.*, 39, pp. 113-137 (Part I), pp. 139-182 (Part II), and pp. 353-377 (Part III), 1986.
- [33] Rozvany, G.I.N., Ong, T.G., Szeto, W.T., Olhoff, N., and Bendsoe, M.P., "Least-Weight Design of Perforated Plates," *Int. J. Solids Struct.*, 23, pp. 521-536 (Part I), and pp. 537-550 (Part II), 1987.

- [34] Bendsoe, M.P., and Kikuchi, N., "Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 71, pp.197-224, 1988.
- [35] Rasmussen, J., "Shape Optimization and CAD," *SARA*, 1, 33-45, 1991.
- [36] Dorn, W.S., Gomory, R.E., and Greenberg, H.J., "Automatic Design of Optimal Structures," *J. Mécanique*, 3, pp. 25-52, 1964.
- [37] Sheu, C.Y., and Schmit, L.A., "Minimum Weight Design of Elastic Redundant Trusses under Multiple Static Loading Conditions," *AIAA, J.*, 10 (2), pp. 155-162, 1972.
- [38] Reinschmidt, K.F., and Russel, A.D., "Applications of Linear Programming in Structural Layout and Optimization," *Comput. Struct.*, 4, pp. 855-869, 1974.
- [39] Topping, B.H.V., "Shape Optimization of Skeletal Structures—a Review," *ASCE J. Struct. Engng.*, 109 (8), pp. 1933-1951, 1983.
- [40] Kirsch, U., "Optimal Topologies of Structures," *Appl. Mech. Rev.*, 42 (8), pp. 223-239, 1989.
- [41] McCullers, L.A., and Lynch, R.W., "Composite Wing Design for Aeroelastic Tailoring Requirements," *Air Force Conference on Fibrous Composites in Flight Vehicle Design*, Dayton, Ohio, September, 1972.
- [42] McCullers, L.A., and Lynch, R.W., "Dynamic Characteristics of Advanced Filamentary Composites Structures," *AFFDL-TR-73-111*, Vol. II, 1974.
- [43] Haftka, R.T., "Structural Optimization with Aeroelastic Constraints—A Survey of US Applications," *Int. J. Vehicle Design*, 7, pp. 381-392, 1986.
- [44] Schmit, L.A., and Miura, H., "A New Structural Analysis / Synthesis Capability — Access I, *AIAA J.*, 14 (5), pp. 661-671, 1976.
- [45] Fleury, C., and Schmit, L.A., "ACCESS 3—Approximation Concepts Code for Efficient Structural Synthesis—User's Guide," *NASA CR-159260*, September 1980.
- [46] Wilkinson, K., et al., "An Automated Procedure for Flutter and Strength Analysis and Optimization of Aerospace Vehicles, Vol. I—Theory, Vol. II—Program User's Manual," *AFFDL-TR-75-137*, 1975.
- [47] Venkayya, V.B., and Tischler, V.A., "OPSTAT—A Computer Program for Optimal Design of Structures Subjected to Static Loads," *AFFDL-TR-79-67*, 1979.
- [48] Khot, N.S., "Computer Program (OPTCOMP) for Optimization of Composite Structures for Minimum Weight Design," *AFFDL-TR-76-149*, 1977.
- [49] Gellatly, R.A., Dupree, D.M., and Berke, L., "OPTIMUM II: A MAGIC Compatible Large Scale Automated Minimum Weight Design Program," *AFFDL-TR-74-97*, Vols. I and II, 1974.

- [50] Isakson, G., and Pardo, H., "ASOP-3: A Program for the Minimum Weight Design of Structures Subjected to Strength and Deflection Constraints," AFFDL-TR-76-157, 1976.
- [51] Bartholomew, P., and Wellen, H.K., "Computer Aided Optimization of Aircraft Structures," J. Aircraft, 27 (12), pp. 1079-1086, 1990.
- [52] Kiusalaas, J., and Reddy, G.B., "DESAP 2—A Structural Design Program with Stress and Buckling Constraints," NASA CR-2797 to 2799, 1977.
- [53] Haftka, R.T., and Prasad, B., "Programs for Analysis and Resizing of Complex Structures," Comput. Struct., 10, pp. 323-330, 1979.
- [54] Sobieszczanski-Sobieski, J., and Rogers, J.L., Jr., "A Programming System for Research and Applications in Structural Optimization," Int. Symposium on Optimum Structural Design, Tucson, Arizona, pp. 11-9-11-21, 1981.
- [55] Walsh, J.L., "Application of Mathematical Optimization Procedures to a Structural Model of a Large Finite-Element Wing," NASA TM-87597, 1986.
- [56] Vanderplaats, G.N., "CONMIN—A Fortran Program for Constrained Function Minimization: User's manual," NASA TM X-62282, 1973.
- [57] Brăma, T., "Applications of Structural Optimization Software in the Design Process," in Computer Aided Optimum Design of Structures: Applications, (Eds. C. A. Brebbia and S. Hernandez), Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, 1989, pp. 13-21.
- [58] Neill, D.J., Johnson, E.H., and Canfield, R., "ASTROS—A Multidisciplinary Automated Structural Design Tool," J. Aircraft, 27, 12, pp. 1021-1027, 1990.
- [59] Atrek, E., "SHAPE: A Program for Shape Optimization of Continuum Structures," in Computer Aided Optimum Design of Structures: Applications, (Eds. C. A. Brebbia and S. Hernandez), Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, 1989, pp. 135-144.
- [60] Hariran, M., Paeng, J.K., and Belsare, S., "STROPT—the Structural Optimization System," Proceedings of the 7th International Conference on Vehicle Structural Mechanics, Detroit, MI, April 11-13, 1988, SAE, pp. 27-38.
- [61] Vanderplaats, G.N., Miura, H., Nagendra, G., and Wallerstein, D., "Optimization of Large Scale Structures using MSC/NASTRAN," in Computer Aided Optimum Design of Structures: Applications, (Eds. C. A. Brebbia and S. Hernandez), Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, 1989, pp. 51-68.
- [62] Ward, P. and Cobb, W.G.C., "Application of I-DEAS Optimization for the Static and Dynamic Optimization of Engineering Structures," in Computer Aided Optimum Design of Structures: Applications, (Eds. C. A. Brebbia and S. Hernandez), Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, 1989, pp. 33-50.
- [63] GENESIS User's Manual (version 1.00), VMA Engineering, Goleta, California, September, 1991.
- [64] Vanderplaats, G.N., "ADS: A FORTRAN Program for Automated Design Synthesis", VMA Engineering, Inc. Goleta, California, May 1985.

بخش ۶.۹ : مراجع ۳۳۳

- [65] DOT User's Manual (version 2.0B), VMA Engineering, Inc. Goleta, California, Sept. 1990.
- [66] DOC User's manual (version 1.00), VMA Engineering, Inc. Goleta, California, March 1991.
- [67] Miura, H., and Schmit, L.A., Jr., "NEWSUMT—A Fortran Program for Inequality Constrained Function Minimization—User's Guide," NASA CR-159070, June, 1979.
- [68] Grandhi, R.V., Thareja, R., and Haftka, R.T., "NEWSUMT-A: A General Purpose Program for Constrained Optimization Using Constraint Approximations," ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 107, pp. 94-99, 1985.
- [69] Arora, J.S. and Tseng, C.H., "User Manual for IDESIGN: Version 3.5, Optimal Design Laboratory, College of Engineering, The University of Iowa, Iowa City, 1987.
- [70] Fleury, C., and Schmit, L.A. Jr., "Dual Methods and Approximation Concepts in Structural Synthesis," NASA CR-3226, December, 1980.



اولین گام در تحلیل یک سازه پیچیده، گسسته سازی فضایی معادلات پیوسته به یک مدل اجزای محدود، تفاضل محدود و یا مدلی شبیه آن است. سپس تحلیل مسأله در گرو حل معادلات جبری (پاسخ ایستایی)، مسائل مقدار ویژه جبری (کمانش یا ارتعاشات) و یا معادلات دیفرانسیل معمولی (پاسخ گذرا) است. آن گاه، محاسبه حساسیت، معادل مسأله ریاضی یافتن مشتقات جوابهای آن معادلات نسبت به ضرایبشان است که موضوع اصلی بحث این فصل است.

در بعضی حالتها مشتق گیری از معادلات پیوسته حاکم بر سازه نسبت به متغیرهای طراحی، پیش از فرایند گسسته سازی اجزا سودمند است. یکی از مزایای این کار این است که معادلات حساسیت حاصل در شیوه های تحلیلی مختلف مانند: اجزای محدود، حل ریتز<sup>۱</sup>، کالوکیشن<sup>۲</sup> و غیره بطور یکسان قابل کاربرد است. این راهکار در فصل بعدی بحث خواهد شد.

همان گونه که در فصل ششم اشاره شد، محاسبه حساسیت پاسخ سازه ها به تغییرات متغیرهای طراحی، غالباً هزینه اصلی محاسباتی فرایند بهینه سازی را تشکیل می دهد. بنابراین داشتن یک الگوریتم کارآمد برای ارزیابی مشتقات حساسیت از اهمیت بالایی برخوردار است.

حساسیت پاسخ سازه ها به متغیرهای مسأله دارای کاربردهای دیگری نیز می باشد. به عنوان مثال شناخت دقیق تمام پارامترهای مدل سازه مانند خواص جنس، بار و ابعاد، معمولاً ناممکن است. حساسیت پاسخ به تغییرات کوچک در این متغیرها، برای محاسبه تغییرات آماری پاسخ سازه ها ضروری است. آسانترین شیوه برای محاسبه مشتقات پاسخ نسبت به یک متغیر طراحی، تقریب تفاضل محدود است.

1) Ritz

2) Collocation

این شیوه معمولاً از نظر محاسباتی پر هزینه، اما کاربرد آن ساده و بسیار شناخته شده است. کارایی روشهای تحلیلی ارائه شده در این فصل با مقایسه آن با تفاضل محدود اندازه گیری می شود. متأسفانه تقریبهای تفاضل محدود غالباً از نظر دقت مشکل دارند. این فصل را با بحث بر روی این تقریبها برای مشتقات حساسیت آغاز می کنیم.

### ۷.۱ تقریبهای تفاضل محدود

ساده ترین تقریب تفاضل محدود، تقریب تفاضل پیش روی مرتبه اول می باشد. تابع  $u(x)$  از متغیر طراحی  $x$  را در نظر بگیرید. تقریب تفاضل پیش رو  $\Delta u / \Delta x$  برای مشتق  $du/dx$  عبارت است از:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad (7.1.1)$$

یکی دیگر از تقریبهای تفاضل محدود که کاربرد زیادی دارد، تقریب تفاضل مرکزی مرتبه دوم است.

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (7.1.2)$$

به کار گرفتن تقریب تفاضل محدود مرتبه های بالاتر نیز امکان پذیر است، اما در بهینه سازی سازه ها به دلیل هزینه بالای محاسباتی کاربرد کمتری دارد. اگر بخواهیم مشتقات پاسخ سازه نسبت به  $n$  متغیرهای طراحی را بدست آوریم، تقریب تفاضل پیش رو به  $n$  تحلیل اضافی و تقریب تفاضل مرکزی به  $2n$  تحلیل اضافی نیاز دارد و تقریبهای مرتبه بالاتر حتی هزینه برترند.

کلید انتخاب تقریب و اندازه گام  $\Delta x$ ، میزان دقت مورد نیاز است. این موضوع در [1] و [2] بحث شده است و در بخش زیر به اجمال بیان می گردد.

#### ۷.۱.۱ دقت و انتخاب اندازه گام

هرگاه رابطه تفاضل محدود برای تقریب زدن مشتقات به کار می رود دو منبع خطا وجود دارد: خطاهای شرطی و برش. خطای برش  $e_T(\Delta x)$  ناشی از فروگذاری جملات در بسط تیلور تابع اختلال یافته می باشد. به عنوان مثال، بسط سری تیلور  $u(x + \Delta x)$  را می توان به شکل زیر نوشت:



بخش ۷.۱: تقریبهای تفاضل محدود ۳۳۷

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \frac{du}{dx}(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(x + \zeta \Delta x), \quad 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (۷.۱.۳)$$

از معادله (۷.۱.۳) خطای برش برای تقریب تفاضل پیش رو به صورت زیر است:

$$e_T(\Delta x) = \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(x + \zeta \Delta x), \quad 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (۷.۱.۴)$$

بطور مشابه با در نظر گرفتن یک جمله بیشتر در بسط سری تیلور، خطای برش برای تقریب تفاضل مرکزی عبارت است از:

$$e_T(\Delta x) = \frac{\Delta x^2}{6} \frac{d^3u}{dx^3}(x + \zeta \Delta x), \quad -1 \leq \zeta \leq 1. \quad (۷.۱.۵)$$

خطای شرطی تفاوت بین محاسبه عددی تابع و مقدار دقیق آن است. یک قسمت از خطای شرطی مربوط به خطای گرد کردن در محاسبه  $du/dx$  از مقادیر اصلی و اختلال یافته  $u$  است. این قسمت برای اکثر رایانه ها نسبتاً کوچک است مگر آن که  $\Delta x$  بی نهایت کوچک باشد. با وجود این اگر  $u(x)$  با یک فرایند عددی طولانی یا بدخیم محاسبه شود سهم گرد کردن در خطای شرطی می تواند قابل ملاحظه باشد. از طرف دیگر، اگر  $u(x)$  با یک فرایند تکرار که سریع خاتمه یافته باشد محاسبه شود، خطاهای شرطی رخ می دهد. اگر در خطای مطلق در تابع محاسبه شده  $u$  یک کران  $\epsilon_u$  داشته باشیم، می توانیم خطای شرطی را تخمین بزنیم. به عنوان مثال برای تقریب تفاضل پیش رو، خطای شرطی  $e_C(\Delta x)$  از معادله (۷.۱.۱) بطور محافظه کارانه ای به شکل زیر تخمین زده می شود.

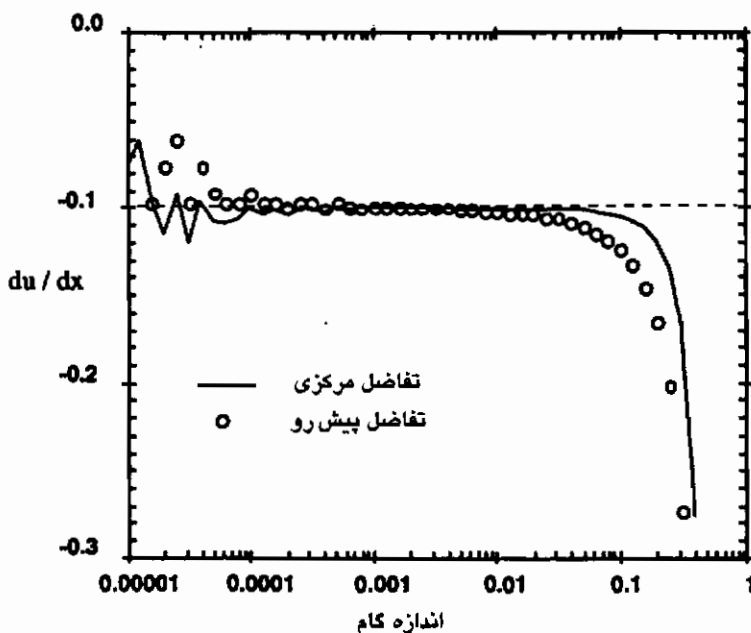
$$e_C(\Delta x) = \frac{2}{\Delta x} \epsilon_u. \quad (۷.۱.۶)$$

معادلات (۷.۱.۴) و (۷.۱.۶) مسأله ای به نام «مشکل اندازه گام» را نمایش می دهند. اگر اندازه گام را کوچک انتخاب کنیم که خطای برش کاهش یابد، ممکن است خطای شرطی بزرگ شود. در بعضی حالات ممکن است اندازه گامی که خطای قابل قبولی را به دست دهد، وجود نداشته باشد.

### مثال ۷.۱.۱

فرض کنید تابع  $u(x)$  به عنوان جواب دو معادله زیر تعریف شده باشد:





شکل (۷.۱.۱) تأثیر اندازه گام روی مشتق

$$101u + xv = 10,$$

$$xu + 100v = 10,$$

و همچنین فرض کنید مشتق  $du/dx$  در نقطه  $x = 100$  محاسبه شده باشد.

جواب  $u$  عبارت است از:

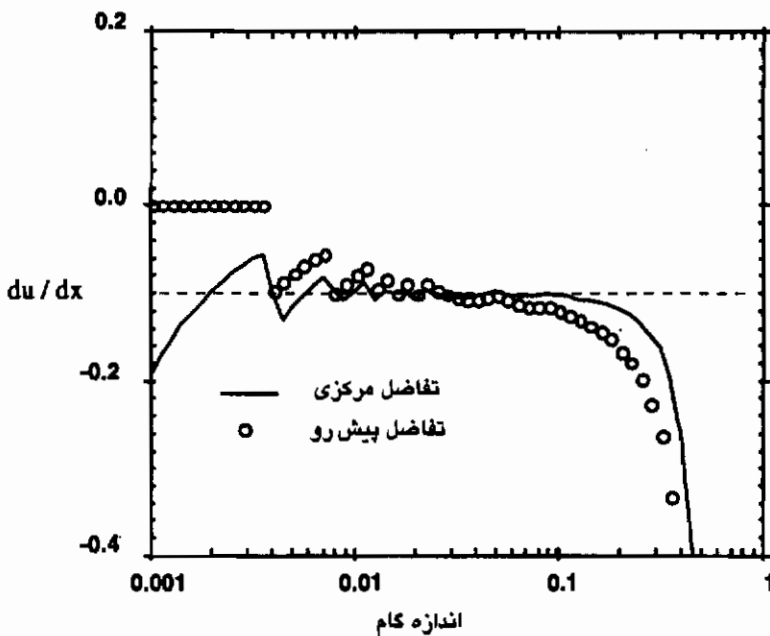
$$u = \frac{-10x + 1000}{10100 - x^2},$$

و مقدار دقیق  $du/dx$  در  $x = 100$ ،  $-0.10$  است. مشتقات تفاضل مرکزی و تفاضل پیش رو در شکل (۷.۱.۱) برای تعدادی اندازه گام رسم شده اند. توجه کنید که برای اندازه گامهای کوچک، چون خطای شرطی یک تابع پیوسته نیست، خطا نوسان می کند. برای اندازه گامهای بزرگتر، خطای برش که یک تابع هموار از اندازه گام است، در خطای کلی غالب می شود. می توانیم مسأله را کمی بدخیم تر کرده و خطای شرطی را افزایش دهیم. اگر داشته باشیم:

$$10001u + xv = 1000,$$

$$xu + 10000v = 1000.$$

بخش ۷.۱: تقریبهای تفاضل محدود ۳۳۹



شکل ۷.۲: تأثیر اندازه گام بر مشتق

مقادیر تقریبهای تفاضل پیش رو و مرکزی در  $x = 10000$  (شکل ۷.۱.۲) نشان داده شده است. اکنون محدوده قابل قبول اندازه های گام باریک شده و اگر بخواهیم یک محدوده معقول داشته باشیم باید از بسط تقریب تفاضل مرکزی استفاده کنیم.

محدوده  $e$  در خطای کلی - مجموع خطاهای شرطی و برش، برای تقریب تفاضل پیش رو از معادلات (۷.۱.۴) و (۷.۱.۶) به صورت بدست می آید.

$$e = \frac{\Delta x}{2} |s_b| + \frac{2}{\Delta x} \epsilon_u, \quad (7.1.7)$$

که  $s_b$  یک کران مشتق دوم در فاصله  $[x, x + \Delta x]$  است. هر گاه  $\epsilon_u$  و  $s_b$  در دسترس باشند، محاسبه یک اندازه گام بهینه که  $e$  را مینیمم کند به صورت زیر امکان پذیر است:

$$\Delta x_{opt} = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_u}{|s_b|}}. \quad (7.1.8)$$

روش تخمین  $s_b$  و  $\epsilon_u$  در [1] و [2] نشان داده شده است.

۳۴۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

## ۷.۱.۲ روشهای تکراری

وقتی برای انجام محاسبات، روشهای تکرار به کار می روند، خطاهای شرطی می توانند مهم باشند. یک مثال ساده از یک مؤلفه تغییر مکان منفرد  $u$  را در نظر بگیرید که از حل یک معادله جبری غیر خطی وابسته به متغیر طراحی  $x$ ، بدست آمده است.

$$f(x, u) = 0. \quad (7.1.9)$$

حل معادله (۷.۱.۹) با یک روند تکرار به دست می آید که با یک حدس اولیه  $u$  شروع شده و وقتی تکرار  $\bar{u}$  به میزان رواداری  $\epsilon$  به جواب دقیق  $u$  نزدیک است به خاتمه می رسد (توجه داشته باشید که  $\epsilon$  یک کران برای خطای شرطی در  $u$  است). فرض کنید برای محاسبه مشتق  $du/dx$  از تقریب تفاضل پیش رو استفاده کنیم؛ یعنی اختلال کوچک  $\Delta x$  را در  $x$  به وجود آورده و معادله (۷.۱.۹) را برای  $u_{\Delta}$  حل می کنیم.

$$f(x + \Delta x, u_{\Delta}) = 0. \quad (7.1.10)$$

از حل تکراری معادله (۷.۱.۱۰) یک تقریب برای  $\bar{u}_{\Delta}$  به دست می آید و سپس  $du/dx$  به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{\bar{u}_{\Delta} - \bar{u}}{\Delta x}. \quad (7.1.11)$$

برای شروع روند تکرار برای یافتن  $u_{\Delta}$  می توانیم از دو حدس اولیه استفاده کنیم. اولین حدس، همان حدس اولیه ای است که برای حل  $u$  استفاده شد. اگر همگرایی روند تکرار یکنوا باشد، بخت خوبی وجود دارد که وقتی از معادله (۷.۱.۱۱) استفاده می کنیم خطاها در  $\bar{u}$  و  $\bar{u}_{\Delta}$  تقریباً از بین بروند و یک خطای شرطی کوچک داشته باشیم. حدس اولیه منطقی دیگر برای  $u_{\Delta}$ ،  $\bar{u}$  است. این حدس اولیه هنگامی که  $\Delta x$  کوچک باشد مناسب است، و می توانیم همگرایی سریعی داشته باشیم. متأسفانه در این هنگام نمی توانیم انتظار داشته باشیم که خطاهای شرطی از بین بروند. هنگامی که با  $\bar{u}_{\Delta}$  تکرار را ادامه می دهیم، خطای اصلی (تفاوت بین  $u$  و  $\bar{u}$ )، هم زمان با تغییر به سبب  $\Delta x$  کاهش خواهد یافت (فرض کنید به عنوان مثال، اگر  $\Delta x$  صفر شود و یا یک عدد بی نهایت کوچک باشد چه اتفاقی می افتد).

بخش ۷.۱: تقریبهایی تفاضل محدود ۳۴۱

مرجع [3] راهبردی پیشنهاد می‌کند و به ما اجازه می‌دهد تکرار برای  $u_\Delta$  را از  $\bar{u}$  شروع کنیم، بدون این که درباره افزایش خطای شرطی نگران باشیم. این راهکار ادعا می‌کند که با تغییر مسأله‌ای که آن را می‌خواهیم حل کنیم  $\bar{u}$  جواب دقیق است و نه تقریبی. در واقع  $\bar{u}$  جواب دقیق

$$f(x, u) - f(x, \bar{u}) = 0. \quad (7.1.12)$$

است، که فقط مقدار کمی با مسأله اصلی متفاوت است (چون  $f(x, \bar{u})$  تقریباً صفر است). اکنون از معادله (7.1.12) مشتق  $du/dx$  را، با یافتن  $u_\Delta$  به عنوان جواب

$$f(x + \Delta x, u_\Delta) - f(x, \bar{u}) = 0. \quad (7.1.13)$$

می‌یابیم. چون  $\bar{u}$  جواب دقیق این معادله برای  $\Delta x = 0$  می‌باشد، روند تکرار فقط تأثیر  $\Delta x$  را منعکس می‌کند.

## مثال ۷.۱.۲

معادله غیرخطی

$$f(u, x) = u^2 - x = 0,$$

و روند تکرار

$$u_m = 0.5(u_{m-1} + x/u_{m-1}),$$

را در نظر بگیرید، که کاربردی از روش نیوتن برای مسائل ریشه مربعات است و بنابراین خاصیت همگرایی درجه دو دارد.

جدول ۷.۱.۱ همگرایی  $u$  برای  $x = 1000$ ،  $x = 1000.1$  و  $x = 1100$  و تخمین مشتق  $du/dx$  در  $x = 1000$  را نشان می‌دهد. اولین حدس برای  $u$  در هر سه حالت،  $x$  در نظر گرفته شده است. توجه کنید که همگرایی در فاصله‌های دور از جواب آهسته است و خطا در هر تکرار نصف می‌شود. هر چه خطا کوچکتر می‌شود نرخ همگرایی افزایش می‌یابد. دیده می‌شود که همگرایی مشتق کمی آهسته‌تر از

جدول ۷.۱.۱. سابقه تکرار با شروع  $u = x$ 

تعداد تکرار	$x = 1000$		$x + \Delta x = 1000.1$			$x + \Delta x = 1100$		
	$\bar{u}$	$f$	$\bar{u}_\Delta$	$f$	$\Delta u / \Delta x$	$\bar{u}_\Delta$	$f$	$\Delta u / \Delta x$
0	1000.00	999,000	1000.10	999,000	0.99850	1100.00	1,208,000	1.00000
1	500.500	250,000	500.550	250,000	0.49800	550.500	302,000	0.50000
2	251.249	62,100	251.274	62,100	0.24900	276.249	75,200	0.25000
3	127.615	15,300	127.627	15,300	0.12450	140.115	18,500	0.12500
4	67.7253	3,590	67.7315	3,590	0.06225	73.9380	4,370	0.06258
5	41.2454	701.2	41.2486	701.3	0.03174	44.4256	873.6	0.03180
6	32.7453	72.25	32.7471	72.27	0.01862	34.5930	96.68	0.01848
7	31.6420	1.216	31.6436	1.217	0.01587	33.1957	1.954	0.01553
8	31.6228	-0.005	31.6244	0.000	0.01587	33.1663	0.0007	0.01543

$$u(x = 1000) = 31.6228; du/dx = 0.01581$$

$u$  است. همچنین می بینیم که  $\Delta x$  کوچک هیچ خطاهای شرطی بزرگی در مقایسه با  $\Delta x$  بزرگ به وجود نمی آورد. این به سبب همگرایی یکنوا و از بین رفتن خطاهای شرطی است.

اکنون اولین حدس از حل اختلالی را با یکی از مقادیر اسمی در تکرارها شروع می کنیم. اگر حل اختلالی را از یک تقریب خوب شروع کنیم، در رسیدن به جواب اسمی همگرایی سریعی خواهیم داشت و معمولاً فقط به یک یا دو تکرار نیاز داریم. بنابراین مقدار مشتق تفاضل محدود بعد از دو تکرار اولیه ثابت می ماند. جدول (۷.۱.۲) نشان می دهد که دومین تکرار  $u_2$  وقتی به دست می آید که حل اختلالی از هر یک از چهار تکرار آخر حل اسمی که در جدول (۷.۱.۱) آورده شده شروع شود.

جدول ۷.۱.۲. تأثیر شروع  $u_\Delta$  از  $u_0$ 

$u_0^1$	$x + \Delta x = 1000.1$		$x + \Delta x = 1100$	
	$u_2$	$\Delta u / \Delta x$	$u_2$	$\Delta u / \Delta x$
41.2454	31.6436	-96.0181	33.1755	-0.08070
32.7453	31.6244	-11.2093	33.1662	0.00421
31.6420	31.6243	-0.1772	33.1663	0.01524
31.6228	31.6243	0.01572	33.1663	0.01543

 $u_0^1$  از تکرارهای جدول ۷.۱.۱ است.

بررسی جدول (۷.۱.۲) نشان می دهد که چون حل اختلالی دقیقتر از حل اسمی است مشتقات به دست آمده از تفاضل محدود، به جز در دقتهای خیلی بالا ( $\epsilon$  کوچک) نادرست است. تأثیر نمو تفاضل محدود  $\Delta x$  بدیهی است. خطاها برای  $\Delta x$  کوچک از خطاها برای  $\Delta x$  بزرگتر، به جز وقتی که  $u_0$

بخش ۷.۱: تقریبهای تفاضل محدود ۳۳۳

جدول ۷.۱.۳ محاسبات تغییر یافته مشتق

$u_0$	$x + \Delta x = 1100$			$x + \Delta x = 1000.1$	
	$u_2$	$\Delta u / \Delta x$		$u_2$	$\Delta u / \Delta x$
41.2454	42.4404	0.01195		41.2466	0.01205
32.7453	34.2382	0.01493		32.7468	0.01511
31.6420	33.1846	0.01543		31.6436	0.01572
31.6228	33.1663	0.01543		31.6243	0.01572

کاملاً همگرا شده است (در نتیجه هیچ خطای شرطی وجود ندارد) بزرگترند.

اکنون از راهکار ۷.۱.۱۳ استفاده می‌کنیم و معادله اصلی را با معادله

$$u^2 - x - \bar{f} = 0,$$

جایگزین می‌کنیم که در آن  $\bar{f}$  باقیمانده آخرین تکرار از حل اسمی است. در حل اختلالی سعی می‌کنیم ریشه  $\bar{f} + x$  را به جای  $x$  محاسبه کنیم. نتیجه‌های محاسبات بهبود یافته در جدول (۷.۱.۳) نشان داده شده است. اکنون می‌توانیم با دو تکرار، یک تقریب معقول برای مشتق به دست آوریم.

توجه به هزینه و دقت، غالباً ما را به عدم استفاده از مشتقات تفاضل محدود ترغیب می‌کند. برای تغییر مکان ایستایی و قیود تنش، مشتقات تحلیلی، همان گونه که در بخش بعدی بحث خواهد شد، به راحتی به دست می‌آیند.

### ۷.۱.۳ تأثیر بزرگی مشتق بر روی دقت

بدیهی است که تغییر مکانها و تنشهای کوچک، به دقت تغییر مکانها و تنشهای بزرگ محاسبه نمی‌شوند. برای مشتقات نیز این مطلب صحیح است. هنگامی که تابع  $u$  و متغیر  $x$  هر دو مثبت باشند، بزرگی نسبی مشتق می‌تواند از روی مشتق لگاریتمی زیر تخمین زده شود:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(\log u)}{d(\log x)} = \frac{du/u}{dx/x}. \quad (7.1.14)$$

مشتق لگاریتمی درصد تغییر  $u$  به ازای یک درصد تغییر در  $x$  را می‌دهد. بنابراین هنگامی که مشتق لگاریتمی بزرگتر از واحد است، تغییر نسبی در  $u$  از تغییر نسبی در  $x$  بزرگتر است و مشتق را می‌توان بزرگ در نظر گرفت. وقتی که مشتق لگاریتمی خیلی از واحد کوچکتر است، تغییر نسبی در  $u$  خیلی

۳۴۴ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

کوچکتر از تغییر نسبی در  $x$  است. در این حالت مشتق کوچک در نظر گرفته می شود و در حالت کلی ارزیابی دقت با استفاده از تفاضل محدود (یا هر رویه دیگری که تحت تأثیر خطاهای برش یا شرطی است) مشکل است. خوشبختانه وقتی مشتق لگاریتمی کوچک است غالباً ارزیابی دقت آن مهم نیست، زیرا تأثیرش بر روند بهینه سازی کم است.

هنگامی که یک متغیر در محدوده تغییر علامت است، یعنی از نظر مقدار خیلی کوچک است، مشتق لگاریتمی می تواند گمراه کننده باشد. در این حالت پیشنهاد می کنیم که از مقادیر نمونه،  $u$  و  $x$  به جای مقادیر محلی استفاده شود؛ یعنی یک مشتق لگاریتمی بهبود یافته  $d_{lm}u/dx$  به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\frac{d_{lm}u}{dx} = \frac{du/u_i}{dx/x_i} \quad (۷.۱.۱۵)$$

که  $u_i$  و  $x_i$  به ترتیب نماینده مقادیر متغیر و تابع اند.

### مثال ۷.۱.۳

ارتباط افزایش خطا و مشتقات کوچک در مسأله ساده طراحی زیر نشان داده می شود. طراحی یک تیر غوطه ور با سطح مقطع مستطیلی را در نظر می گیریم و می خواهیم سطح مقطع آن را مینیمم کنیم (برای کاهش خسارت خوردگی). تیر تحت تأثیر گشتاور خمشی  $M$  است و باید تنش خمشی ماکزیمم از تنش مجاز  $\sigma_0$  کوچکتر باشد. متغیرهای طراحی، پهنای  $b$  و ارتفاع  $h$  سطح مقطع مستطیل است. مسأله را می توان به صورت زیر رابطه سازی کرد:

$$\begin{aligned} & 2(b+h), \quad \text{عبارت} \\ & \frac{6M}{bh^2} \leq \sigma_0. \quad \text{را چنان مینیمم کنید که} \end{aligned}$$

مسأله را با تعریف طول مشخصه  $l$  و استفاده از آن برای تعریف متغیرهای طراحی جدید  $x_1$  و  $x_2$  به صورت زیر بی بعد می کنیم:

$$l = (6M/\sigma_0)^{1/3}, \quad x_1 = b/l, \quad x_2 = h/l.$$

با متغیرهای جدید مسأله به صورت زیر رابطه سازی می گردد:

بخش ۷.۱: تقریبهای تفاضل محدود ۳۴۵

$$u = x_1 + x_2, \quad \text{عبارت}$$

$$\frac{1}{x_1 x_2^2} = 1, \quad \text{را چنان مینیمم کنید که}$$

که نامساوی با یک تساوی جایگزین شده است زیرا قید تنش فعال خواهد شد (در غیر این صورت جواب  $b = h = 0$  است). تساوی می تواند برای حذف  $x_1$  بکار رود به شکلی که تابع هدف را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u = 1/x_2^2 + x_2$$

اکنون محاسبه مشتق با استفاده از روش تفاضل محدود را در دو نقطه در نظر می گیریم؛ که یک نقطه در طرح اولیه که  $x_2 = 1$  است و نقطه دیگر نزدیک نقطه بهینه در  $x_2 = 1.29$  در هر دو حالت از تفاضل پیش رو با  $\Delta x_2 = 0.01$  استفاده می کنیم. در  $x_2 = 1$  خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x_2} = \frac{1/1.01^2 + 1.01 - 2}{0.01} = -0.970,$$

که ۳ درصد از جواب دقیق مشتق  $du/dx_2 = -1.0$  کمتر است. در  $x_2 = 1.29$  داریم:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x_2} = \frac{1/1.30^2 + 1.30 - (1/1.29^2 + 1.29)}{0.01} = 0.0791,$$

که ۱۶ درصد از جواب دقیق ۰.۰۶۸۳ کمتر است. مشتق لگاریتمی به ما هشدار می دهد که باید انتظار خطای نسبی بزرگی را در حالت دوم داشته باشیم. در واقع برای  $x_2 = 1$  داریم  $u = 2.0$  و مشتق لگاریتمی از مشتق تفاضل محدود به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{d_l u}{d x_2} \approx \frac{\Delta_l u}{\Delta x_2} = \frac{\Delta u}{\Delta x_2} \frac{x_2}{u} = -0.97 \times 1/2 = -0.485.$$

در  $x_2 = 1.29$  داریم  $u = 1.891$  و

$$\frac{d_l u}{d x_2} \approx \frac{\Delta_l u}{\Delta x_2} = \frac{\Delta u}{\Delta x_2} \frac{x_2}{u} = 0.0791 \times 1.29/1.891 = 0.054,$$

بنابراین مشتق لگاریتمی در واقع بسیار کوچک است. ...



۳۴۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

## ۷.۲ مشتقات حساسیت تغییر مکان ایستایی و قیود تنش

### ۷.۲.۱ مشتقات اول تحلیلی

معادلات تعادل بر حسب بردار تغییر مکان گره ای  $u$  از یک مدل اجزای محدود به شکل زیر نوشته می شود:

$$Ku = f, \quad (7.2.1)$$

که  $K$  ماتریس سختی و  $f$  بردار بار است. یک قید نمونه، حدی را در تغییر مکان یا یک مؤلفه تنش اعمال می کند و به صورت زیر نوشته می شود:

$$g(u, x) \geq 0, \quad (7.2.2)$$

که به منظور ساده شدن نمادسازی فرض می شود که  $g$  فقط به یک متغیر طراحی منفرد  $x$  وابسته است. با استفاده از قانون مشتق گیری زنجیره ای خواهیم داشت:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + z^T \frac{du}{dx}, \quad (7.2.3)$$

که  $z$  یک بردار با مؤلفه های

$$z_i = \frac{\partial g}{\partial u_i}. \quad (7.2.4)$$

می باشد. توجه کنید که نماد  $dg/dx$  را برای مشتق کلی  $g$  نسبت به  $x$  کار می بریم. این مشتق کلی شامل قسمت صریح  $\partial g / \partial x$  بعلاوه قسمت ضمنی که به  $u$  وابسته است، می باشد. قسمت صریح مشتق غالباً صفر است و یا راحت به دست می آید. بنابراین فقط روی محاسبه قسمت ضمنی بحث می کنیم. با دیفرانسیل گیری از معادله (۷.۲.۱) نسبت به  $x$  داریم:

$$K \frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} - \frac{dK}{dx} u. \quad (7.2.5)$$

با پیش ضرب کردن معادله (۷.۲.۵) در  $z^T K^{-1}$  داریم:

$$z^T \frac{du}{dx} = z^T K^{-1} \left( \frac{df}{dx} - \frac{dK}{dx} u \right). \quad (7.2.6)$$

محاسبه  $z^T du/dx$  به دو صورت ممکن است اجرا شود. اولین راه که روش مستقیم نامیده می شود،

بخش ۷.۲: مشتقات حساسیت تغییر مکان ایستایی و قیود تنش ۳۴۷

شامل حل معادله (۷.۲.۵) برای  $du/dx$  و سپس ضرب اسکالر آن در  $z$  است. راهکار دوم روش الحاقی نامیده می شود که یک بردار الحاقی  $\lambda$  تعریف می کند که جواب دستگاه

$$K\lambda = z, \quad (۷.۲.۷)$$

است. آن گاه معادله (۷.۲.۳) را به صورت

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \lambda^T \left( \frac{df}{dx} - \frac{dK}{dx} u \right), \quad (۷.۲.۸)$$

می نویسیم که از تقارن  $K$  استفاده کرده ایم.

حل معادله (۷.۲.۷) برای  $\lambda$  شبیه به حل برای تغییر مکان تحت یک بردار بار  $z$  است. روش الحاقی همچنین با عنوان روش بار ظاهری شناخته می شود، چون  $z$  غالباً به عنوان یک نیروی ظاهری توصیف می شود. هنگامی که  $g$  در معادله (۷.۲.۲) یک کران بالا برای مؤلفه تغییر مکان منفرد است، بار ظاهری نیز یک مؤلفه غیر صفر منفرد مربوط به مؤلفه تغییر مکان مقید شده دارد. بطور مشابه وقتی  $g$  یک کران بالا برای تنش در یک عضو خریا است، بار ظاهری از یک جفت نیروی مساوی و معکوس هم که بر روی دو انتهای عضو عمل می کنند تشکیل می شود.

برای این حالت از پاسخ ایستایی، به دست آوردن روش الحاقی خیلی ساده است. با این وجود این روش در خیلی از حالتها دیگر نیز که می خواهیم مشتق یک قید را بدون محاسبه اولین مشتق پاسخ  $u$  محاسبه کنیم مورد استفاده قرار خواهد گرفت. به دست آوردن روش الحاقی را در روندی که قابل کاربرد در حالت عمومی می باشد، تکرار می کنیم. این روند شامل اضافه کردن حاصلضرب مشتق معادلات تعادل در یک ضربگر لاگرانژ به مشتق قید است. ضربگر لاگرانژ که برابر با بردار الحاقی است برای برآورده ساختن معادلات انتخاب می شود که منجر به حذف مشتق پاسخ می شود. برای این حالت، معادله (۷.۲.۳) را به صورت:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + z^T \frac{du}{dx} + \lambda^T \left( \frac{df}{dx} - \frac{dK}{dx} u - K \frac{du}{dx} \right), \quad (۷.۲.۹)$$

بازنویسی می کنیم، که جمله اضافی حاصلضرب بردار الحاقی در مشتق معادلات تعادل است. با مرتب کردن جملات در معادله (۷.۲.۹) داریم:

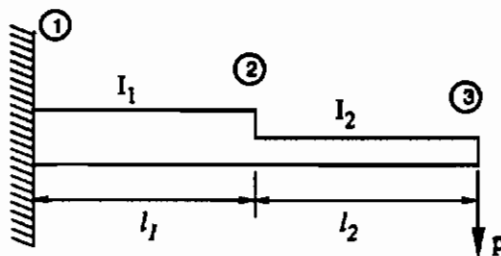
۳۴۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + (z^T - \lambda^T K) \frac{du}{dx} + \lambda^T \left( \frac{df}{dx} - \frac{dK}{dx} u \right). \quad (7.2.10)$$

اگر بخواهیم  $du/dx$  را از این عبارت حذف کنیم باید  $\lambda$  به شکلی انتخاب شود که ضریب آن را حذف کند، که در نتیجه معادله (۷.۲.۷) را برای  $\lambda$  می دهد. جملات باقی مانده شبیه به معادله (۷.۲.۸) برای مشتق قید است.

### مثال ۷.۲.۱

در این مثال، مشتق حساسیت قیدی بر تغییر مکان سر یک تیر یکسر گیردار پله ای را نسبت به گشتاور ماند  $I_1$  و طول  $l_1$  محاسبه می کنیم:



شکل ۷.۲.۱ مثال تیر برای مشتقات پاسخ ایستایی

قید روی تغییر مکان سر به صورت

$$g = c - w_{tip} \geq 0.$$

است. مسأله ساده است و یک جواب تحلیلی بر اساس تئوری مقدماتی تیرها دارد.

$$w_{tip} = \frac{P}{3EI_1} (l_1^3 + 3l_1^2 l_2 + 3l_1 l_2^2) + \frac{Pl_2^3}{3EI_2},$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial I_1} &= \frac{P}{3EI_1^2} (l_1^3 + 3l_1^2 l_2 + 3l_1 l_2^2), \\ \frac{\partial g}{\partial l_1} &= -\frac{P}{3EI_1} (3l_1^2 + 6l_1 l_2 + 3l_2^2) = -\frac{P}{EI_1} (l_1 + l_2)^2. \end{aligned}$$

بخش ۷.۲: مشتقات حساسیت تغییر مکان ایستایی و نیرو تنش ۳۳۹

حل اجزای محدود بر اساس جزء تیر درجه ۳ استاندارد که برای هر قسمت از تیر یک جزء در نظر گرفته شده، قرار دارد. تغییر مکان و چرخش در  $i$  امین گره را به ترتیب با  $w_i$  و  $\theta_i$  نمایش می دهیم. ماتریس سختی جزء عبارت است از

$$K^e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix},$$

بنابراین ماتریس سختی کلی مربوط به درجه آزادیهای  $w_2, \theta_2, w_3, \theta_3$  عبارت است از

$$K = E \begin{bmatrix} 12(I_1/l_1^3 + I_2/l_2^3) & -6(I_1/l_1^2 - I_2/l_2^2) & -12I_2/l_2^3 & 6I_2/l_2^2 \\ & 4(I_1/l_1 + I_2/l_2) & -6I_2/l_2^2 & 2I_2/l_2 \\ & & 12I_2/l_2^3 & -6I_2/l_2^2 \\ sym & & & 4I_2/l_2 \end{bmatrix}.$$

بردار بار عبارت است از  $f = [0, 0, p, 0]^T$  و جواب بردار تغییر مکان عبارت است از:

$$u = \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \left( \frac{p}{E} \right) \begin{Bmatrix} l_1^3/3I_1 + l_1^2 l_2/2I_1 \\ l_1^2/2I_1 + l_1 l_2/I_1 \\ (l_1^3 + 3l_1^2 l_2 + 3l_1 l_2^2)/3I_1 + l_2^3/3I_2 \\ l_1^2/2I_1 + l_1 l_2/I_1 + l_2^2/I_2 \end{Bmatrix}.$$

در ابتدا از روشهای تحلیلی برای محاسبه مشتق استفاده می کنیم. بنابراین نیاز به  $(\partial K/\partial I_1)u$  و  $(\partial K/\partial I_1)u$  داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial I_1} u &= \left( \frac{E}{l_1^3} \right) \begin{bmatrix} 12 & -6l_1 & 0 & 0 \\ -6l_1 & 4l_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \left( \frac{E}{l_1^3} \right) \begin{Bmatrix} 12w_2 - 6l_1\theta_2 \\ -6l_1w_2 + 4l_1^2\theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \left( \frac{p}{I_1} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ l_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

که از جواب  $w_2$  و  $\theta_2$  استفاده شده است. بطور مشابه:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial I_1} u &= \left( \frac{EI_1}{l_1^4} \right) \begin{bmatrix} -36 & 12l_1 & 0 & 0 \\ 12l_1 & -4l_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \left( \frac{4EI_1}{l_1^4} \right) \begin{Bmatrix} -9w_2 + 3l_1\theta_2 \\ 3l_1w_2 - l_1^2\theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \left( \frac{p}{l_1} \right) \begin{Bmatrix} -6(1 + l_2/l_1) \\ 2(l_1 + l_2) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

۳۵۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

در روش مستقیم

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial I_1} = \mathbf{K}^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial I_1} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial I_1} \mathbf{u} \right],$$

یا

$$\frac{\partial}{\partial I_1} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{K}^{-1} \begin{Bmatrix} p/I_1 \\ p l_2/I_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{p}{EI_1^2} \begin{Bmatrix} l_1^2 l_2/2 + l_1^3/3 \\ l_1 l_2 + l_1^2/2 \\ l_1^2 l_2 + l_1 l_2^2 + l_1^3/3 \\ l_1 l_2 + l_1^2/2 \end{Bmatrix},$$

بنابراین  $\partial g / \partial I_1 = -\partial w_3 / \partial I_1$  که با نتیجه نظری تیر هماهنگ است. بطور مشابه

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l_1} = \mathbf{K}^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial l_1} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial l_1} \mathbf{u} \right],$$

یا

$$\frac{\partial}{\partial l_1} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = -\mathbf{K}^{-1} \begin{Bmatrix} -(6p/l_1)(1 + l_2/l_1) \\ (2p/l_1)(l_1 + l_2) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left( \frac{p}{EI_1} \right) \begin{Bmatrix} l_1^2 + l_1 l_2 \\ l_1 + l_2 \\ (l_1 + l_2)^2 \\ l_1 + l_2 \end{Bmatrix},$$

بنابراین  $\partial g / \partial l_1 = -\partial w_3 / \partial l_1$  که بار دیگر با نتیجه نظری تیر منطبق است.

در روش الحاقی.  $\mathbf{z}^T = -\partial w_{tip} / \partial \mathbf{u} = [0, 0, -1, 0]$  را برای بردار الحاقی حل

کنیم.

$$\lambda = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{K}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left( -\frac{1}{E} \right) \begin{Bmatrix} l_1^3/3I_1 + l_1^2 l_2/2I_1 \\ l_1^2/2I_1 + l_1 l_2/I_1 \\ (l_1^3 + 3l_1^2 l_2 + 3l_1 l_2^2)/3I_1 + l_2^3/3I_2 \\ l_1^2/2I_1 + l_1 l_2/I_1 + l_2^2/I_2 \end{Bmatrix},$$

بنابراین از معادله (۸. ۲. ۷)

$$\frac{\partial g}{\partial I_1} = -\lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial I_1} \mathbf{u} = \frac{p}{EI_1} \left( \frac{l_1^3}{3I_1} + \frac{l_1^2 l_2}{2I_1} + \frac{l_1^2 l_2}{2I_1} + \frac{l_1 l_2^2}{I_1} \right) = \frac{p}{EI_1^2} (l_1^2 l_2 + l_1 l_2^2 + l_1^3/3),$$

و

$$\frac{\partial g}{\partial l_1} = -\lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial l_1} \mathbf{u} = \frac{p}{EI_1} (l_1 + l_2) \left( -\frac{2l_1^2}{I_1} - \frac{3l_1}{I_1} + \frac{l_1^2}{I_1} + \frac{2l_1 l_2}{I_1} \right) = \frac{p}{EI_1} (l_1 + l_2)^2.$$

...

## بخش ۷.۲: مشتقات حساسیت تغییر مکان ایستایی و قیود تنش ۴۵۱

تفاوت بین کار محاسباتی مربوط به روش مستقیم و روش الحاقی بستگی به تعداد نسبی متغیرهای طراحی و قیود دارد. روش مستقیم به چندین بار حل معادله (۷.۲.۵)، و هر بار برای یک متغیر طراحی نیاز دارد. در حالی که روش الحاقی نیاز به یک بار حل معادله (۷.۲.۷) برای هر قید دارد. بنابراین هنگامی که تعداد متغیرهای طراحی از تعداد قیود تغییر مکان و تنش که نیاز به دیفرانسیل گیری دارند کمتر است، روش مستقیم، کارآیی بیشتری دارد. هنگامی که تعداد متغیرهای طراحی از تعداد این قیود بیشتر است، روش الحاقی، کارآیی بیشتری دارد.

معمولاً در طراحی عملی ناگزیریم چندین حالت بار را در نظر بگیریم. کار مربوط به روش مستقیم تقریباً متناسب با تعداد حالت‌های بار است. از طرف دیگر، تعداد قیود بحرانی در طراحی بهینه غالباً کمتر از متغیرهای طراحی است. بنابراین برای حالت بارهای چندگانه، روش الحاقی مناسب تر است.

هر دو روش، مستقیم و الحاقی، نیاز به حل یک دستگاه معادلات، که قسمت اصلی کار محاسباتی را تشکیل می‌دهد، دارند. شکل عامل گیری شده ماتریس  $K$ ی معادلات غالباً از حل معادله (۷.۲.۱) برای تغییر مکانها در دسترسند. بنابراین حل برای  $du/dx$  یا  $\lambda$  خیلی کم هزینه تر از حل اصلی معادله (۷.۲.۱) است. این، مزیت بزرگ محاسباتی این دو روش تحلیلی نسبت به محاسبات تفاضل محدود مشتقات است. به عنوان مثال تقریب تفاضل پیش رو برای  $du/dx$  عبارت است از:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad (7.2.11)$$

که نیاز به ارزیابی  $u(x + \Delta x)$  به وسیله بازسازی ماتریس سختی و بردار بار در طراحی اختلال یافته و حل معادله:

$$K(x + \Delta x)u(x + \Delta x) = f(x + \Delta x). \quad (7.2.12)$$

دارد. شکل عامل گیری شده  $K(x + \Delta x)$  مورد نیاز معمولاً پرهزینه تر از حل یک طرف راست دیگر با  $K(x)$  عامل گیری شده در معادلات (۷.۲.۵) و (۷.۲.۷) است. مزیت روشهای تحلیلی بر تقریب تفاضل محدود هنگامی که تعداد متغیرهای طراحی زیاد باشد بیشتر نمایان می‌شود.

## ۷. ۲. ۲ مشتقات دوم

در بعضی کاربردها (به عنوان مثال، محاسبه حساسیت جوابهای بهینه که در بخش ۴. ۵ آمده) به مشتقات توابع قید نسبت به متغیرهای طراحی نیاز داریم. در ادامه عبارتهایی برای ارزیابی  $d^2g/dx dy$  که  $x$  و  $y$  متغیرهای طراحی اند، به دست می آوریم. به منظور ساده سازی فرض می کنیم که تابع قید  $g$  یک تابع صریح از متغیرهای طراحی نیست، بنابراین  $\partial g/\partial x$  و  $\partial g/\partial y$  صفرند. عبارتهای کلی تری در [5] بیان شده است.

برای یافتن مشتقات دوم، مانند حالت مشتقات اول، یک روش مستقیم و یک روش الحاقی داریم. روش مستقیم با مشتق گیری از معادله (۷. ۲. ۳) نسبت به  $y$  شروع می شود.

$$\frac{d^2g}{dx dy} = \mathbf{z}^T \frac{d^2\mathbf{u}}{dx dy} + \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right)^T \mathbf{R} \frac{d\mathbf{u}}{dy}, \quad (7.2.13)$$

که  $\mathbf{R}$  ماتریس مشتقات دوم  $g$  نسبت به  $\mathbf{u}$  می باشد و عبارت است از:

$$r_{ij} = \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j}. \quad (7.2.14)$$

مشتق دوم میدان تغییر مکان را با دیفرانسیل گیری از معادله (۷. ۲. ۵) به دست می آوریم:

$$\mathbf{K} \frac{d^2\mathbf{u}}{dx dy} = \frac{d^2\mathbf{f}}{dx dy} - \frac{d^2\mathbf{K}}{dx dy} \mathbf{u} - \frac{d\mathbf{K}}{dx} \frac{d\mathbf{u}}{dy} - \frac{d\mathbf{K}}{dy} \frac{d\mathbf{u}}{dx}. \quad (7.2.15)$$

معادله (۷. ۲. ۵) را برای  $d\mathbf{u}/dx$  حل می کنیم و یک معادله مشابه برای  $d\mathbf{u}/dy$  بدست می آوریم و از معادله (۷. ۲. ۱۵) کمیت  $d^2\mathbf{u}/dx dy$  را محاسبه کرده و سرانجام مقادیر را در معادله (۷. ۲. ۱۳) جایگذاری می کنیم.

روش الحاقی با دیفرانسیل گیری از معادله (۷. ۲. ۸) نسبت به  $y$  شروع می گردد:

$$\frac{d^2g}{dx dy} = \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{d\mathbf{K}}{dx} \mathbf{u}\right) + \lambda^T \left(\frac{d^2\mathbf{f}}{dx dy} - \frac{d^2\mathbf{K}}{dx dy} \mathbf{u} - \frac{d\mathbf{K}}{dx} \frac{d\mathbf{u}}{dy}\right). \quad (7.2.16)$$

برای ارزیابی اولین جمله، از معادله (۷. ۲. ۷) نسبت به  $y$  مشتق می گیریم:

$$\mathbf{K} \frac{d\lambda}{dy} = \mathbf{R} \frac{d\mathbf{u}}{dy} - \frac{d\mathbf{K}}{dy} \lambda. \quad (7.2.17)$$

بخش ۷.۲: مشتقات حساسیت تغییر مکان ایستایی و قیود تنش ۳۵۳

با استفاده از معادلات (۷.۲.۵) و (۷.۲.۱۷)، معادله (۷.۲.۱۳) به شکل زیر درخواهد آمد:

$$\frac{d^2 g}{dx dy} = \left(\frac{du}{dy}\right)^T \mathbf{R} \frac{du}{dx} - \lambda^T \left( \frac{d\mathbf{K}}{dy} \frac{du}{dx} + \frac{d\mathbf{K}}{dx} \frac{du}{dy} - \frac{d^2 \mathbf{f}}{dx dy} + \frac{d^2 \mathbf{K}}{dx dy} \mathbf{u} \right). \quad (7.2.18)$$

در این حالت روش الحاقی همیشه کارآیی بیشتری از روش مستقیم دارد. فرض کنید  $n$  متغیر طراحی و  $m$  تابع قید داریم. روش مستقیم به کار محاسباتی زیادی برای  $n$  بار حل معادله (۷.۲.۵) و  $n(n+1)/2$  بار حل معادله (۷.۲.۱۵) نیاز دارد. از طرف دیگر روش الحاقی به  $n$  مرتبه حل معادله (۷.۲.۵) برای مشتقات اول و  $m$  مرتبه حل معادله (۷.۲.۷) برای بردارهای الحاقی نیاز دارد.

### ۷.۲.۳ روش نیمه تحلیلی

هر دو روش مستقیم و الحاقی، به مشتقات ماتریس سختی و بردارهای بار نسبت به متغیرهای طراحی نیاز دارند. محاسبه تحلیلی این مشتقات غالباً مشکل است، مخصوصاً برای متغیرهای طراحی شکلی که هندسه جزء را تغییر می دهند. به این دلیل، راهکار نیمه تحلیلی که در آن مشتقات ماتریس سختی و بردار بار با تفاضلهای محدود تقریب زده می شوند، شهرت پیدا کرده است. معمولاً این مشتقات با تقریب تفاضل پیش رو مرتبه اول محاسبه می شوند. بنابراین  $d\mathbf{K}/dx$  به صورت

$$\frac{d\mathbf{K}}{dx} \approx \frac{\mathbf{K}(x + \Delta x) - \mathbf{K}(x)}{\Delta x}. \quad (7.2.19)$$

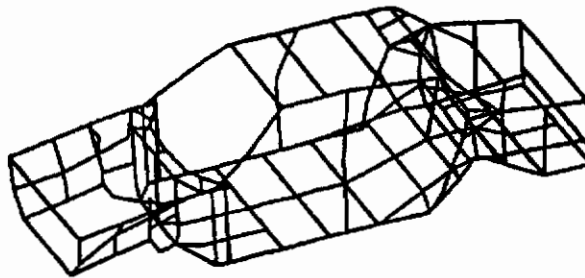
تقریب زده می شود.

با وجود این که کارآیی روش نیمه تحلیلی به اندازه روشهای تحلیلی مستقیم یا الحاقی است، اما چون به تقریبهای تفاضل محدود وابسته است ممکن است مشکل دقت داشته باشد. این مشکل دقت مخصوصاً برای مشتقات پاسخ سازه های تیر و صفحه نسبت به متغیرهای هندسی می تواند جدی باشد.

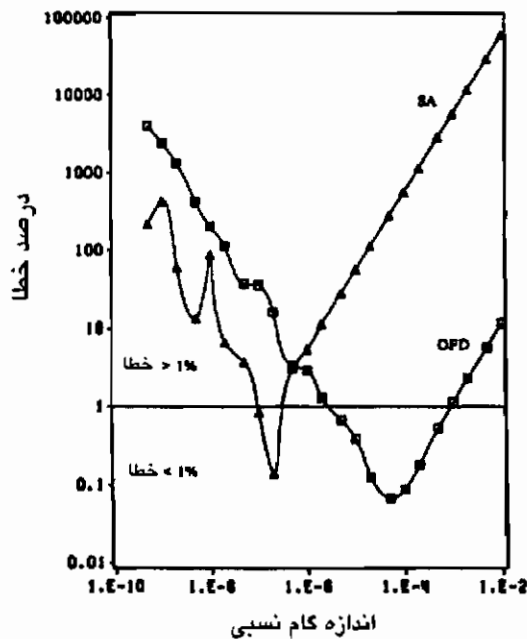
مشکل دقت اولین بار در مرجع [5] برای مدل اتومبیل نشان داده شده در شکل (۷.۲.۷) که از اجزای تیر ساخته شده است مشاهده شد. روش نیمه تحلیلی برای تمام سطح مقطعها و بیشتر متغیرهای طراحی هندسی با موفقیت استفاده شده بود. با وجود این برای بعضی از مشتقات نسبت به ابعاد طولی اتومبیل، مشکلات دقت جدی وجود داشت.

شکل (۷.۲.۳) وابستگی خطای نسبی مشتق انرژی کرنشی مدل نسبت به یک متغیر طول را در روش





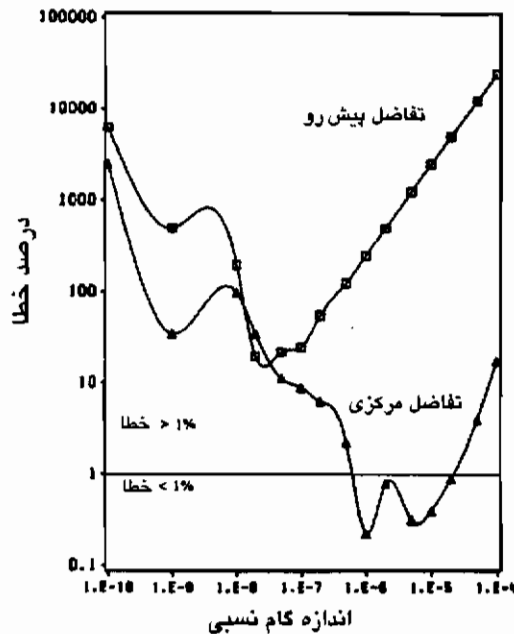
شکل ۷. ۲. ۲ مدل سرهم یک اتومبیل



شکل ۷. ۲. ۳ خطاها در مشتق انرژی کرنشی نسبت به یک متغیر طول مدل سرهم در روشهای تفاضل های محدود کلی (OFD) و نیمه تحلیلی (SA)

نیمه تحلیلی (SA) و راهکار تفاضل محدود کلی (OFD) نشان می دهد. برای اندازه های بزرگ گام، روش OFD خطای (اکثرأ خطای برش) کمتری از روش SA دارد. محدوده اندازه گام برای مشتق تقریبی که یک خطای کمتر از یک درصد دارد در OFD خیلی بزرگتر از تقریب SA است. برای اندازه های گام

بخش ۷.۲: مشتقات حساسیت تغییر مکان ایستایی و قیود تنش ۳۵۵

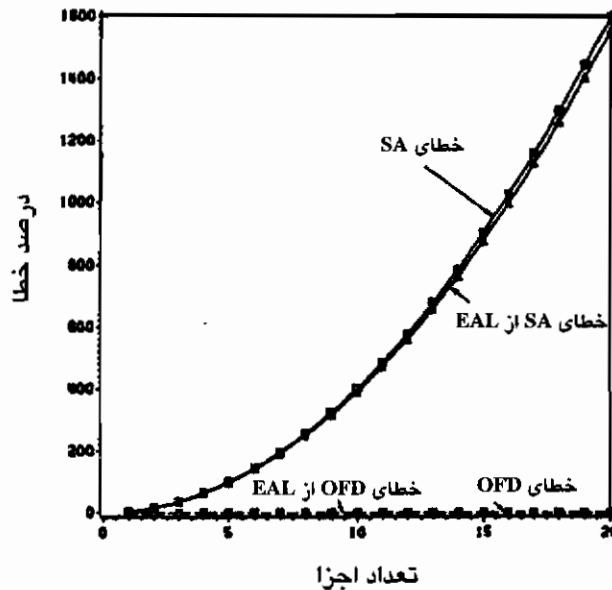


شکل ۷.۲.۳ تقریب تفاضل مرکزی و پیش رو SA برای مشتقات انرژی کرنشی نسبت به دومین متغیر طولی مدل اتومبیل

کوچک زوش OFD خطای (اکثر خطای شرطی) زیادتری از روش SA دارد. شکل (۷.۲.۳) نشان می‌دهد که برای یک اندازه گام نسبی  $10^{-7}$ ، روش SA مشتق را به خوبی تقریب می‌زند. با وجود این برای بعضی متغیرها، اندازه گامی که مشتقات دقیق را بدهد، وجود ندارد. برای حل مشکل دقت باید از تقریب تفاضل مرکزی در مشتق ماتریس سختی استفاده شود که هزینه محاسباتی را به میزان چشمگیری افزایش می‌دهد.

شکل (۷.۲.۴) تقریبهای تفاضل مرکزی و پیش رو مشتق نسبت به دومین متغیر طول را با هم مقایسه می‌کند. علت خطاهای زیاد برش مربوط به روش نیمه تحلیلی را می‌توانیم با توجه به معادله (۷.۲.۵) توضیح دهیم. سمت راست معادله که گاهی اوقات به آن نیروی کاذب می‌گویند، نیرویی است که باید برای تولید یک میدان تغییر مکان  $du/dx$  به سازه اعمال شود. برای سازه‌های تیر و صفحه، مشتق میدان تغییر مکان نسبت به متغیرهای هندسی غالباً یک میدان تغییر مکان قابل قبول نیست (برای مثال ممکن است فرض کیرشهف<sup>۱</sup> را نقض کند). تقریب اجزای محدود این میدان غیر قابل قبول، اگر چه بسیار غیر

<sup>1</sup> Kirchhoff



شکل ۷.۲.۵ خطاها در تقریبهایی نیمه تحلیلی (SA) و تفاضل محدود کلی (SA) مشتق تغییر مکان سر نسبت به طول تیر یکسر گیردار (اندازه گام یک درصد)

معمول است، خود یک تغییر مکان معتبر است که نیاز به مؤلفه های بزرگ خود لغو کننده در بار کاذب دارد. هنگامی که تقسیم در اجزای محدود بهبود یافت، بار کاذب مورد نیاز برای تولید  $du/dx$  به مؤلفه های بزرگتر خود لغو کننده نیاز دارد. بدین سان خطای به وجود آمده در بار کاذب به علت مشتق تفاضل محدود ماتریس سختی، می تواند بسیار بزرگ شود.

این پدیده در شکل (۷.۲.۵) تشریح شده که نشان می دهد خطا در مشتق تغییر مکان سر یک تیر یکسر گیردار نسبت به طول تیر با بهبود تقسیم بندی در جزء محدود به شکل فزاینده ای افزایش می یابد.

هنگامی که یک سازه تیر یا صفحه به وسیله اجزای عمومی تری مانند اجزای سه بعدی مدل شود، بهبود تقسیم بندی با مشکلی برخورد نمی کند. با وجود این هنگامی که تیر باریکتر یا صفحه نازکتر شود، میدان مشتق تغییر مکان بیشتر و بیشتر با هندسه ناسازگار می شود و مشکل دقت مشابهی در پی آن می آید. مرجع [6] برای تیرهایی که با اجزای خرابایی، تنش صفحه ای و اجزای جامد مدل شده اند و نسبت لاغری بزرگتر از ۱۰ دارند، خطای بزرگی را گزارش کرده است.

## مثال ۷.۲.۲

محاسبه مشتقات در مثال (۷.۲.۵) را برای مقایسه خطاهای مربوط به روشهای تفاضل محدود و نیمه تحلیلی تکرار می کنیم. با استفاده از تفاضل پیش رو داریم:

$$\frac{\partial g}{\partial I_1} \approx - \frac{w_{tip}(I_1 + \Delta I_1) - w_{tip}(I_1)}{\Delta I_1},$$

مقدار تقریبی خطای برش،  $e_T$ ، معادله (۷.۱.۴)، عبارت است از:

$$e_T = - \frac{\partial^2 w_{tip}}{\partial I_1^2} \frac{\Delta I_1}{2} = - \frac{p}{3EI_1^3} (l_1^3 + 3l_1^2 l_2 + 3l_1 l_2^2) \Delta I_1,$$

و خطای برش نسبی عبارت است از:

$$\frac{e_T}{\frac{\partial g}{\partial I_1}} = - \frac{\Delta I_1}{I_1},$$

بنابراین کافی است که  $\Delta I_1 / I_1 = 10^{-3}$  باشد تا یک خطای برش ناچیز داشته باشیم. بطور مشابه، مقدار تقریبی خطای برش برای مشتق نسبت به  $l_1$  عبارت است از:

$$e_T = - \frac{\partial^2 w_{tip}}{\partial l_1^2} \frac{\Delta l_1}{2} = - \frac{p}{EI_1} (l_1 + l_2) \Delta l_1,$$

$$\frac{e_T}{\frac{\partial g}{\partial l_1}} = \frac{\Delta l_1}{l_1 + l_2},$$

و کافی است اختلال در  $l_1$  را به میزان  $0.001 l_1$  در نظر بگیریم. تحلیل خطا در روش نیمه تحلیلی پیچیده تر است. مشتق نسبت به گشتاور ماند به صورت:

$$\frac{\partial g}{\partial I_1} \approx \lambda^T \frac{\mathbf{K}(I_1 + \Delta I_1) - \mathbf{K}(I_1)}{\Delta I_1} \mathbf{u},$$

تقریب زده می شود و خطای برش صفر می شود

$$e_T = \frac{\Delta I_1}{2} \lambda^T \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial I_1^2} \mathbf{u} = 0,$$

زیرا  $\mathbf{K}$  یک تابع خطی از  $I_1$  است. وضعیت خطای برش  $\partial g / \partial l_1$  زیاد خوب نیست. مقدار تقریبی این

خطا عبارت است از:

$$e_T = \frac{\Delta l_1}{2} \lambda^T \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial l_1^2} \mathbf{u} = \frac{p \Delta l_1}{E I_1 l_1} (3l_1^2 + 7l_1 l_2 + 4l_2^2),$$

بنابراین خطای نسبی عبارت است از:

$$\frac{e_T}{\frac{\partial q}{\partial l_1}} = - \frac{3l_1^2 + 7l_1 l_2 + 4l_2^2}{(l_1 + l_2)^2} \frac{\Delta l_1}{l_1}.$$

با مقایسه خطای نیمه تحلیلی با خطای به دست آمده در روش تفاضل محدود ملاحظه می شود زمانی که  $l_1 = l_2$  است خطای نیمه تحلیلی، هفت برابر بزرگتر است. در مرجع [7] نشان داده شده که این خطای بزرگتر در روش نیمه تحلیلی، با بهبود تقسیم بندی اجزا افزایش می یابد. • • •

#### ۷.۲.۴ تحلیل غیرخطی

در تحلیل غیر خطی، معادلات تعادل می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \mu \mathbf{p}(x), \quad (7.2.20)$$

که  $\mathbf{f}$  یک نیروی داخلی است که به وسیله تغییر شکل سازه تولید می شود و  $\mu \mathbf{p}$  بار خارجی اعمال شده است. عامل مقیاس بندی بار  $\mu$  در روند تحلیل غیر خطی برای دنبال کردن تکامل تدریجی حل در افزایش بار استفاده می شود. این عامل سودمند است زیرا معادلات تعادل ممکن است برای بارهای اعمالی مشابه، چندین حل داشته باشند. با افزایش تدریجی  $\mu$  مطمئن می شویم که حل مربوط به سازه ای است که از بار صفر بارگذاری شده است.

با دیفرانسیل گیری از معادله (7.2.20) نسبت به متغیر طراحی  $x$  داریم:

$$\mathbf{J} \frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mu \frac{d\mathbf{p}}{dx} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}, \quad (7.2.21)$$

که  $\mathbf{J}$  ژاکوبین  $\mathbf{f}$  در  $\mathbf{u}$  است.

$$J_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial u_i}, \quad (7.2.22)$$

که غالباً ماتریس سختی تانژانت نامیده می شود.

## بخش ۷.۲: مشتقات حساسیت تغییر مکان ایستایی و قیود تنش ۳۵۹

روش مستقیم برای به دست آوردن  $dg/dx$ ، حل معادله (۷.۲.۲۱) برای  $du/dx$  و جایگزینی آن در معادله (۷.۲.۳) است. ماتریس  $J$  غالباً از حل معادلات تعادل با استفاده از روش نیوتن در دسترس است. روش نیوتن بر اساس یک تقریب خطی معادلات تعادل حول یک جواب فرضی  $\bar{u}$  است.

$$f(\bar{u}, x) + J(\bar{u}, x)(u - \bar{u}) \approx \mu p(x). \quad (7.2.23)$$

اگر معادله (۷.۲.۲۳) برای  $u$  حل شود، برای  $u$  تقریب بهتری از  $\bar{u}$  می‌دهد. این تقریب جدید در تکرار بعدی جایگزین  $\bar{u}$  در معادله (۷.۲.۲۳) می‌شود. در تکرار جدید اگر  $J$  روزآمد شود، به آن روش نیوتن و اگر مقدار قدیمی آن استفاده شود به آن روش نیوتن تغییر یافته می‌گویند. این تکرار تا زمانی که با یک دقت مطلوب همگرا شود ادامه می‌یابد. اگر آخرین تکرار  $\bar{u}$  به اندازه کافی به  $u$  نزدیک باشد  $J$  محاسبه شده می‌تواند برای محاسبه مشتق  $u$  به کار رود.

راهکار الحاقی خیلی شبیه به روش استفاده شده در حالت خطی می‌باشد. بردار الحاقی  $\lambda$  جواب معادله

$$J^T \lambda = z, \quad (7.2.24)$$

می‌باشد که  $z$  بار دیگر بردار مشتقات قید نسبت به مؤلفه های تغییر مکان  $z_i = \partial g / \partial u_i$  است. به راحتی می‌توان رابطه زیر را به دست آورد.

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \lambda^T \left( \mu \frac{dp}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} \right). \quad (7.2.25)$$

## ۷.۲.۵ حساسیت بارهای حدی

در یک نقطه بحرانی با مقدار نیروی  $\mu^*$ ، ماتریس سختی مماسی  $J$  منفرد می‌شود و مایک بار حدی و یا یک نقطه دو شاخه داریم. با دیفرانسیل گیری از معادله (۷.۲.۲۰) نسبت به یک پارامتر بارگذاری که تاریخچه بارگذاری آن دارای افزایشی یکنواست می‌توانیم این دو را از هم تشخیص دهیم. پارامتر بار  $\mu$  یک انتخاب خوبی نیست، زیرا در یک نقطه حدی به یک ماکزیمم می‌رسد و یکنوا نیست. به جای آن ما غالباً از یک مؤلفه تغییر مکان که افزایش آن یکنواست و یا از طول کمان در فضای  $(u, \mu)$  استفاده می‌کنیم.

۳۶۰ میانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

چنین پارامتر بار یکنوا را با  $\alpha$  و مشتق نسبت به  $\alpha$  را با  $\mu$  نمایش می دهیم. با مشتق گیری از معادله (۷.۲.۲۰) نسبت به  $\alpha$  داریم:

$$\mathbf{J}\mathbf{u}' = \mu'\mathbf{p}. \quad (7.2.26)$$

در نقطه بحرانی  $\mathbf{J}$  منفرد است و بردار ویژه طرف چپ که مربوط به مقدار ویژه صفر  $\mathbf{J}$  است را با  $\mathbf{v}$  نمایش می دهیم یعنی

$$\mathbf{v}^T \mathbf{J}^* = 0, \quad (7.2.27)$$

که نماد ستاره بیانگر ارزیابی کمیتها در نقطه بحرانی است. با پیش ضرب کردن معادله (۷.۲.۲۶) در  $\mathbf{v}^T$  داریم:

$$\mu' \mathbf{v}^T \mathbf{p} = 0. \quad (7.2.28)$$

در یک نقطه حدی این معادله برآورده می شود زیرا بار به یک ماکزیمم می رسد و آن گاه  $\mu' = 0$  است. در آن حالت، معادله (۷.۲.۲۶) نشان می دهد مد کمانش که بردار ویژه ماتریس سختی مماسی  $\mathbf{J}$  است برابر مشتق  $\mu$  نسبت به پارامتر بار گذاری است. در یک نقطه دو شاخه  $\mu' \neq 0$  و داریم

$$\mathbf{v}^T \mathbf{p} = 0. \quad (7.2.29)$$

برای یک ماتریس سختی مماسی متقارن،  $\mathbf{v}$  مد کمانش نیز هست و معادله (۷.۲.۲۹) نشان می دهد که مد کمانش بر بردار بار عمود است.

برای محاسبه حساسیت بارهای حدی باید پارامتر مسیر پاسخ کلی تر  $\nu$  را در نظر بگیریم که می تواند یک پارامتر بار، یک متغیر طراحی یا ترکیبی از هر دو (پارامتری که هم طراحی سازه و هم بارگذاری را همزمان کنترل کند) باشد. مشتق گیری نسبت به  $\nu$  را با نقطه نمایش می دهیم و از معادله (۷.۲.۲۰) نسبت به  $\nu$  مشتق بگیریم، داریم

$$\mathbf{J}\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \dot{x} = \mu \mathbf{p} + \mu \frac{d\mathbf{p}}{dx} \dot{x}. \quad (7.2.30)$$

بخش ۷.۳: محاسبات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه ۳۶۱

اکنون پارامتری مانند  $v$  می‌خواهیم که متغیر طراحی  $x$  و پارامتر بار  $\mu$  را کنترل کند آن چنان که در یک بار حدی باقی بمانیم،  $\mu^* = \mu$ . با انتخاب  $v = x$ ، معادله (۷.۲.۳۰) عبارت خواهد بود از:

$$J^* \dot{u} + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^* = \frac{d\mu^*}{dx} p + \mu^* \frac{dp}{dx}, \quad (7.2.31)$$

که در آن از این واقعیت که با توجه به نوع انتخاب‌ها در مسأله  $\dot{x} = 1$  است استفاده کرده ایم. با پیش ضرب معادله (۷.۲.۳۱) با بردار ویژه طرف چپ،  $v^T$  و مرتب کردن دوباره معادله داریم:

$$\frac{d\mu^*}{dx} = \frac{v^T \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^* - \mu^* \frac{dp}{dx} \right]}{v^T p}. \quad (7.2.32)$$

مقدار داخل پرانتزها، در صورت کسر معادله (۷.۲.۳۲)، مشتق باقیمانده معادلات تعادل در نقطه حدی است. بنابراین می‌توانیم از روش نیمه تحلیلی برای ارزیابی حساسیت بار حدی استفاده کنیم، یعنی: در متغیر طراحی اختلال ایجاد کرده، تغییر در باقیمانده (برای تغییر مکانهای ثابت) را محاسبه می‌کنیم و آن را با مدکمانش ضرب داخلی می‌کنیم تا صورت کسر به دست آید. مخرج کسر، ضرب داخلی حد کمانش در بردار بار است.

### ۷.۳ محاسبات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه

در تحلیل ارتعاشات و پایداری سازه‌ها معمولاً با مسائل مقدار ویژه مواجه می‌شویم. هنگامی که نیروها پایستارند و هیچ استهلاکی در نظر گرفته نشود، این مسائل به مقادیر ویژه حقیقی می‌انجامند که نمایانگر بارهای کمانش یا بسامدهای ارتعاشی اند. در حالت کلی تر مقادیر ویژه مختلطند. بحث ما با حالت ساده تر مقادیر ویژه حقیقی آغاز می‌شود.

#### ۷.۳.۱ مشتقات حساسیت قیود کمانشی و ارتعاشی

تحلیل ارتعاشات غیر مستهلک شونده و کمانش خطی به مسائل مقدار ویژه از نوع زیر می‌انجامد:

$$Ku - \mu Mu = 0, \quad (7.3.1)$$

که  $K$  ماتریس سختی،  $M$  ماتریس جرم (ارتعاشات) یا ماتریس سختی هندسی (کمانش) و  $u$  شکل مود



۳۶۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

می باشد. برای مسائل ارتعاشات  $\mu$  مربع بسامد ارتعاش آزاد و برای مسائل کماتش ضریب بار است.  $K$  و  $M$  هر دو متقارنند و  $K$  نیمه معین مثبت است. شکل مود غالباً با یک ماتریس معین مثبت متقارن  $W$  نرمال سازی می شود به شکلی که داریم:

$$u^T W u = 1, \quad (7.3.2)$$

که برای مسائل ارتعاشات  $W$  غالباً ماتریس جرم  $M$  است. معادلات (۷.۳.۱) و (۷.۳.۲) برای تمام جفت‌های ویژه  $(\mu_k, u^k)$  برقرار است. با مشتق گیری از این معادلات نسبت به متغیر طراحی  $x$  داریم:

$$(K - \mu M) \frac{du}{dx} - \frac{d\mu}{dx} M u = - \left( \frac{dK}{dx} - \mu \frac{dM}{dx} \right) u, \quad (7.3.3)$$

و

$$u^T W \frac{du}{dx} = - \frac{1}{2} u^T \frac{dW}{dx} u, \quad (7.3.4)$$

که از تقارن ماتریس  $W$  استفاده کرده ایم. معادلات (۷.۳.۳) و (۷.۳.۴) فقط برای حالت مقادیر ویژه مجزا صحیح است (مقادیر ویژه تکراری در حالت کلی مشتق پذیر نیستند و فقط ممکن است مشتقات سوپی آن‌ها را به دست آورد (مرجع هاگ<sup>۱</sup> و دیگران [8] را ببینید). در اکثر کاربردها تنها مشتقات مقادیر ویژه برای ما مهمند. این مشتقات با پیش ضرب معادله (۷.۳.۳) در  $u^T$  به دست می آید:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{u^T \left( \frac{dK}{dx} - \mu \frac{dM}{dx} \right) u}{u^T M u}. \quad (7.3.5)$$

در بعضی کاربردها مشتقات بردارهای ویژه نیز مورد نیازند. به عنوان مثال در طراحی اتومبیل اغلب لازم است مودهای بحرانی ارتعاش در صندلیهای جلو، دامنه پایینی داشته باشند. برای این مشکل طراحی نیاز به مشتقات شکل مود داریم. برای بدست آوردن مشتقات بردار ویژه می توانیم از راهکار مستقیم استفاده کرده و معادلات (۷.۳.۳) و (۷.۳.۴) را به صورت زیر ترکیب کنیم:

$$\begin{bmatrix} K - \mu M & -Mu \\ -u^T W & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{d\mu}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \left( \frac{dK}{dx} - \mu \frac{dM}{dx} \right) u \\ \frac{1}{2} u^T \frac{dW}{dx} u \end{Bmatrix}. \quad (7.3.6)$$

## بخش ۷.۳: محاسبات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه ۳۶۳

دستگاه (۷.۳.۶) را برای مشتقات مقدار ویژه و بردار ویژه می‌توان حل کرد. در روند حل باید دقت داشت زیرا اکهاد اصلی  $\mathbf{K} - \mu \mathbf{M}$  منفرد است. کاردانی و مانتی‌گازا<sup>۱</sup> [9] و مورثی و هفتکه<sup>۲</sup> [10] بر روی چندین راهبرد حل این مشکل بحث کرده‌اند.

یکی از روشهای مشهورتر حل، روش نلسون<sup>۳</sup> [11] است. روش نلسون شرط نرمال سازی معادله (۷.۳.۲) را با این الزام که بزرگترین مؤلفه بردار ویژه باید برابر یک باشد، موقتاً جایگزین می‌کند. اگر بردار دوباره نرمال شده را با  $\bar{\mathbf{u}}$  نمایش داده و فرض کنیم که بزرگترین مؤلفه آن، مؤلفه  $m$ ام آن است، معادله (۷.۳.۲) را با

$$\bar{u}_m = 1, \quad (7.3.7)$$

و معادله (۷.۳.۴) را با

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}_m}{dx} = 0. \quad (7.3.8)$$

جایگزین می‌کنیم. معادله (۷.۳.۳) با جایگزین کردن  $\bar{\mathbf{u}}$  به جای  $\mathbf{u}$  به کار می‌رود، ولی معادله (۷.۳.۸) برای کاهش درجه آن با حذف سطر و ستون  $m$ ام آن به کار می‌رود. هنگامی که مقدار ویژه  $\mu$  مجزاست، سیستم کاهش یافته منفرد نیست و با شیوه‌های استاندارد حل می‌شود. برای بازیابی مشتق بردار ویژه با نرمال سازی اصلی معادله (۷.۳.۲)، توجه داریم که  $\mathbf{u} = u_m \bar{\mathbf{u}}$  و بنابراین:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \frac{du_m}{dx} \bar{\mathbf{u}} + u_m \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dx}, \quad (7.3.9)$$

برای یافتن  $du_m/dx$  با جایگزین کردن معادله (۷.۳.۹) در معادله (۷.۳.۴) خواهیم داشت:

$$\frac{du_m}{dx} = -\mathbf{u}_m^T \mathbf{u}^T \mathbf{W} \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dx} - \frac{u_m}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{W}}{dx} \mathbf{u}. \quad (7.3.10)$$

همچنین می‌توانیم برای محاسبه مشتقات بردار ویژه با بسط مشتق آنها به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای ویژه، از روش الحاقی یا روش مقید مودال استفاده کنیم. با نمایش  $i$ امین جفت ویژه معادله (۷.۳.۱) با  $(\mu_i, \mathbf{u}^i)$  فرض می‌کنیم که:

$$\frac{d\mathbf{u}^k}{dx} = \sum_{j=1}^l c_{kj} \mathbf{u}^j, \quad (7.3.11)$$

۳۶۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

و ضرایب  $c_{kj}$  را می توان به صورت زیر نمایش داد (به عنوان نمونه به مرجع راجرز<sup>۱</sup> [12] مراجعه کنید).

$$c_{kj} = \frac{\mathbf{u}^{jT} \left( \frac{d\mathbf{K}}{dx} - \mu_k \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \mathbf{u}_j^k}{(\mu_k - \mu_j) \mathbf{u}^{jT} \mathbf{M} \mathbf{u}^j}, \quad k \neq j. \quad (7.3.12)$$

با استفاده از شرط نرمال سازی معادله (۷.۳.۷) داریم:

$$c_{kk} = - \sum_{j \neq k} c_{kj} u_m^j. \quad (7.3.13)$$

از سوی دیگر، اگر از شرط نرمال سازی معادله (۷.۳.۲) با  $\mathbf{W} = \mathbf{M}$  استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$c_{kk} = - \frac{1}{2} (\mathbf{u}^k)^T \frac{d\mathbf{M}}{dx} \mathbf{u}^k. \quad (7.3.14)$$

اگر تمامی بردارهای ویژه در رابطه جمع وارد شود، معادله (۷.۳.۱۱) دقیق است. برای اکثر مسائل، محاسبه تمام بردارهای ویژه عملی نیست، بنابراین فقط تعداد کمی از بردارهای ویژه مربوط به پایین ترین مقادیر ویژه در جمع وارد می شوند. ونگ<sup>۲</sup> [13] یک روش مودال بهبود یافته را که به همگرایی شتاب می بخشد ارائه داد. به جای معادله (۷.۳.۱۱) از

$$\frac{d\mathbf{u}^k}{dx} = \mathbf{u}_s^k + \sum_{j=1}^l d_{kj} \mathbf{u}^j, \quad (7.3.15)$$

استفاده می کنیم که

$$\mathbf{u}_s^k = \mathbf{K}^{-1} \left[ \frac{d\mu}{dx} \mathbf{M} - \frac{d\mathbf{K}}{dx} + \mu \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right] \mathbf{u}^k \quad (7.3.16)$$

یک جمله تصحیح ایستایی می باشد و

$$d_{kj} = \mu_k \frac{\mathbf{u}^{jT} \left( \frac{d\mathbf{K}}{dx} - \mu_k \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \mathbf{u}^k}{\mu_j (\mu_k - \mu_j) \mathbf{u}^{jT} \mathbf{M} \mathbf{u}^j}, \quad k \neq j. \quad (7.3.17)$$

ضریب  $d_{kk}$  از معادله (۷.۳.۱۴) برای شرط نرمال سازی  $\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} = 1$  به دست می آید. برای شرط نرمال سازی (۷.۳.۷):

$$d_{kk} = -u_{sm}^k - \sum_{j \neq k} d_{kj} u_m^j. \quad (7.3.18)$$

1) Regers

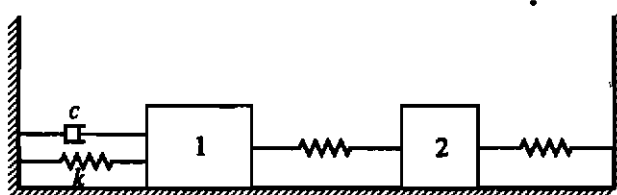
2) Wang

بخش ۷.۳: محاسبات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه ۳۶۵

ساتر<sup>۱</sup> و دیگران [12] همگرایی مشتق با افزایش تعداد مودها را با استفاده از دو روش مودال و مودال بهبود یافته مطالعه کرده اند و بهبود همگرایی در روش مودال بهبود یافته را اثبات کرده اند.

### مثال ۷.۳.۱

سیستم جرم-فنر مستهلک کننده، نشان داده شده در شکل (۷.۳.۱) برای حالتی که مستهلک کننده غیر فعال است،  $c = 0$ ، تحلیل می گردد. در ابتدا هر دو جرم و هر سه فنر مقادیر یک دارند و می خواهیم مشتقات پایین ترین بسامد ارتعاشات و پایین ترین مود ارتعاش نسبت به  $k$  برای دو شرط نرمال سازی ممکن را محاسبه کنیم: یکی به شکل معادله (۷.۳.۲) با  $\mathbf{W} = \mathbf{M}$  و دیگری به شکل معادله (۷.۳.۷) با قرار دادن دومین مؤلفه مود آن برابر یک.



شکل ۷.۳.۱ مثال فنر-جرم-مستهلک کننده برای مشتقات مقدار ویژه

حرکت جرمها را با  $u_1$  و  $u_2$  نمایش می دهیم و انرژی ارتجاعی  $E$  و انرژی جنبشی  $T$  را به صورت زیر می یابیم

$$E = 0.5[ku_1^2 + (u_2 - u_1)^2 + u_2^2], \quad T = 0.5(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2).$$

که از آن ماتریس جرم و ماتریس سختی به صورت

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1+k & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

به دست می آید. برای  $k = 1$  مسأله مقدار ویژه معادله (۷.۳.۱) عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 2-\omega^2 & -1 \\ -1 & 2-\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0. \quad (a)$$

۳۶۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسته)

با صفر قرار دادن مقدار دترمینان دستگاه، دو بسامد  $\omega_1 = 1$  و  $\omega_2 = \sqrt{3}$  را به دست می آوریم. با جایگزین کردن کوچکترین بسامد در معادله (الف) برای اولین مود ارتعاش داریم:

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= 0, \\ -u_1 + u_2 &= 0. \end{aligned}$$

همان طوری که انتظار داشتیم سیستم در یک بسامد طبیعی منفرد است، بنابراین برای مشخص کردن بردار ویژه نیاز به شرط نرمال سازی داریم. برای شرط نرمال سازی (۷.۳.۲) معادله دیگر عبارت است از:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 = 1.$$

برای شرط نرمال سازی معادله (۷.۳.۷) شرط عبارت است از:

$$\bar{u}_2 = 1,$$

که از نماد خط برای نمایش مود ارتعاش با دومین شرط نرمال سازی استفاده می کنیم. با شرایط نرمال سازی، جوابها عبارتند از:

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

سپس مشتق پایین ترین بسامد را از معادله (۷.۳.۵) محاسبه می کنیم که از علامت پریم برای نشان دادن مشتق نسبت به  $k$  استفاده شده است. برای این مثال:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}' = \mathbf{0}.$$

از مود نرمال سازی شده به وسیله ماتریس جرم معادله (۷.۳.۵) استفاده می کنیم؛ بنابراین مخرج کسر برابر یک است و آن گاه

$$\mu' = (\omega^2)' = \mathbf{u}^T \mathbf{K}' \mathbf{u} = 0.5.$$

همچنین می توانیم مشتق بسامد و مود را با استفاده از معادله (۷.۳.۶) به دست آوریم. توجه داریم که:

$$\mathbf{K} - \mu \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{W} \mathbf{u} = \mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

بخش ۷.۳: محاسبات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه ۳۶۷

$$-(\mathbf{K}' - \mu \mathbf{M}')\mathbf{u} = -\mathbf{K}'\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{W}' \mathbf{u} = 0.$$

سپس معادله (۷.۳.۶) عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2}/2 \\ -1 & 1 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \mu' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

با حل این معادله خواهیم داشت:

$$u'_1 = -\sqrt{2}/8, \quad u'_2 = \sqrt{2}/8, \quad \mu' = 1/2.$$

به منظور به دست آوردن  $\bar{\mathbf{u}}'$  از معادله (۷.۳.۳) و با شرط اضافی  $\bar{u}'_2 = 0$ ، نیاز به ارزیابی عبارتهای زیر

داریم:

$$\mu' \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}} = 0.5 \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{Bmatrix}, \quad -(\mathbf{K}' - \mu \mathbf{M}') \bar{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}' \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

سپس با جایگزین کردن  $\bar{\mathbf{u}}$  به جای  $\mathbf{u}$  در معادله (۷.۳.۳) و شرط دیگر داریم:

$$\begin{aligned} \bar{u}'_1 - \bar{u}'_2 &= -0.5, \\ -\bar{u}'_1 + \bar{u}'_2 &= 0.5, \\ \bar{u}'_2 &= 0. \end{aligned}$$

جوابها عبارتند از:

$$\bar{u}'_1 = -0.5, \quad \bar{u}'_2 = 0.$$

می توانستیم  $\mathbf{u}$  را با استفاده از معادلات (۷.۳.۹) و (۷.۳.۱۰) از  $\bar{\mathbf{u}}'$  به دست آوریم. معادله

(۷.۳.۱۰) به شکل زیر در خواهد آمد

$$u'_2 = -\mathbf{u}_2^T \mathbf{u}' = -0.5(\sqrt{2}/2) \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \sqrt{2}/8,$$

که با نتیجه قبلی تطبیق می کند. معادله (۷.۳.۹) به شکل زیر خواهد شد:

$$\mathbf{u}' = (\sqrt{2}/8)\bar{\mathbf{u}} + (\sqrt{2}/2)\bar{\mathbf{u}}' = \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

که این نیز با نتیجه قبلی یکی است. • • •

هنگامی که مقدار ویژه  $\mu$  با کثرت  $m$  تکرار می شود،  $m$  بردار ویژه مستقل خطی مربوط به آن وجود خواهد داشت. افزون بر این هر ترکیب خطی از بردارهای ویژه نیز یک بردار ویژه است؛ بنابراین انتخاب بردارهای ویژه منحصر به فرد نیست. در این حالت بردارهای ویژه که از یک برنامه تحلیل سازه ها به دست می آیند با روند محاسباتی که برای حل مسأله ویژه استفاده می شود مشخص خواهند شد. فرض کنید که  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^m$  یک مجموعه مقادیر ویژه مستقل خطی مربوط به  $\mu$  می باشد. هر بردار ویژه مربوط به  $\mu$  را می توان به صورت

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m q_i \mathbf{u}^i = \mathbf{U} \mathbf{q}, \quad (7.3.19)$$

نوشت که  $\mathbf{q}$  بردار ضرایب و  $\mathbf{U}$  یک ماتریس با ستونهای مساوی  $\mathbf{u}^i$ ,  $i = 1, \dots, m$  است. هنگامی که متغیر طراحی  $x$  تغییر می کند مقادیر ویژه معمولاً جدا شده و بردارهای ویژه دوباره منحصر به فرد می شوند. این بردارهای ویژه را با جایگزینی معادله (7.3.19) در معادله (7.3.3) و پیش ضرب کردن در  $\mathbf{U}^T$  بدست می آوریم:

$$\left(\mathbf{A} - \frac{d\mu}{dx} \mathbf{B}\right) \mathbf{q} = 0, \quad (7.3.20)$$

که:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \left( \frac{d\mathbf{K}}{dx} - \mu \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \mathbf{U}, \quad (7.3.21)$$

و

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}. \quad (7.3.22)$$

معادله (7.3.20) یک مسأله مقدار ویژه  $m \times m$  برای  $d\mu/dx$  است.  $m$  جواب مربوط به مشتقات  $m$  مقدار ویژه است که با تغییر  $x$  از  $\mu$  به دست می آید و بردارهای ویژه  $\mathbf{q}$ ، از معادله (7.3.19)،

بخش ۷.۳: محاسبات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه ۳۶۹

بردارهای ویژه مربوط به مقادیر ویژه اختلال یافته را می دهد. عمومی سازی روش نلسون برای یافتن مشتقات بردارهای ویژه توسط اجالو<sup>۱</sup> [15] پیشنهاد و به وسیله میلز- کران<sup>۲</sup> [16] و دیلی<sup>۳</sup> [17] اصلاح شده است. به نظر می رسد که روش آنها با ادعای قبلی که مقادیر ویژه تکراری مشتق پذیر نیستند در تناقض است. با وجود این هنگامی که می توانیم مشتقات نسبت به هر متغیر را جداگانه بیابیم، این مشتقات به خوبی مشتقات سوئی اند که در آنها مشتقات نسبت به  $x$  و  $y$  نمی توانند به صورت خطی ترکیب شوند. یعنی:

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x} dx + \frac{\partial \mu}{\partial y} dy \quad (7.3.23)$$

در حالت کلی به این صورت نمی ماند. این در مثال زیر نشان داده خواهد شد.

#### مثال ۷.۳.۲

یک سیستم ساده دو متغیره را در نظر بگیرید

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2+y & x \\ x & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{M} = \mathbf{I}.$$

دو مقدار ویژه آن عبارتند از:

$$\mu_{1,2} = 2 + y/2 \pm \sqrt{x^2 + y^2/4}. \quad (\text{الف})$$

دو مقدار ویژه برای  $x = y = 0$  با هم مساویند و در ابتدا مشخص می کنند که بردارهای ویژه در مبدأ، ناپیوسته اند. در حقیقت برای  $x = 0$  دو بردار ویژه عبارتند از:

$$\mathbf{u}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

و برای  $y = 0$

$$\mathbf{u}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$



۳۷۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

بدیهی است که می توانیم هر مجموعه بردارهای ویژه را با نزدیک شدن به آن در طول محور  $x$  یا  $y$  به مبدأ نزدیک کنیم.

آن گاه مشتقات دو مقدار ویژه نسبت به  $x$  و  $y$  را در مبدأ محاسبه می کنیم. در نقطه  $(0,0)$ ، هر برداری یک بردار ویژه است و ما دو برداریکه مختصات را به عنوان مبنا انتخاب می کنیم، یعنی:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

در ابتدا مشتقات را نسبت به  $x$  محاسبه می کنیم و با استفاده از  $(7.3.21)$  و  $(7.3.22)$  داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

جواب مسأله مقدار ویژه معادله  $(7.3.20)$  عبارت است از:

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)_1 = 1, \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)_2 = -1,$$

و بردارهای ویژه مربوط به آن عبارتند از:

$$q^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad q^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix},$$

و چون  $U$  ماتریس واحد است از معادله  $(7.3.19)$ ،  $u^i = q^i$ . بررسی این که اینها در واقع بردارهای ویژه در طول محور  $y$ ، یعنی  $(x, 0)$  هستند ساده است. به طور مشابه برای مشتقات نسبت به  $y$  داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

و دو مقدار ویژه معادله  $(7.3.20)$  عبارتند از:

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)_1 = 1, \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)_2 = 0.$$

و بردارهای ویژه آنها عبارتند از:

$$q^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

بخش ۷.۳: محاسبات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه ۳۷۱

$$q^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

برای دیدن این که مشتقات فوق را برای محاسبه تغییر در  $\mu$  به علت تغییر همزمان در  $x$  و  $y$  نمی توان به کار برد، یک تغییر بی نهایت کوچک  $dy = 2dx = 2dt$  را در نظر بگیرید. از حل دو مقدار ویژه معادله (الف) داریم:

$$d\mu = dt \pm \sqrt{2}dt.$$

از طرف دیگر بسته به این که برای مشتقات  $x$  و  $y$  کدام یک از دو مقدار را استفاده کنیم، معادله (۷.۳.۱۹) چهار مقدار می دهد آنها عبارتند از:  $dt$ ،  $3dt$ ،  $dt$  و  $-dt$ . . . .

ناتوانی محاسبه یک مشتق در یک جهت دلخواه از مشتقات در جهات محورهای مختصات کاملاً جدی است. اکثر الگوریتمهای بهینه سازی برای انتخاب جهات حرکت یا تخمین تابع هدف و قیود بر اساس این محاسبات استوارند. بنابراین برای مسائلی با مقادیر ویژه تکراری، این الگوریتمها می توانند مشکلات جدی بیافرینند. خوشبختانه تجربه محاسباتی نشان می دهد که حتی یک اختلاف جزئی بین مقادیر ویژه، غالباً برای جلوگیری از این مشکلات کافی است. افزون بر این، یکی شدن مقادیر ویژه غالباً اثری نامطلوب بر روی رفتار سازه دارد. در مسائل کماتش، این مسأله حاکی از نقص حساسیت است و در مسائل کنترل سازه ها، یکی شدن بسامدهای ارتعاش می تواند مشکلاتی در کنترل سازه به وجود آورد. بنابراین در مسائل طراحی، غالباً برای جداسازی مقادیر ویژه از هم قیودی در نظر گرفته می شود.

## ۷.۳.۲ مشتقات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه غیرهرمیتی<sup>۱</sup>

هنگامی که استهلاك سازه ها مهم باشد، یا استهلاك به وسیله نیروهای آئرو دینامیک یا سیستمهای کنترل فعال تأمین شود، در مورد حرکت میرای  $\bar{u}$ ، معادله زیر صادق است:

$$M\ddot{\bar{u}} + C\dot{\bar{u}} + K\bar{u} = 0, \quad (7.3.24)$$

که  $C$  ماتریس استهلاك است و فرض می شود متقارن است و علامت نقطه بیانگر مشتق گیری نسبت به

1) Hermitian

۳۷۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

زمان است. با فرض

$$\bar{u} = ue^{\mu t}, \quad (۷.۳.۲۵)$$

داریم:

$$[\mu^2 M + \mu C + K]u = 0. \quad (۷.۳.۲۶)$$

توجه داشته باشید که مقدار ویژه  $\mu$  را آن گونه که برای مسائل ارتعاشات نامیرا بیان کردیم، تعریف نمی کنیم. آن جا  $\mu$  مربع بسامد بود در حالی که این جا هنگامی که  $C = 0$  است، خواهیم داشت  $\mu = i\omega$  که  $\omega$  بسامد ارتعاش است. مشتق مقدار ویژه  $\mu$  نسبت به یک متغیر طراحی  $x$  با مشتق گیری از معادله (۷.۳.۲۶) نسبت به  $x$  و پیش ضرب کردن آن با  $u^T$  به دست می آید.

$$\frac{d\mu}{dx} = - \frac{\mu^2 u^T \frac{dM}{dx} u + \mu u^T \frac{dC}{dx} u + u^T \frac{dK}{dx} u}{2\mu u^T M u + u^T C u}. \quad (۷.۳.۲۷)$$

این معادله می تواند برای تخمین اثر اضافه کردن مقدار کمی استهلاک به یک سیستم نامیرا به کار رود. برای یک سیستم نامیرا  $C = 0$  و مقدار ویژه  $\mu = i\omega$  است و بردار ویژه، مواد ارتعاش می باشد که در این جا آن را با  $\phi$  نمایش می دهیم تا از مود میرای  $u$  متمایز گردد. حال معادله (۷.۳.۲۷) به شکل زیر در می آید:

$$\frac{d\mu}{dx} = - \frac{\phi^T \frac{dC}{dx} \phi}{2\phi^T M \phi}. \quad (۷.۳.۲۸)$$

### مثال ۷.۳.۳

با استفاده از برون یابی خطی، اثر مستهلاک کننده شکل (۷.۳.۱) را بر روی اولین مود ارتعاش تخمین بزنید و سپس آن را با اثر دقیق برای  $c = 0.2$  و  $c = 1.0$  مقایسه کنید.

برای این مثال  $x = c$  قرار می دهیم و سپس: (با استفاده از  $K$  و  $M$  مثال ۷.۳.۱)

$$C = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{dM}{dx} = \frac{dK}{dx} = 0, \quad \frac{dC}{dx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بخش ۷.۳: محاسبات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه ۳۷۳

با استفاده از اولین مود ارتعاش از مثال ۷.۳.۱ که آن چنان نرمال شده که مخرج معادله (۷.۳.۲۸) برابر یک است،  $(\phi^1)^T = (\sqrt{2}/2)[1, 1]$  خواهیم داشت:

$$\frac{d\mu}{dc} \equiv \frac{d\mu}{dx} = -0.5\phi^T \frac{dC}{dx} \phi = -0.25.$$

از مثال ۷.۳.۱، فرکانس اولین مود طبیعی  $\omega_1 = 1$  است (که در نمادگذاری این قسمت، مربوط به  $\mu = i$  می شود، سپس با استفاده از برون یابی خطی برای محاسبه مقدار ویژه تقریبی  $\mu_a$  داریم

$$\mu_a = \mu \Big|_{c=0} + \frac{d\mu}{dc} c = -0.25c + i.$$

برای دو مقدار داده شده  $c = 0.2$  و  $c = 1.0$  مقادیر ویژه تقریبی به ترتیب عبارتند از:  $i - 0.05$  و  $i - 0.25$ . این نتیجه های تقریبی را با نتیجه های دقیق که از حل معادله (۷.۳.۲۶) به دست می آید مقایسه می کنیم

$$\begin{bmatrix} \mu^2 + c\mu + 2 & -1 \\ -1 & \mu^2 + 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0. \quad (\text{الف})$$

مقدار ویژه  $\mu$  با صفر قرار دادن دترمینان این معادله به دست می آید. برای دو مقدار داده شده  $c$  خواهیم داشت:

$$c = 0.2: \quad \mu = -0.05025 + 1.0013i.$$

$$c = 1.0: \quad \mu = -0.29178 + 1.0326i.$$

مشاهده می شود که پیش بینی این که  $c$  فقط استهلاك را تغییر می دهد؛ نه بسامد را کاملاً صحیح است و این که برون یابی خطی برای پیشگویی استهلاك کاملاً خوب عمل می کند. ...

مرتبه مسائل ویژه میرا عموماً با تقریب مود استهلاك به صورت یک ترکیب خطی از یک تعداد کمی از مدهای طبیعی ارتعاش  $u^i, i = 1, \dots, m$  کاهش می یابد. این موضوع می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$u = Uq, \quad (7.3.29)$$

که  $U$  یک ماتریس با ستونهای  $u^i$  است و  $q$  بردار دامنه های مود است. با جایگزین کردن معادله

۳۷۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

(۷.۳.۲۹) در معادله (۷.۳.۲۶) و با پیش ضرب کردن  $u^T$  داریم:

$$[\mu^2 M_R + \mu C_R + K_R]q = 0, \quad (7.3.30)$$

که

$$M_R = U^T M U, \quad C_R = U^T C U, \quad K_R = U^T K U. \quad (7.3.31)$$

پس از این که معادله (۷.۳.۳۰) را برای بردار ویژه کاهش یافته  $q$  حل کردیم، می توانیم مشتقات مقدار ویژه را با استفاده از دو راهکار محاسبه کنیم. اولین رویکرد که رویکرد مود ثابت نامیده می شود، معادله (۷.۳.۲۷) را با  $\mu$  محاسبه شده از معادله (۷.۳.۳۰) و  $u$  داده شده به وسیله معادله (۷.۳.۲۹) به کار می گیرد. دومین رویکرد که رویکرد مود بهنگام نامیده می شود از معادله (۷.۳.۲۷) برای مسأله کاهش یافته استفاده می کند، یعنی

$$\frac{d\mu}{dx} = - \frac{\mu^2 q^T \frac{dM_R}{dx} q + \mu q^T \frac{dC_R}{dx} q + q^T \frac{dK_R}{dx} q}{2\mu q^T M_R q + q^T C_R q}. \quad (7.3.32)$$

مشتق  $K_R$  به صورت زیر است

$$\frac{dK_R}{dx} = U^T \frac{dK}{dx} U + \frac{dU^T}{dx} K U + U^T K \frac{dU}{dx} \quad (7.3.33)$$

عبارات مشابهی برای مشتقات  $M_R$  و  $C_R$  وجود دارد. نامهای دو رویکرد در ارتباط با این حقیقت است که مشتقات مربوطه، با محاسبات مشتق تفاضل محدود به ترتیب همراه با مودهای ثابت یا بهنگام شده مطابقت خواهند داشت. همچنین، می توان نشان داد که اگر جملات دارای  $dU/dx$  از عبارت مود بهنگام حذف شود، نتیجه حالت مود ثابت به دست می آید. محاسبه مشتقات مودهای ارتعاش پر هزینه است و به همین دلیل رویکرد مود ثابت، مناسب تر است. با وجود این همان گونه که در مثال زیر نشان داده می شود رویکرد مود بهنگام بعضی اوقات می تواند بسیار دقیقتر باشد.

## مثال ۷.۳.۲

برای مثال جرم - فنر - مستهلک کننده نشان داده شده در شکل (۷.۳.۱) یک مدل کاهش یافته فقط براساس مود اول ارتعاش بسازید. مشتقات مود ثابت و مود بهنگام مقدار ویژه مربوطه به پایین ترین بسامد را نسبت به ثابت  $k$ ی آخرین فنر سمت چپ بدست آورید. سپس آن را با مشتقات دقیق برای  $c = 0.2$  و  $c = 1.0$  مقایسه کنید.

تحلیل مدل کامل:

مسئله مقدار ویژه برای این مثال به وسیله معادله (الف) در مثال ۷.۳.۱ بیان شده و مقدار ویژه دقیق برای دو مقدار داده شده برای  $c$  در آن مثال به دست آمده است. برای بردار ویژه، از این شرط نرمال سازی استفاده می کنیم که مؤلفه دوم،  $u_2$ ، برابر یک است و با استفاده از معادله دوم مسئله ویژه داریم:

$$u = \begin{Bmatrix} \mu^2 + 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

برای محاسبه مشتق  $\mu$  نسبت به سختی  $k$ ی آخرین فنر سمت چپ، از معادله (۷.۳.۲۷) و با ماتریسهای محاسبه شده در مثال ۷.۳.۱ و ۷.۳.۳ استفاده می کنیم.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k+1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$M' = 0, \quad C' = 0, \quad K' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که نماد پرایم برای مشتق نسبت به  $k$  به کار رفته است. آن گاه از معادله (۷.۳.۲۷) داریم:

$$\mu' = -\frac{u^T K' u}{u^T (C + 2\mu M) u} = \frac{-(\mu^2 + 2)^2}{c(\mu^2 + 2)^2 + 2\mu[(\mu^2 + 2)^2 + 1]}.$$

برای دو مقدار  $c$  خواهیم داشت (برای مقادیر  $\mu$  مثال ۷.۳.۳ را ببینید)

$$\mu = -0.05025 + 1.0013i, \quad \mu' = 0.02525 + 0.2522i \quad : \quad c = 0.2$$

$$\mu = -0.29178 + 1.0326i, \quad \mu' = 0.1544 + 0.3460i \quad : \quad c = 1.0$$

تحلیل کاهش:

بسامدهای ارتعاش و اولین مود ارتعاش در مثال ۷.۳.۱ محاسبه شده اند. چون شرط نرمال سازی

۳۷۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

برای بردار ویژه مدل کامل آن است که مؤلفه دوم آن برابر یک باشد، مود ارتعاش بانرمال سازی مشابهی را در نظر می گیریم. این مود در مثال ۷.۳.۱ با یک خط در بالای آن نشان داده شده اما چون آن تنها مود استفاده شده در این جاست خط بالای آن را بر می داریم.

$$u = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

چون فقط از یک مود برای تحلیل کاهشی استفاده می کنیم  $U = u$  و با استفاده از معادله (۷.۳.۳۱) با  $k = 1$  خواهیم داشت

$$M_R = 2, \quad C_R = c, \quad K_R = 2.$$

معادله (۷.۳.۳۰) برای سیستم کاهش یافته عبارت است از:

$$(2\mu^2 + c\mu + 2)q = 0,$$

بنابراین:

$$\mu_R = -0.25c + i\sqrt{1 - 0.0625c^2},$$

که زیرنویس  $R$  برای نشان دادن این که مقدار ویژه به دست آمده مربوط به سیستم کاهش یافته است به کار می رود. برای بردار ویژه که دارای فقط یک مؤلفه است  $q = 1$  در نظر می گیریم. برای دو مقدار  $c$  داریم

$$\mu_R = -0.05 + 0.9987i \quad : \quad c = 0.2$$

$$\mu_R = -0.25 + 0.9682i \quad : \quad c = 1.0$$

روشن است که مدل کاهش یافته برای حالت استهلاک کم، نتیجه های بسیار خوبی می دهد و برای حالت استهلاک زیاد دارای خطای متوسطی است.

مشتق مود ثابت:

برای مشتق مود ثابت، بار دیگر از معادله (۷.۳.۲۷) استفاده می کنیم، ولی این بار با جایگزین کردن  $\mu$  با  $\mu_R$  و تقریبی از آن به صورت جملات موده های ارتعاشی. از آنجایی که بردار ویژه  $q = 1$  است، این تقریب برابر با اولین مود ارتعاش است. بنابراین:

بخش ۷.۳: محاسبات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه ۳۷۷

$$\mu' = -\frac{\mathbf{u}^T \mathbf{K}' \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T (\mathbf{C} + 2\mu_R \mathbf{M}) \mathbf{u}} = \frac{-1}{c + 4\mu_R},$$

برای دو مقدار  $c$  خواهیم داشت:

$$\mu'_{Rf} = 0.2503i \quad : \quad c = 0.2$$

$$\mu'_{Rf} = 0.2582i \quad : \quad c = 1.0$$

که از زیر نویس  $f$  برای نشان دادن این که مشتقات از روش مود ثابت محاسبه شده استفاده می گردد. توجه داریم که مشتق قسمت مجازی (بسامد) فقط در حالت استهلاك کم خوب است و این که مشتق مود ثابت، اثر قسمت حقیقی (استهلاك) را از دست می دهد. وقتی مشتق کوچک است خطاهای بزرگی از این نوع می تواند اتفاق بیفتد. یادآور می شود که بهترین تخمین اندازه مشتق به کمک مشتق لگاریتمی انجام می شود. مشتق لگاریتمی قسمت حقیقی برای حالت استهلاك کم عبارت است از:

$$\frac{d\mu^r/\mu^r}{dk/k} = 0.02525/(-0.05025) = -0.5025,$$

بنابراین کاملاً قابل توجه است.

مشتق مود بهنگام:

در این حالت به مشتق مود ارتعاش نسبت به  $k$  نیاز داریم. این مشتق در مثال ۷.۳.۱ به صورت زیر محاسبه شده است: (به خاطر داشته باشید که از آن مثال استفاده می کنیم).

$$\mathbf{u}' = \begin{Bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

سپس از معادله (۷.۳.۳۳) داریم:

$$\mathbf{K}'_R = \mathbf{u}^T [\mathbf{K}' \mathbf{u} + 2\mathbf{K} \mathbf{u}'] = [1 \quad 1] \left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = 0.$$

بطور مشابه

$$\mathbf{M}'_R = 2\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}' = 2[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{Bmatrix} = -1,$$

$$\mathbf{C}'_R = 2\mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u}' = 2[1 \quad 1] \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{Bmatrix} = -c.$$



۳۷۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

سرانجام از معادله (۷.۳.۳۲) داریم:

$$\mu'_{Ru} = -\frac{-c\mu_R - \mu_R^2}{4\mu_R + c}.$$

برای دو مقدار  $c$  داریم

$$\mu'_{Ru} = 0.025 + 0.2513i \quad : \quad c = 0.2$$

$$\mu'_{Ru} = 0.125 + 0.2843i \quad : \quad c = 1.0$$

که نسبت به  $\mu'_{Ru}$  تقریب بهتری از مشتق دقیق است. . . .

در بسیاری از کاربردها ماتریس استهلاک متقارن نیست و بهتر است معادلات حرکت (۷.۳.۴) به یک دستگاه مرتبه اول به شکل زیر تبدیل شود.

$$B\dot{\bar{w}} + A\bar{w} = 0, \quad (7.3.34)$$

که

$$A = \begin{bmatrix} C & K \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{Bmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \bar{u} \end{Bmatrix}. \quad (7.3.35)$$

با قرار دادن

$$\bar{w} = w e^{\mu t}, \quad (7.3.36)$$

یک مسأله مقدار ویژه مرتبه اول به دست می آوریم:

$$Aw + \mu Bw = 0. \quad (7.3.37)$$

برای محاسبه مشتقات مقادیر ویژه استفاده از بردار ویژه سمت چپ  $v$  که جواب مسأله ویژه مربوط به آن است راحت تر است. مسأله مقدار ویژه عبارت است از:

$$v^T A + \mu v^T B = 0. \quad (7.3.38)$$

به راحتی نشان داده می شود که دو مسأله مقدار ویژه تعریف شده در معادلات (۷.۳.۳۷) و (۷.۳.۳۸)

بخش ۷.۳: محاسبات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه ۳۷۹

دارای مقادیر ویژه یکسانی هستند (برای مثال به [18] رجوع کنید). با مشتق گیری از (۷.۳.۳۷) نسبت به متغیر طراحی  $x$

$$(A + \mu B) \frac{dw}{dx} + \left( \frac{dA}{dx} + \mu \frac{dB}{dx} \right) w + \frac{d\mu}{dx} Bw = 0, \quad (7.3.39)$$

و با پیش ضرب  $v^T$  در آن داریم:

$$\frac{d\mu}{dx} = - \frac{v^T \left( \frac{dA}{dx} + \mu \frac{dB}{dx} \right) w}{v^T Bw}. \quad (7.3.40)$$

برای یافتن مشتقات بردار ویژه به یک شرط نرمال سازی نیاز داریم. یک شرط درجه دوم مانند معادله (۷.۳.۲)، نامناسب است، زیرا بردار ویژه مختلط می باشد و  $w^T W w$  می تواند صفر باشد. حتی اگر این امکان را با جایگزین کردن ترانهاد هریتی به جای ترانهاد از بین ببریم، شرط

$$w^H W w = 1 \quad (7.3.41)$$

یک بردار ویژه منحصر به فرد را تعریف نمی کند، زیرا هنوز می توان بردار ویژه را در هر عدد مختلطی از مدول یک ضرب کرد بدون این که ضرب معادله (۷.۳.۴۱) تغییر یابد. بنابراین منطقی تر این است که بردار ویژه به صورت:

$$v^T B w = 1, \quad w_m = v_m = 1, \quad (7.3.42)$$

نرمال سازی شود، و  $m$  به گونه ای انتخاب شود که هم  $w_m$  و هم  $v_m$  در مقایسه با سایر مؤلفه های  $w$  و  $v$  کوچک نباشد. مشتق شرط نرمال سازی روابط زیر را می دهد:

$$\frac{dw_m}{dx} = 0, \quad \frac{dv_m}{dx} = 0, \quad (7.3.43)$$

که به همراه معادله (۷.۳.۳۹) می توانیم مشتق بردار ویژه را بدست آوریم. این روش مستقیم برای محاسبه مشتقات بردار ویژه است. مانند حالت متقارن، روش الحاقی برای محاسبه همین مشتقات، براساس بیان مشتق بردار ویژه بر حسب همه بردارهای ویژه مسأله می باشد. با نمایش  $i$  امین مقدار ویژه به صورت  $\mu_i$  و بردارهای ویژه مربوط به آن به صورت  $w^i$  و  $v^i$  فرض می کنیم

۳۸۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

$$\frac{d\mathbf{w}^k}{dx} = \sum_{j=1}^l c_{kj} \mathbf{w}^j, \quad (7.3.44)$$

و ضرایب  $c_{kj}$  عبارتند از:

$$c_{kj} = \frac{\mathbf{v}^{jT} \left( \frac{d\mathbf{A}}{dx} + \mu \frac{d\mathbf{B}}{dx} \right) \mathbf{w}^k}{(\mu_k - \mu_j) \mathbf{v}^{jT} \mathbf{B} \mathbf{w}^j}, \quad k \neq j, \quad (7.3.45)$$

و

$$c_{kk} = - \sum_{j \neq k} c_{kj} w_m^j. \quad (7.3.46)$$

حد بالایی در جمع  $l$ ، مرتبه ماتریسهای  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  است. مانند حالت متقارن، به منظور کاهش هزینه محاسبه مشتق، برش سری بدون در نظر گرفتن همه بردارهای ویژه نیز امکان پذیر است. این، سبب به وجود آمدن خطایی می شود که در حالت کلی، بستگی به نوع مسأله دارد. اطلاعات بیشتری در مورد گزینه های مختلف محاسبه مشتق را در مرجع [10] می توان یافت.

### ۷.۳.۳ مشتقات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه غیرخطی

در مسائل لرزش و ارتعاشات غیر خطی با مسائل مقدار ویژه ای که وابستگی به مقدار ویژه در آن خطی نیست برخورد می کنیم. برای مثال بیندولینو<sup>۱</sup> و مانتهگازا<sup>۲</sup> مسأله پاسخ آتروالاستیک<sup>۳</sup> را در نظر می گیرند که یک مسأله مقدار ویژه فوق العاده به شکل:

$$\mathbf{A}(\mu, x) \mathbf{u} = 0 \quad (7.3.47)$$

تولید می کند. با دیفرانسیل گیری از معادله (۷.۳.۴۷) داریم:

$$\mathbf{A} \frac{d\mathbf{u}}{dx} + \frac{d\mu}{dx} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mu} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{u} \quad (7.3.48)$$

با استفاده از شرط نرمال سازی  $u_m = 1$ ، می توانیم معادله (۷.۳.۴۸) را برای یافتن  $du/dx$  و  $d\mu/dx$  حل کنیم. به جای آن استفاده از روش الحاقی نیز با به کارگیری بردار ویژه سمت چپ  $\mathbf{v}$  به شکلی

1) Bindolino

2) Mantegazza

3) aeroelastic

بخش ۷.۳: محاسبات حساسیت برای مسائل مقدار ویژه ۳۸۱

که:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{A} = 0, \quad v_m = 1 \quad (۷.۳.۴۹)$$

امکان پذیر است و می توان رابطه زیر را بدست آورد:

$$\frac{d\mu}{dx} = - \frac{\mathbf{v}^T \frac{d\mathbf{A}}{dx} \mathbf{u}}{\mathbf{v}^T \frac{d\mathbf{A}}{d\mu} \mathbf{u}} \quad (۷.۳.۵۰)$$

یک راه حل مشترك مسائل لرزشی این است که دو متغیر حقیقی که بسامد و سرعت است را به صورت یک جفت ویژه داشته باشیم. این است که برای مثال مورتی [20] معادله (۷.۳.۴۷) را با:

$$\mathbf{A}(M, \omega) \mathbf{u} = 0, \quad (۷.۳.۵۱)$$

جایگزین کرد که در آن  $M$  عدد مایخ و  $\omega$  بسامد و هر دو متغیرهای حقیقند. با استفاده از این رویکرد و مشتق گیری از معادله (۷.۳.۵۱) و پیش ضرب در  $\mathbf{v}^T$  و استفاده از معادله (۷.۳.۴۹) خواهیم داشت:

$$f_M \frac{dM}{dx} + f_\omega \frac{d\omega}{dx} = -f_z, \quad (۷.۳.۵۲)$$

که

$$f_M = \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial M} \mathbf{u}, \quad f_\omega = \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \omega} \mathbf{u}, \quad f_z = \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{u}. \quad (۷.۳.۵۳)$$

با ضرب معادله (۷.۳.۵۲) در  $\bar{f}_\omega$  (مزدوج مختلط  $f_\omega$ ) داریم:

$$f_M \bar{f}_\omega \frac{dM}{dx} + |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{dx} = -\bar{f}_\omega f_z \quad (۷.۳.۵۴)$$

جمله دوم در معادله (۷.۳.۵۴) و  $dM/dx$  حقیقند، بنابراین با در نظر گرفتن قسمت موهومی معادله (۷.۳.۵۴) خواهیم داشت:

$$\frac{dM}{dx} = - \frac{\text{Im}(\bar{f}_\omega f_z)}{\text{Im}(f_M \bar{f}_\omega)} = - \frac{\text{Im} \left[ \left( \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{u} \right) \left( \bar{\mathbf{v}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial \omega} \bar{\mathbf{u}} \right) \right]}{\text{Im} \left[ \left( \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial M} \mathbf{u} \right) \left( \bar{\mathbf{v}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial \omega} \bar{\mathbf{u}} \right) \right]}. \quad (۷.۳.۵۵)$$

سپس با ضرب کردن معادله (۷.۳.۵۲) در  $\bar{f}_M$  و دنبال کردن روندی مشابه داریم:

۳۸۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

$$\frac{d\omega}{dx} = - \frac{Im \left[ \left( \bar{v}^T \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} u \right) \left( \bar{v}^T \frac{\partial \bar{A}}{\partial M} \bar{u} \right) \right]}{Im \left[ \left( \bar{v}^T \frac{\partial \bar{A}}{\partial M} u \right) \left( \bar{v}^T \frac{\partial \bar{A}}{\partial \omega} \bar{u} \right) \right]}. \quad (7.3.56)$$

#### ۷.۴ حساسیت قیود پاسخ گذرا

در مقایسه با قیود پاسخ حالت یکنواخت، قیود پاسخ گذرا به یک متغیر دیگر یعنی زمان وابسته است. یعنی یک قید نمونه به صورت زیر نوشته می شود:

$$g(u, x, t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad (7.4.1)$$

که برای ساده سازی فرض می کنیم که قید باید از  $t = 0$  تا یک زمان نهایی  $t_f$  برآورده شود. در محاسبات واقعی، قیود باید در  $n_t$  نقطه زمانی به شکل زیر تقسیم شوند:

$$g_i = g(u, x, t_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n_t. \quad (7.4.2)$$

توزیع نقاط زمان باید به اندازه کافی متراکم باشند تا از احتمال نقض قید قابل توجه بین نقاط زمان جلوگیری کند. این نوع تقسیم بندی قید می تواند تعداد قیود و در نتیجه هزینه بهینه سازی را به میزان چشمگیری افزایش دهد. بنابراین یافتن راهی برای برداشتن وابستگی به زمان، بدون افزایش قابل توجه تعداد قیود مطلوب است.

##### ۷.۴.۱ قیود معادل

یک راه برای برداشتن وابستگی قید به زمان، جایگزین کردن آن با یک قید معادل که برقراری قید را روی یک فاصله زمانی میانگین سازی می نماید است. یک نمونه قید خارجی معادل:

$$\bar{g}(u, x) = \left[ \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} < -g(u, x, t) >^2 dt \right]^{1/2}, \quad (7.4.3)$$

می باشد که  $< a >$  نمایانگر  $\max(a, 0)$  است. در هر دوره زمانی محدود اگر قید اصلی نقض شود قید هم ارزش نقض می گردد. اگر  $g(u, x, t)$  در هیچ جا نقض نگردد  $\bar{g}(u, x)$  برابر صفر است. قید خارجی معادل در ناحیه قابل قبول برابر صفر است، بنابراین وقتی که قیود بحرانی هستند نشانه ای وجود ندارد.

بخش ۷.۴: حساسیت قیود پاسخ گذرا ۳۸۳

یک قید معادل که در صورت برآورده شدن صفر می شود، بر اساس تابع کرسل میر-امتنهازر<sup>۱</sup> [21,22] و معادله (۷.۴.۲) است.

$$\bar{g}(u, x) = \frac{-1}{\rho} \ln \left[ \sum_{i=1}^{n_i} e^{-\rho g_i} dt \right], \quad (7.4.4)$$

$\rho$  متغیری است که رابطه بین  $\bar{g}$  و بیشترین مقدار بحرانی  $g$ ،  $g_{\min}$ ، را مشخص می سازد. در واقع معادله (۷.۴.۴) را می توان به صورت:

$$\bar{g} = g_{\min} - \frac{1}{\rho} \ln \left[ \sum_{i=1}^{n_i} e^{-\rho(g_i - g_{\min})} dt \right]. \quad (7.4.5)$$

نوشت. از معادله (۷.۴.۵) داریم:

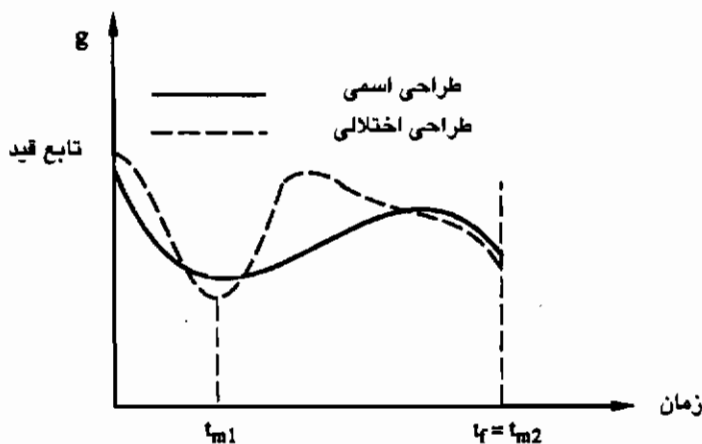
$$\bar{g} = g_{\min} - \frac{1}{\rho} \ln \left[ \sum_{i=1}^{n_i} e^{-\rho(g_i - g_{\min})} dt \right]. \quad (7.4.6)$$

بنابراین  $\bar{g}$  یک قید پوش است که همیشه از  $g$  بحرانی تر است. متغیر  $\rho$  مشخص می سازد که  $\bar{g}$  چه مقدار بحرانی تر است. با وجود این اگر  $\rho$  به منظور کاهش اختلاف  $\bar{g}$  و  $g_{\min}$  خیلی بزرگ در نظر گرفته شود مسأله ممکن است بدخیم شود.

صرفه جویی به دست آمده به وسیله جایگزینی قید تقسیم بندی شده معادله (۷.۴.۲) با یک قید معادل ممکن است کاذب به نظر رسد، چون محاسبه انتگرال در معادله (۷.۴.۳) یا حاصل جمع در معادله (۷.۴.۴) معمولاً به ارزیابی  $g(u, x, t)$  در تعداد زیادی از نقاط زمانی نیاز دارد. صرفه جویی تحقق یافته در بهینه سازی و محاسبه مشتقات قید بعداً بحث خواهد شد.

اشکال قیود معادل این است که ممکن است آنها روند طراحی را نامشخص کنند. به عنوان مثال یک تغییر در طراحی را در نظر بگیرید که قید  $g$  را از خط توپر در شکل (۷.۴.۱) به خط نقطه چین در این شکل منتقل می کند. قید معادل ممکن است مثبت تر شود، که نمایانگر اثر مفیدی است، در حالی که وضعیت بحرانی تر می شود زیرا به مرز قید ( $g = 0$ ) حداقل در بعضی نقاط زمانی  $t_{m1}$  نزدیکتر می شویم. برای دوری جستن از این اثر نامشخص سازی، از قید نقطه بحرانی به جای قید اصلی استفاده می کنیم. یعنی

1) Kresselmeier-steinhauser



شکل ۷.۴.۱ نقاط بحرانی

$$g(u, x, t_{mi}) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (7.4.7)$$

که  $t_{mi}$  ها نقاط زمانی است که قید در آن یک مینیمم محلی دارد. شکل (۷.۴.۱) یک وضعیت نمونه را نشان می دهد که تابع قید دو مینیمم محلی دارد: یکی مینیمم داخلی در  $t_{m1}$  و یکی مینیمم مرزی در  $t_{m2}$ . مینیمم های محلی نقاط بحرانیند به این مفهوم که آنها نمایانگر اولین نقاط زمانی اند که تمایل به نقض قید دارند.

یک مزیت خوب قید نقطه بحرانی این است که به منظور یافتن مشتقات اول می شود موقعیت نقطه بحرانی در زمان را ثابت فرض کرد. این مطلب با مشتق گیری از معادله (۷.۴.۷) نسبت به متغیر طراحی  $x$  نشان داده می شود.

$$\frac{dg(t_{mi})}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{dt_{mi}}{dx}. \quad (7.4.8)$$

آخرین جمله در معادله (۷.۴.۸) همواره صفر است. در یک مینیمم داخلی مانند  $t_{m1}$  در شکل (۷.۴.۱)،  $\partial g / \partial t$  صفر است. زمانی که  $\partial g / \partial t$  در سمت چپ مرز مثبت یا در سمت راست مرز منفی باشد، یک مینیمم مرزی زمانی خواهیم داشت. این مینیمم مرزی نمی تواند به بیرون مرز حرکت کند، مگر این که شیب  $\partial g / \partial t$  صفر شود. این بدان معنی است که زمانی که  $\partial g / \partial t$  در یک مینیمم مرزی صفر نیست، مینیمم نمی تواند حرکت کند، بنابراین  $dt_{mi} / dx$  صفر است.

بخش ۷.۴: حساسیت قیود پاسخ گذرا ۳۸۵

## ۷.۴.۲ مشتقات قیود

به منظور محاسبه مشتقات قیود فرض می‌کنیم که قید به شکل

$$\bar{g}(u, x) = \int_0^{t'} p(u, x, t) dt \geq 0. \quad (7.4.9)$$

است. این شکل نمایانگر اکثر قیود معادل، و قید نقطه بحرانی است که با تعریف

$$p(u, x, t) = g(u, x, t) \delta(t - t_{mi}). \quad (7.4.10)$$

می‌توان آن را یافت. مشتق قید نسبت به متغیر طراحی  $x$  عبارت است از:

$$\frac{d\bar{g}}{dx} = \int_0^{t'} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial u} \frac{du}{dx} \right) dt. \quad (7.4.11)$$

برای محاسبه انتگرال، نیاز به مشتق‌گیری از معادلات حرکت نسبت به  $x$  داریم. این معادلات به شکل کلی مرتبه اول زیر نوشته می‌شوند:

$$A \dot{u} = f(u, x, t), \quad u(0) = u_0, \quad (7.4.12)$$

که  $u$  بردار درجه آزادی تعمیم یافته و  $f$  بردار دربرگیرنده بارهای داخلی و خارجی است.

اکنون بر روی چندین روش محاسبه مشتق قید بحث می‌کنیم و با ساده‌ترین آنها، یعنی روش مستقیم شروع می‌کنیم. مانند حالت یکنواخت، روش مستقیم با مشتق‌گیری از معادله (۷.۴.۱۲) به منظور یافتن معادله‌ای برای  $du/dx$  شروع می‌شود.

$$A \frac{du}{dx} = J \frac{du}{dx} - \frac{dA}{dx} \dot{u} + \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{du}{dx}(0) = 0, \quad (7.4.13)$$

که  $J$  ژاکوبین  $f$  است.

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}. \quad (7.4.14)$$

در روش مستقیم  $du/dx$  ابتدا از معادله (۷.۴.۱۳) به دست می‌آید و سپس در معادله (۷.۴.۱۱) جایگزین می‌شود. اشکال این روش این است که برای هر متغیر طراحی به حل یک دستگاه معادلات



دیفرانسیل، معادله (۷.۴.۱۳)، نیاز می باشد. هنگامی که تعداد متغیرهای طراحی زیاد و تعداد توابع قید کم است، می توانیم مانند حالت ایستایی از یک بردار متغیرهای الحاقی که فقط به توابع قید وابسته اند و نه به متغیرهای طراحی استفاده کنیم. برای یافتن روش الحاقی، روند استاندارد ضرب کردن مشتقات معادلات پاسخ، معادله (۷.۴.۱۳)، در یک بردار الحاقی و اضافه کردن آنها به مشتقات قیود را پیگیری می کنیم.

$$\frac{d\bar{g}}{dx} = \int_0^{t_f} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) dt + \int_0^{t_f} \lambda^T \left( \mathbf{A} \frac{d\dot{\mathbf{u}}}{dx} - \mathbf{J} \frac{d\mathbf{u}}{dx} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{d\mathbf{A}}{dx} \dot{\mathbf{u}} \right) dt \quad (7.4.15)$$

می خواهیم همه جملات شامل  $d\mathbf{u}/dx$  را با هم دسته بندی کرده و یک متغیر الحاقی تعریف کنیم آن چنان که ضریب  $d\mathbf{u}/dx$  از بین برود. برای این کار نیاز به انتگرال گیری از جملات شامل  $d\mathbf{u}/dx$  داریم. با انتگرال گیری جزء به جزء و مرتب سازی معادله خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{g}}{dx} = \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} - \lambda^T \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{d\mathbf{A}}{dx} \dot{\mathbf{u}} \right) + \left[ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{u}} - \lambda^T (\dot{\mathbf{A}} + \mathbf{J}) - (\dot{\lambda})^T \mathbf{A} \right] \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right\} dt \\ + \lambda^T \mathbf{A} \frac{d\mathbf{u}}{dx} \Big|_0^{t_f}. \end{aligned} \quad (7.4.16)$$

معادله (۷.۴.۱۶) نشان می دهد که متغیر الحاقی باید رابطه

$$\mathbf{A}^T \dot{\lambda} + (\mathbf{J}^T + \dot{\mathbf{A}}^T) \lambda = \left( \frac{\partial p}{\partial \mathbf{u}} \right)^T, \quad \lambda(t_f) = 0. \quad (7.4.17)$$

را برآورده کند. سپس از معادله (۷.۴.۱۶) خواهیم داشت:

$$\frac{d\bar{g}}{dx} = \int_0^{t_f} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} - \lambda^T \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{d\mathbf{A}}{dx} \dot{\mathbf{u}} \right) \right] dt, \quad (7.4.18)$$

که از این حقیقت که  $d\mathbf{u}/dx$  در  $t=0$  برابر صفر است استفاده کرده ایم. معادله (۷.۴.۱۷) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب  $\lambda$  است که به صورت پسر و انتگرال گیری شده است (از  $t_f$  تا صفر). این دستگاه باید برای هر قید یک بار حل شود و نه برای هر متغیر طراحی. مانند حالت ایستایی هنگامی که تعداد متغیر طراحی کمتر از تعداد قیود باشد، روش مستقیم ترجیح دارد و در غیر این صورت روش الحاقی برتری دارد. معادله (۷.۴.۱۷) برای قید نقطه بحرانی یک شکل ساده تر دارد.

بخش ۷.۴: حساسیت قیود پاسخ گذرا ۴۸۷

$$\mathbf{A}^T \dot{\lambda} + (\mathbf{J}^T + \dot{\mathbf{A}}^T) \lambda = \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta(t - t_{mi}), \quad \lambda(t_f) = 0. \quad (7.4.19)$$

به وسیله انتگرال گیری از معادله (۷.۴.۱۹) از  $t_{mi} - \epsilon$  تا  $t_{mi} + \epsilon$  برای یک  $\epsilon$  بسیار کوچک، می توانیم به راحتی نشان دهیم که معادله (۷.۴.۱۹) معادل است با:

$$\mathbf{A}^T \dot{\lambda} + (\mathbf{J}^T + \dot{\mathbf{A}}^T) \lambda = 0, \quad \lambda^T(t_{mi}) = - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(t_{mi}) \mathbf{A}^{-1}. \quad (7.4.20)$$

سومین روشی که برای محاسبه مشتق در دسترس است رویکرد تابع گرین<sup>۱</sup> [23] می باشد. این روش زمانی مفید است که تعداد درجه آزادی در معادله (۷.۴.۱۲) کمتر از تعداد متغیرهای طراحی با تعداد قیود است. این حالت زمانی به وجود می آید که مرتبه معادله (۷.۴.۱۲) با به کارگیری تحلیل مودال کاهش یافته باشد. روش تابع گرین برای حالت  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$  در معادله (۷.۴.۱۲) بحث خواهد شد. بنابراین معادله (۷.۴.۱۳) به صورت زیر در خواهد آمد.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{J} \frac{d\mathbf{u}}{dx} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dx}(0) = 0. \quad (7.4.21)$$

حل معادله (۷.۴.۲۱) می تواند به صورت جملاتی از تابع گرین  $\mathbf{K}(t, \tau)$  به صورت:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \int_0^t \mathbf{K}(t, \tau) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(\tau) d\tau, \quad (7.4.22)$$

نوشته شود [23] که  $\mathbf{K}(t, \tau)$  معادلات زیر را برآورده می کند.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}(t, \tau) - \mathbf{J}(t) \mathbf{K}(t, \tau) &= \delta(t - \tau) \mathbf{I}, \\ \mathbf{K}(0, \tau) &= 0, \end{aligned} \quad (7.4.23)$$

و  $\delta(t - \tau)$  تابع دیراک<sup>۲</sup> دلتا می باشد. با جایگزینی مستقیم، به راحتی می توان دید که  $du/dx$  تعریف شده در معادله (۷.۴.۲۲) در واقع معادله (۷.۴.۲۱) را برآورده می کند.

اگر اجزای  $\mathbf{J}$  کراندار باشند می توان نشان داد که معادله (۷.۴.۲۳) معادل است با:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t, \tau) &= 0, & t < \tau, \\ \mathbf{K}(\tau, \tau) &= \mathbf{I}, \\ \dot{\mathbf{K}}(t, \tau) - \mathbf{J}(t) \mathbf{K}(t, \tau) &= 0, & t > \tau. \end{aligned} \quad (7.4.24)$$

۳۸۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

بنابراین از معادله (۷.۴.۲۲) فقط تا  $t = \tau$  لازم است انتگرال گیری شود. برای این که ببینیم چگونه  $du/dx$  به کمک معادله (۷.۴.۲۴) ارزیابی می شود، فرض کنید که بازه  $0 \leq t \leq t_f$  را به  $n$  زیر بازه با نقاط پایانی در  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = t_f$  تقسیم می کنیم. نقاط پایانی  $t_i$  برای ارزیابی معادله (۷.۴.۲۲) به وسیله انتگرال گیری عددی و برون یابی  $du/dx$  برای سایر نقاط زمانی مورد علاقه و با دقت مورد نظر، به اندازه کافی متراکمند. اکنون مسأله مقدار اولیه زیر را تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}(t, \tau_k) - \mathbf{J}(t)\mathbf{K}(t, \tau_k) &= 0, \\ \mathbf{K}(\tau_k, \tau_k) &= \mathbf{I}, \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (7.4.25)$$

برای به دست آمدن  $\mathbf{K}(\tau_{k+1}, \tau_k)$  از هر معادله در (۷.۴.۲۵)، از  $\tau_k$  تا  $\tau_{k+1}$  انتگرال گیری می شود. مقدار  $\mathbf{K}$  برای هر جفت دیگر از نقاط به وسیله معادله زیر بیان می شود (برای اثبات مرجع [23] را ببینید)

$$\mathbf{K}(\tau_j, \tau_k) = \mathbf{K}(\tau_j, \tau_{j-1})\mathbf{K}(\tau_{j-1}, \tau_{j-2}) \dots \mathbf{K}(\tau_{k+1}, \tau_k), \quad j > k. \quad (7.4.26)$$

حل برای  $\mathbf{K}$  معادل است با حل  $n_m$  دستگاه از نوع معادله (۷.۴.۱۳) یا (۷.۴.۲۰) که مرتبه بردار  $\mathbf{u}$  است. بنابراین برای حالتی که تعداد متغیرهای طراحی و قیود هر دو از  $n_m$  بیشتر باشد، باید روش تابع گرین به کار رود. این حالت به احتمال زیاد وقتی اتفاق می افتد که مرتبه دستگاه با استفاده از بعضی انواع تقریب مودال یا تقریبهای کاهشی دیگر کاهش یافته باشد.

### مثال ۷.۴.۱

یک سیستم یک درجه آزادی که با معادله دیفرانسیل زیر بیان می شود:

$$a\dot{u} = (u - b)^2, \quad u(0) = 0,$$

و یک قید بر پاسخ  $u$  به شکل

$$g(u) = c - u(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq t_f.$$

دارد را در نظر بگیرید. ملاحظه شده که پاسخ محاسبه شده به طور یکنوا افزایش می یابد، بنابراین قید نقطه بحرانی شکل زیر را به خود می گیرد:

بخش ۷.۴: حساسیت قیود پاسخ گذرا ۳۸۹

$$\bar{g}(u) = g[(u(t_f))] = c - u(t_f).$$

می‌خواهیم با استفاده از روشهای مستقیم، الحاقی و تابع گرین مشتق  $\bar{g}$  نسبت به  $a$  و  $b$  را محاسبه کنیم. از مسأله می‌توان برای یافتن:

$$u = \frac{b^2 t}{bt + a}.$$

مستقیماً انتگرال گیری کرد. با این نمادها داریم:

$$\mathbf{A} = a, \quad \mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = 2(u - b).$$

روش مستقیم: در روش مستقیم نیاز به نوشتن معادله (۷.۴.۱۳) برای  $x = a$  و  $x = b$  است. برای  $x = a$  داریم

$$a \frac{d\dot{u}}{da} = 2(u - b) \frac{du}{da} - \dot{u}, \quad \frac{du}{da}(0) = 0.$$

در حالت کلی مقادیر  $u$  و  $\dot{u}$  فقط به صورت عددی در دسترسند، بنابراین معادله  $du/da$  نیز به صورت عددی انتگرال گیری خواهد شد. در این جا صورت کامل جواب برای  $u$  را داریم، بنابراین می‌توانیم آن را در معادله مشتق جایگزین کنیم

$$a \frac{d\dot{u}}{da} = \frac{2ab}{bt + a} \frac{du}{da} - \frac{ab^2}{(bt + a)^2}, \quad \frac{du}{da}(0) = 0,$$

با حل تحلیلی آن خواهیم داشت:

$$\frac{du}{da} = -\frac{b^2 t}{(bt + a)^2}.$$

سپس

$$\frac{d\bar{g}}{da} = -\frac{du}{da}(t_f) = \frac{b^2 t_f}{(bt_f + a)^2}.$$

اکنون برای  $x = b$  روند را تکرار می‌کنیم، معادله (۷.۴.۱۳) به شکل زیر خواهد شد:

۳۹۰ مبانی بهینه سازی مازدها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

$$a \frac{d\dot{u}}{db} = 2(u-b) \frac{du}{db} - 2(u-b), \quad \frac{du}{db}(0) = 0.$$

با حل برای  $du/db$  خواهیم داشت

$$\frac{du}{db} = \frac{b^2 t^2 + 2abt}{(bt+a)^2},$$

و سپس

$$\frac{d\bar{g}}{db} = -\frac{du}{db}(t_f) = -\frac{b^2 t_f^2 + 2abt_f}{(bt_f+a)^2}.$$

روش الحاقی: در روش الحاقی نیاز به حل معادله (۷.۴.۲۰) می باشد که عبارت است از:

$$a\dot{\lambda} + 2(u-b)\lambda = 0, \quad \lambda(t_f) = -\frac{1}{a} \frac{\partial g}{\partial u}(t_f) = \frac{1}{a},$$

یا

$$a\dot{\lambda} - \frac{2ab}{bt+a}\lambda = 0, \quad \lambda(t_f) = \frac{1}{a},$$

که با انتگرال گیری از آن داریم:

$$\lambda = \frac{1}{a} \left( \frac{bt+a}{bt_f+a} \right)^2.$$

آن گاه  $d\bar{g}/da$  از معادله (۷.۴.۱۸) به صورت زیر به دست می آید

$$\frac{d\bar{g}}{da} = \int_0^{t_f} \lambda \dot{u} dt = \int_0^{t_f} \frac{1}{a} \left( \frac{bt+a}{bt_f+a} \right)^2 \frac{ab^2}{(bt+a)^2} dt = \frac{b^2 t_f}{(bt_f+a)^2}.$$

به طور مشابه  $d\bar{g}/db$  عبارت است از:

$$\frac{d\bar{g}}{db} = \int_0^{t_f} 2\lambda(u-b) dt = -\frac{2}{a} \int_0^{t_f} \left( \frac{bt+a}{bt_f+a} \right)^2 \frac{ab}{bt+a} dt = -\frac{b^2 t_f^2 + 2abt_f}{(bt_f+a)^2}.$$

روش تابع کرین: مسأله را از نو به صورت زیر طرح ریزی می کنیم:

$$\dot{u} = (u-b)^2/a,$$

بخش ۷.۴: حساسیت قیود پاسخ گذرا ۳۹۱

بنابراین ژاکوبین  $J$  عبارت است از:

$$J = 2(u - b)/a.$$

معادله (۷.۴.۲۴) به صورت زیر در خواهد آمد

$$\dot{k}(t, \tau) - [2(u - b)/a]k(t, \tau) = 0, \quad k(\tau, \tau) = 1,$$

یا

$$\dot{k}(t, \tau) + \frac{2b}{bt + a}k(t, \tau) = 0.$$

جواب  $k$  عبارت است از:

$$k = \left( \frac{b\tau + a}{bt + a} \right)^2, \quad t \geq \tau,$$

بنابراین از معادله (۷.۴.۲۲)

$$\frac{du}{da} = \int_0^{t'} \frac{\partial f}{\partial a} k d\tau = - \int_0^{t'} \left( \frac{b\tau + a}{bt + a} \right) \frac{(u - b)^2}{a^2} d\tau = - \frac{b^2 t}{(bt + a)^2}.$$

بطور مشابه

$$\frac{du}{db} = \int_0^{t'} \frac{\partial F}{\partial b} k d\tau = - \int_0^{t'} 2 \left( \frac{b\tau + a}{bt + a} \right)^2 \left( \frac{u - b}{a} \right) d\tau = - \frac{b^2 t^2 + 2abt}{(bt + a)^2}.$$

...

۷.۴.۳ دینامیک سازه های خطی

برای حالت دینامیک سازه های خطی، حفظ کردن معادلات حرکت به صورت مرتبه ۲ سودمندتر است تا تبدیل آن به یک مجموعه معادلات مرتبه اول. استفاده از کاهش مودال نیز برای این حالت عمومیت دارد. در این قسمت در مورد کاربرد روشهای مستقیم و الحاقی در این حالت بخصوص بحث می کنیم. معادلات حرکت به صورت زیر نوشته می شوند:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t). \quad (۷.۴.۲۷)$$

۳۹۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حساسیت سیستمهای گسسته)

غالباً اندازه مسأله با بیان  $u$  بر حسب  $m$  تابع پایه  $u^i, i = 1, \dots, m$  که معمولاً کمتر از تعداد درجه های آزادی سیستم اصلی، معادله (۷.۴.۲۷)، است کاهش می یابد.

$$u = Uq, \quad (۷.۴.۲۸)$$

که  $U$  یک ماتریس با ستونهای  $u^i$  می باشد. آن گاه یک مجموعه معادلات کاهش یافته به صورت زیر نوشته می شوند:

$$M_R \ddot{q} + C_R \dot{q} + K_R q = f_R, \quad (۷.۴.۲۹)$$

که

$$M_R = U^T M U, \quad C_R = U^T C U, \quad K_R = U^T K U, \quad f_R = U^T f. \quad (۷.۴.۳۰)$$

هنگامی که توابع پایه، اولین  $m$  مود ارتعاش طبیعی سازه مقیاس بندی شده به جرمهای مودال واحد است،  $U$  معادله زیر را برآورده می کند.

$$KU - MU\theta^2 = 0, \quad (۷.۴.۳۱)$$

که  $\theta$  یک ماتریس قطری با  $n$  امین بسامد طبیعی  $\omega$  در  $n$  امین سطر می باشد. در آن حالت  $K_R = \theta^2$  و  $M_R = I$  ماتریس های قطریند. برای شکل های خاصی از استهلاک، ماتریس استهلاک  $C_R$  نیز قطری است؛ بنابراین معادله (۷.۴.۲۹) غیر جفت شده است، پس از این که  $q$  از معادله (۷.۴.۲۹) محاسبه شد، می توانیم برای محاسبه  $u$  از معادله (۷.۴.۲۸) استفاده کنیم. این روش کاهش مودال به عنوان روش تغییر مکان مودی شناخته می شود.

هنگامی که بار  $f$  ناپیوستگی فضایی دارد، همگرایی تقریب مودال معادله (۷.۴.۲۹)، ممکن است خیلی آهسته باشد [24,25]. همگرایی را می توان به وسیله استفاده از روش شتاب مودی که در اصل توسط ویلیامز<sup>۱</sup> [26] پیشنهاد شده به میزان قابل توجهی سرعت بخشید. روش شتاب مودی با بازنویسی معادله (۷.۴.۲۷) به صورت زیر بدست می آید:

1) Williams

بخش ۷.۴: حساسیت قیود پاسخ گذرا ۳۹۳

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}. \quad (۷.۴.۳۲)$$

اولین جمله در معادله (۷.۴.۳۲) جواب شبه ایستایی نامیده می شود زیرا پاسخ سازه به بارهایی است که به آهستگی اعمال شده اند. جملات دوم و سوم بر حسب جواب مودال تقریب خورده اند. می توان نشان داد که  $\mathbf{K}^{-1}$  را ممکن است به صورت زیر تخمین زد. (به عنوان مثال به مرجع [27] مراجعه کنید)

$$\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{U}\theta^{-2}\mathbf{U}^T \quad (۷.۴.۳۳)$$

با استفاده از این تقریب برای جملات دوم و سوم معادله (۷.۴.۳۲) داریم:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} - \mathbf{U}\theta^{-2}\mathbf{C}_R\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{U}\theta^{-2}\ddot{\mathbf{q}}. \quad (۷.۴.۳۴)$$

$\mathbf{U}$  شامل مجموعه تمام مودهای ارتعاش باشد، این تقریب جواب دقیق است. توجه داشته باشید که  $\dot{\mathbf{q}}$  و  $\ddot{\mathbf{q}}$  در معادله (۷.۴.۳۴) از حل تغییر مکان مودی، معادله (۷.۴.۲۹)، به دست آمده اند. بنابراین تفاوتی بین روشهای تغییر مکان مودی و شتاب مودی در سرعتها و شتابها وجود ندارد. در محاسبه حساسیت در ابتدا روی روش تغییر مکان مودی بحث می کنیم. روش مستقیم محاسبه حساسیت پاسخ، با مشتق گیری از معادله (۷.۴.۲۹) بدست می آید

$$\mathbf{M}_R \frac{d\ddot{\mathbf{q}}}{dx} + \mathbf{C}_R \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dx} + \mathbf{K}_R \frac{d\mathbf{q}}{dx} = \mathbf{r}, \quad (۷.۴.۳۵)$$

که

$$\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{f}_R}{dx} - \frac{d\mathbf{M}_R}{dx}\ddot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{M}_R}{dx}\dot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{K}_R}{dx}\mathbf{q}. \quad (۷.۴.۳۶)$$

مشتق  $\mathbf{K}_R$  نسبت به معادله (۷.۳.۳۳) است و عباراتی شبیه به آن نیز برای مشتقات  $\mathbf{M}_R$  و  $\mathbf{C}_R$  و  $\mathbf{f}_R$  به کار می رود. با استفاده از یک مجموعه ثابت توابع پایه  $\mathbf{U}$ ، یا ناچیز فرض کردن اثر تغییر در مودها، محاسبات به طور قابل توجهی ساده می شوند. در بعضی حالات (به عنوان مثال [28])، خطای ناچیز انگاشتن تغییر مودها کوچک است. هنگامی که این خطا غیر قابل قبول است، با محاسبه پر هزینه مشتقات مودها که



۳۹۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۷: حسابیت سیستمهای گسته)

برای محاسبه مشتقات ماتریسهای کاهش یافته، مانند معادله (۷.۳.۳۳)، لازم است مواجهه می شویم. خوشبختانه گرین [27] به این نتیجه رسید که هزینه محاسبه مشتقات مودها را می توان با استفاده از روش مودال بهبود یافته، معادله (۷.۳.۱۵) و تنها با نگهداشتن اولین جمله در این معادله، کاهش داد. این تقریب مشتقات مودها ممکن است همیشه دقیق نباشد، اما به نظر می رسد که برای محاسبه حساسیت پاسخ دینامیکی کافی است.

در روش الحاقی یک قید به شکل معادله (۷.۴.۹) فرض می کنیم:

$$\bar{g}(\mathbf{q}, x) = \int_0^{t_f} p(\mathbf{q}, x, t) dt \geq 0, \quad (7.4.37)$$

بنابراین:

$$\frac{d\bar{g}}{dx} = \int_0^{t_f} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dx} \right) dt. \quad (7.4.38)$$

برای پرهیز از محاسبه  $d\mathbf{q}/dx$  معادله مشتق پاسخ، معادله (۷.۴.۳۵)، را در یک بردار الحاقی،  $\lambda$  ضرب کرده و آن را به مشتق قید اضافه می کنیم.

$$\frac{d\bar{g}}{dx} = \int_0^{t_f} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dx} \right) dt + \int_0^{t_f} \lambda^T \left( -\mathbf{M}_R \frac{d\ddot{\mathbf{q}}}{dx} - \mathbf{C}_R \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dx} - \mathbf{K}_R \frac{d\mathbf{q}}{dx} + \mathbf{r} \right) dt. \quad (7.4.39)$$

می خواهیم با انتخاب مناسب  $\lambda$  از جملات مشتق پاسخ رها شویم. برای رها شدن از مشتقات زمانی در جملات مشتق پاسخ، از انتگرال جزء به جزء استفاده می کنیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{g}}{dx} = \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} - \lambda^T \mathbf{r} + \left[ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{q}} - \bar{\lambda}^T \mathbf{M}_R + \dot{\lambda}^T \mathbf{C}_R - \lambda^T \mathbf{K}_R \right] \frac{d\mathbf{q}}{dx} \right\} dt \\ - \lambda^T \mathbf{M}_R \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dx} \Big|_0^{t_f} + \dot{\lambda}^T \mathbf{M}_R \frac{d\mathbf{q}}{dx} \Big|_0^{t_f} - \lambda^T \mathbf{C}_R \frac{d\mathbf{q}}{dx} \Big|_0^{t_f}. \end{aligned} \quad (7.4.40)$$

اگر شرایط اولیه به متغیر طراحی  $x$  وابسته نباشد، معادله (۷.۴.۴۰) تعریف زیر را برای  $\lambda$  می دهد:

$$\mathbf{M}_R \ddot{\lambda} - \mathbf{C}_R \dot{\lambda} + \mathbf{K}_R \lambda = \left( \frac{\partial p}{\partial \mathbf{q}} \right)^T, \quad \lambda(t_f) = \dot{\lambda}(t_f) = 0, \quad (7.4.41)$$

و سپس معادله (۷.۴.۴۰) به شکل زیر در خواهد آمد.

بخش ۷.۵: تمرینها ۳۹۵

$$\frac{d\bar{g}}{dx} = \int_0^{t_f} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \lambda^T \mathbf{r} \right) dt. \quad (۷.۴.۴۲)$$

در روش شتاب مودی فقط روش مستقیم را در نظر می گیریم. با مشتق گیری از معادله (۷.۴.۲۷) و مرتب سازی آن به صورت:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{K}^{-1} \left[ \frac{d\mathbf{f}}{dx} - \frac{d\mathbf{K}}{dx} \mathbf{u} - \mathbf{C} \frac{d\dot{\mathbf{u}}}{dx} - \frac{d\mathbf{C}}{dx} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{M} \frac{d\ddot{\mathbf{u}}}{dx} - \frac{d\mathbf{M}}{dx} \ddot{\mathbf{u}} \right]. \quad (۷.۴.۴۳)$$

شروع می کنیم. سپس از معادله (۷.۴.۳۴) برای تقریب جمله دوم و از بسط مودال معادله (۷.۴.۲۸) برای تقریب سایر جملات استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dx} \approx \mathbf{K}^{-1} \left[ \frac{d\mathbf{f}}{dx} - \frac{d\mathbf{K}}{dx} [\mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} - \mathbf{U} \theta^{-2} \mathbf{C}_R \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{U} \theta^{-2} \ddot{\mathbf{q}}] - \right. \\ \left. \mathbf{C} \mathbf{U} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dx} - \frac{d\mathbf{C}}{dx} \mathbf{U} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M} \mathbf{U} \frac{d\ddot{\mathbf{q}}}{dx} - \frac{d\mathbf{M}}{dx} \mathbf{U} \ddot{\mathbf{q}} \right]. \end{aligned} \quad (۷.۴.۴۴)$$

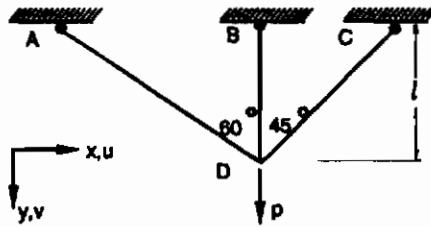
سرانجام با استفاده از تقریب مودال،  $\mathbf{K}^{-1}$  معادله (۷.۴.۳۳)، داریم

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dx} \approx \mathbf{K}^{-1} \left[ \frac{d\mathbf{f}}{dx} - \frac{d\mathbf{K}}{dx} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \right] + \\ \mathbf{U} \theta^{-2} \mathbf{U}^T \left[ \frac{d\mathbf{K}}{dx} \mathbf{U} \theta^{-2} \mathbf{C}_R \dot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{C}}{dx} \mathbf{U} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C} \mathbf{U} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dx} \right] + \\ \mathbf{K}^{-1} \left[ \frac{d\mathbf{K}}{dx} \mathbf{U} \theta^{-2} - \frac{d\mathbf{M}}{dx} \mathbf{U} \right] \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{U} \theta^{-2} \frac{d\ddot{\mathbf{q}}}{dx}. \end{aligned} \quad (۷.۴.۴۵)$$

توجه داشته باشید که محاسبات شامل حل معادلات (۷.۴.۲۹) و (۷.۴.۳۵) برای  $\mathbf{q}$  و  $d\mathbf{q}/dx$  می باشد و به کمک معادله (۷.۴.۴۵)،  $du/dx$  به دست می آید. جزئیات بیشتری را می توان در [27] یافت.

## ۷.۵ تمرینها

۱. با استفاده از روش اجزای محدود، برنامه ای برای محاسبه تغییر مکانها و تنشها در خیرپای سه میله ای نشان داده شده در شکل (۷.۵.۱) بنویسید. همچنین مشتق تنش در عضو  $A$  را نسبت به  $A_A$  به وسیله روش تفاضل مرکزی و پیشرو محاسبه کنید. حالتی را در نظر بگیرید که:  $A_A = A_B = k A_C$ .



شکل ۷.۵.۱ خرابای سه میله ای

الف)  $10^{-m}$   $m$  در نظر بگیرید که  $m$  تعداد رقمهای اعشاری استفاده شده در محاسبات منهای ۲ است. اندازه گام بهینه رانیز بیابید.

ب) کوچکترین مقدار  $k$  که اجازه می دهد خطا کمتر از ۱۰٪ باشد را بیابید.

۲. مشتقات تنش در عضو  $A$  خرابای سه میله ای شکل (۷.۵.۱) را در یک نقطه طراحی حساب کنید، فرض کنید که مساحت هر سه مقطع برابر  $A$  است. ابتدا مشتق را نسبت به مساحت مقطع عضو  $A$  با استفاده از روشهای مستقیم و الحاقی محاسبه کنید. سپس مشتق را نسبت به سطح مقطع های عضوهای  $B$  و  $C$  با استفاده از یکی از روشها حساب کنید.

۳. همه مشتقات دوم تنش در عضو  $A$  مسأله ۲ را نسبت به مساحت های هر سه سطح مقطع حساب کنید.

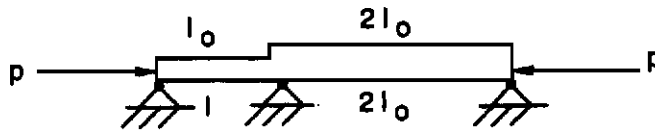
۴. روشی برای محاسبه مشتقات سوم قیود تغییر مکان و تنشها بیابید (حالت ایستایی).

۵. یک تقریب اجزای محدود برای اولین بسامد ارتعاش خرابای مسأله ۱ بر حسب  $A$  و  $l$ ، ضریب ارتجاعی  $E$  و چگالی جرمی  $\rho$  بیابید. از خمش صرف نظر کنید. سپس مشتق بسامد را نسبت به مساحت سطح مقطع هر سه عضو به دست آورید. همه مساحتها یکسان است.

۶. مشتق کمترین مقدار ویژه (از نظر قدر مطلق) مسأله ۵ را نسبت به مقاومت  $c$  یک مستهلک کننده افقی که در نقطه  $D$  قرار دارد. محاسبه کنید. دو حالت زیر را در نظر بگیرید. (i)  $c = 0$ ، (ii) هنگامی که  $c$  برای ساختن یک نسبت استهلاک (منفی قسمت حقیقی تقسیم بر قدر مطلق مقدار ویژه) برابر ۰.۰۵ انتخاب شود (به کمک برون یابی خطی بر پایه قسمت (i) این انتخاب را انجام دهید)

۷. برای افزایش بار کمانش تیر نشان داده شده در شکل (۷.۵.۲) تیر باید سخت شود. مشتق بار

بخش ۷.۵: تمرینها ۳۹۷



شکل ۷.۵.۲ تیر دو دهانه

کمانشی را نسبت به گشتاور ماند قسمت چپ و راست محاسبه کرده و نتیجه بگیرید که اقتصادی ترین راه برای سختی تیر چیست. فرض کنید که هزینه با جرم، و مساحت سطح مقطع با ریشه دوم گشتاور ماند متناسب است.

۸. عبارتی برای مشتقات دوم بار کمانشی نسبت به متغیرهای سازه به دست آورید.

۹. مثال ۷.۳.۴ را برای مشتق نسبت به  $c$  به جای  $k$  تکرار کنید.

۱۰. معادله حرکت

$$m\ddot{w} + c\dot{w} + kw = f(t)$$

را برای یک سیستم جرم-فنر-مستهلك کننده در نظر بگیرید.  $f(t) = f_0 H(t)$  یک تابع گام و

$w(0) = \dot{w}(0) = 0$  است. مشتق بیشترین تغییر مکان نسبت به  $c$  برای حالت  $k/m = 4$ ،

$c/m = 0.05$  و  $f_0/m = 2$  را با استفاده از روش مستقیم محاسبه کنید.

۱۱. مشتقات بیشترین تغییر مکان در مسأله ۱۰ را نسبت به  $c$ ،  $m$ ،  $f_0$  و  $k$  با استفاده از روش الحاقی

بیابید.

۱۲. مسأله ۱۰ را با استفاده از تابع گرین حل کنید.

۱۳. مسأله ۱۰ را با استفاده از روشهای تغییر مکان مودی و شتاب مدی با یک مود منفرد حل کنید.

- [1] Gill, P.E., Murray, W., Saunders, M.A., and Wright, M.H., "Computing Forward-Difference Intervals for Numerical Optimization", SIAM J. Sci. and Stat. Comp., Vol. 4, No. 2, pp. 310-321, June 1983.
- [2] Iott, J., Haftka, R.T., and Adelman, H.M., "Selecting Step Sizes in Sensitivity Analysis by Finite Differences," NASA TM- 86382, 1985.
- [3] Haftka, R.T., "Sensitivity Calculations for Iteratively Solved Problems," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, pp.1535-1546, 1985.
- [4] Haftka, R.T., "Second-Order Sensitivity Derivatives in structural Analysis", AIAA Journal, Vol. 20, pp.1765-1766, 1982.
- [5] Barthelemy, B., Chon, C.T., and Haftka, R.T., " Sensitivity Approximation of Static Structural Response", paper presented at the First World Congress on Computational Mechanics, Austin Texas, Sept. 1986.
- [6] Barthelemy, B., and Haftka, R.T., "Accuracy Analysis of the Semi-analytical Method for Shape Sensitivity Calculations," Mechanics of Structures and Machines, 18, 3, pp. 407-432, 1990.
- [7] Barthelemy, B., Chon, C.T., and Haftka, R.T., "Accuracy Problems Associated with Semi-Analytical Derivatives of Static Response," Finite Elements in Analysis and Design, 4, pp. 249-265, 1988.
- [8] Haug, E.J., Choi, K.K., and Komkov, V., Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, Academic Press, 1986.
- [9] Cardani, C. and Mantegazza, P., "Calculation of Eigenvalue and Eigenvector Derivatives for Algebraic Flutter and Divergence Eigenproblems," AIAA Journal, Vol. 17, pp.408-412, 1979.
- [10] Murthy, D.V., and Haftka, R.T., "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors of General Complex Matrix", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26, pp. 293-311, 1988.
- [11] Nelson, R.B., "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives," AIAA Journal, Vol. 14, pp. 1201-1205, 1976.
- [12] Rogers, L.C., "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors", AIAA Journal, Vol. 8, No. 5, pp. 943-944, 1970.
- [13] Wang, B.P., Improved Approximate Methods for Computing Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics," AIAA Journal, 29 (6), pp. 1018-1020, 1991.
- [14] Sutter, T.R., Camarda, C.J., Walsh, J.L., and Adelman, H.M., "Comparison of Several Methods for the Calculation of Vibration Mode Shape Derivatives", AIAA Journal, 26 (12), pp. 1506-1511, 1988.
- [15] Ojalvo, I.U., "Efficient Computation of Mode-Shape Derivatives for Large Dynamic Systems" AIAA Journal, 25, 10, pp. 1386-1390, 1987.

- [16] Mills-Curran, W.C., "Calculation of Eigenvector Derivatives for Structures with Repeated Eigenvalues", AIAA Journal, 26 (7), pp. 867-871, 1988.
- [17] Dailey, R.L., "Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues", AIAA Journal, 27 (4), pp. 486-491, 1989.
- [18] Wilkinson, J.H., The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, 1965.
- [19] Bindolino, G., and Mantegazza, P., "Aeroelastic Derivatives as a Sensitivity Analysis of Nonlinear Equations," AIAA Journal, 25 (8), pp. 1145-1146, 1987.
- [20] Murthy, D.V., "Solution and Sensitivity of a Complex Transcendental Eigenproblem with Pairs of Real Eigenvalues," Proceedings of the 12th Biennial ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise (DE-Vol. 18-4), Montreal Canada, September 17-20, 1989, pp. 229-234 (in press Int. J. Num. Meth. Eng. 1991).
- [21] Kreisselmeier, G., and Steinhauser, R., "Systematic Control Design by Optimizing a Vector Performance Index", Proceedings of IFAC Symposium on Computer Aided Design of Control Systems, Zurich, Switzerland, 1979, pp.113-117.
- [22] Barthelemy, J-F. M., and Riley, M. F., "Improved Multilevel Optimization Approach for the Design of Complex Engineering Systems", AIAA Journal, 26 (3), pp. 353-360, 1988.
- [23] Kramer, M.A., Calo, J.M., and Rabitz, H., "An Improved Computational Method for Sensitivity Analysis: Green's Function Method with AIM," Appl. Math. Modeling, Vol. 5, pp.432-441, 1981.
- [24] Sandridge, C.A. and Haftka, R.T., "Accuracy of Derivatives of Control Performance Using a Reduced Structural Model," Paper presented at the AIAA Dynamics Specialists Meeting, Monterey California, April, 1987.
- [25] Tadikonda, S.S.K. and Baruh, H., "Gibbs Phenomenon in Structural Mechanics," AIAA Journal, 29 (9), pp. 1488-1497, 1991.
- [26] Williams, D., "Dynamic Loads in Aeroplanes Under Given Impulsive Loads with Particular Reference to Landing and Gust Loads on a Large Flying Boat," Great Britain Royal Aircraft Establishment Reports SME 3309 and 3316, 1945.
- [27] Greene, W.H., Computational Aspects of Sensitivity Calculations in Linear Transient Structural Analysis, Ph.D dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, August 1989.
- [28] Greene, W.H., and Haftka, R.T., "Computational Aspects of Sensitivity Calculations in Transient Structural Analysis" , Computers and Structures, 32, pp. 433-443, 1989.



روشهای تحلیل حساسیت گسسته که در فصل قبلی بیان شد، بسیار کلی اند و می توان آنها را در موارد مختلف تحلیل حساسیت غیر سازه ای مانند سیستم معادلات خطی، مسائل مقدار ویژه و غیره به کار برد. با این همه، آنها در کاربردهای سازه ای دو اثر منفی دارند. اول این که تمام روشهای تحلیل سازه ای، به معادلات گسسته شده که در فصل هفتم بررسی شد، منتهی نمی شوند؛ به عنوان مثال، کدهای پوسته دوار از قبیل [5] FASOR، بدون تبدیل معادلات تعادل به معادلات جبری، مستقیماً از معادلات انتگرال گیری می کنند. دوم این که کار کردن روی معادلات گسسته شده، اغلب نیازمند به دستیابی به لیست برنامه تحلیل سازه ای می باشد که این معادلات را به دست می دهند. متأسفانه بسیاری از برنامه های مشهور تحلیل سازه ای، امکان دستیابی به لیست برنامه را برای کاربرها فراهم نمی کنند. بنابراین مطلوب آن است که روشهای تحلیل حساسیت، کاربرد کلی تر داشته باشند و بدون دستیابی گسترده به لیست برنامه و اطلاع از آن، قابلیت اجرا داشته باشند. روشهای تغییرات تحلیل حساسیت، به وسیله مشتق گیری از معادلات حاکم بر سازه، قبل از گسسته سازی آنها ما را به هدف می رسانند. آن گاه، معادلات حساسیت به کمک برنامه تحلیل سازه می توانند حل شوند. حتی لازم نیست که برنامه تحلیل و محاسبات حساسیت، یکی باشد.

یک مثال از این رویکرد را می توان تیر صفحه ای اولر- برنولی<sup>۱</sup> که با معادله دیفرانسیل زیر، رابطه سازی می شود در نظر گرفت.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = q(x), \quad (۸.۱)$$

1) Euler- Bernoulli



که  $w$  تغییر مکان عرضی،  $EI$  صلیبیت خمشی و  $q$  بار می باشد. معادله (۸.۱) با شرایط مرزی مناسب تکمیل می گردد. تصور کنید که باید یک گروه از سازه هایی را طراحی کنیم که به وسیله این معادله تیر با بارگذاری پیچیده و شرایط مرزی مربوط به تکیه گاههای میانی شبیه سازی شده است. یک برنامه رایانه ای قدیمی داریم که برای حل این مسأله نوشته شده و هیچ سابقه ای از لیست برنامه، در دسترس نیست. اکنون با به کار بردن این برنامه، می خواهیم واکنش حساسیت پاسخ را به تغییرات خواص سختی تیر بررسی کنیم. البته در این نوع موارد، محاسبات حساسیت تفاضل محدود، اولین انتخاب ماست. به هر حال، وجود مشکلات در یافتن اندازه گام مناسب برای مشتقات دقیق (بخش ۷.۱ را ببینید) ما را به اجبار به سوی محاسبات مشتقات تحلیلی سوق می دهد. با مشتق گیری از معادله (۸.۱) نسبت به پارامتر  $p$  (توجه شود که پارامتر  $x$  در این فصل به عنوان متغیر مختصات به کار می رود و پارامتر  $p$  به عنوان متغیر طراحی نمونه استفاده می گردد) که روی گشتاور ماند تیر در طول دهانه آن اثر می گذارد شروع می کنیم.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 w_p}{dx^2} \right] = - \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI_p(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right], \quad (8.2)$$

علامت کاما که به صورت زیرنویس همراه  $p$  نوشته می شود، مفهوم مشتق نسبت به  $p$  را می رساند. با مقایسه معادلات (۸.۱) و (۸.۲) متوجه می شویم هر دو رابطه سمت چپ مشابهی دارند که به ترتیب با توابع مجهول  $w$  و  $w_p$  نوشته شده اند. اگر طرف راست رابطه (۸.۲) را به عنوان بار، در نظر بگیریم، تشابه روابط، کامل می شود. مانند فصل ۷، این طرف راست را بار مجازی می نامیم. اگر آن بار مجازی به تیر اعمال شود، پاسخ به بار مجازی، برابر مشتق پاسخ اصلی نسبت به  $p$  می باشد. اکنون برای استفاده از برنامه تحلیل تیر در محاسبه حساسیت، یک دستور العمل داریم. ما نیاز به نوشتن پس پردازنده ای داریم که  $w$  و مشتق گشتاور ماند  $I$  را بگیرد و بار مجازی را تشکیل داده و خروجی را به شکل مورد نیاز برنامه ما برای تعریف بار، بیان کند.

رویکردهای زیادی برای محاسبات حساسیت با استفاده از روشهای تغییرات وجود دارد. مرجع [2] روشهای مورد نظر و مفاهیم اساسی ریاضی مربوط را به شکل بسیار خوبی ارائه می کند. فصل حاضر با هدفهای بالاتری، سعی در معرفی بعضی از روشهای پایه و ارائه تعدادی مثال دارد. بحث بر اساس اصل کار مجازی که یک اساس مناسب برای تحلیل حساسیت گسسته و پیوسته می باشد، بنا نهاده شده است. اکثر مطالب در این فصل محدود به محاسبه حساسیت نسبت به پارامترهای سختی (اندازه) می شود، ولی

در بخش آخر، حساسیت نسبت به شکل نیز معرفی می شود.

نتیجه های به دست آمده در این فصل، اغلب به قابلیت مشتق گیری پاسخ سازه، نسبت به پارامتر سختی یا شکل بستگی دارد. در سرتاسر این فصل، فرض بر این است که پاسخ سازه، قابلیت مشتق گیری نسبت به پارامتر مورد سؤال را دارد و خواص مشتق گیری میدان حساسیت، نسبت به مختصات فضایی، مانند پاسخ اصلی است.

در نهایت یادآور می شود که مطالب این فصل، نسبتاً به اجمال بیان می شوند و بسیاری از خوانندگان می توانند با رد شدن از بحث مشتقات، سعی کنند روی پیاده سازی نتیجه های نهایی متمرکز شوند. پیشنهاد می شود که ابتدا مقدمه<sup>۱</sup> بخش (۸.۱) مطالعه گردد تا علایم به درستی درک شوند و سپس نکات مربوط به پیاده سازی در انتهای هر بخش مورد مطالعه قرار گیرد تا اطلاعات مربوط به چگونگی پیاده سازی محاسبات حساسیت مورد استفاده در برنامه های تحلیل سازه بدون نیاز به لیست برنامه، فرا گرفته شود.

## ۸.۱ تحلیل ایستایی خطی

معادلات مربوط به پاسخ سازه های ایستا، شامل معادلات کرنش-تغییر مکان، معادلات حاکم و معادلات تعادل می باشد. این معادلات بسته به این که مسائل را سه بعدی، در نظر بگیریم یا موارد خاص از قبیل تنش صفحه ای، تحلیل خمش صفحه یا تحلیل تیر، به شکل های متفاوتی ظاهر می شوند. به منظور دستیابی به نتایجی که کاربرد عمومی داشته باشند، نماد عملگر بودیانسکی<sup>۱</sup> را برای معادلات به کار می بریم. این نماد، باعث خلاصه سازی می شود و محاسبات جبری را آسان می کند. این نماد مجرد است ولی همیشه به آسانی قابل کاربرد نیست. خواننده ای که در فهم این نماد مشکل داشته باشد می تواند معادلات مجرد را برای حالت خاص از قبیل تنش صفحه ای یا تحلیل تیر، تبدیل نماید. برای تحلیل خطی، رابطه<sup>۲</sup> کرنش-تغییر مکان به صورت زیر نوشته می شود.

$$\epsilon = L_1(u), \quad (8.1.1)$$

که  $\epsilon$  تانسور عمومی کرنش و  $u$  بردار تغییر مکان و  $L_1$  یک عملگر دیفرانسیلی خطی است. برای مثال در تحلیل تیر اولر-برنولی، تانسور کرنش تعمیم یافته یک مؤلفه دارد. انحنای  $\kappa$  و معادله<sup>۱</sup> (۸.۱.۱) به

۴۰۴      بانی بهینه سازی مازه ها (فصل ۸: مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

معادله زیر تبدیل می شود.

$$\kappa = w_{,xx} . \quad (۸.۱.۲)$$

کرنش، از کرنش عمومی  $\kappa$  به صورت  $\epsilon = -y\kappa$  به دست می آید که  $y$  فاصله تا محور خنثی تیر می باشد. به هر حال در استفاده از اصل کار مجازی، به کار گرفتن تانسورهای کرنش و تنش عمومی نسبت به کرنش ها و تنش های واقعی راحتتر و مناسبتر است.

برای تحلیل تنش صفحه ای،  $\epsilon$  دارای مؤلفه های کرنش واقعی  $\epsilon_x, \epsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  می باشد که اپراتور  $L_1$  به صورت زیر در می آید.

$$L_1(u) = \left\{ \begin{array}{c} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{array} \right\} . \quad (۸.۱.۳)$$

به هر حال، معادلات حاکم بر حسب تنش های عمومی نوشته می شوند که برآیند تنش هابند. معادلات حاکم خطی، شکل ویژه مناسبی از قانون هوک می باشند و به صورت زیر نوشته می شوند.

$$\sigma = D(\epsilon - \epsilon^t) , \quad (۸.۱.۴)$$

که  $\sigma$  تانسور عمومی تنش،  $D$  ماتریس سختی مصالح و  $\epsilon^t$  کرنش اولیه می باشد (برای مثال جسمی که در یک میدان حرارتی قرار گرفته است). برای مثال در مسأله تنش صفحه ای،  $\sigma$  شامل مؤلفه های برآیند تنش  $N_x, N_y$  و  $N_{xy}$  است، در حالی که برای یک تیر تحت خمش، برآیند تنش گشتاور خمشی مقطع  $M$  است و معادله حاکم به صورت زیر می باشد:

$$M = EI(\kappa - \kappa^t) , \quad (۸.۱.۵)$$

که  $E$  ضریب ارتجاعی و  $I$  لنگر ماند سطح مقطع است.

معادلات تعادل توسط اصل کار مجازی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\sigma \bullet \delta \epsilon = f \bullet \delta u , \quad (۸.۱.۶)$$

که  $f$  میدان نیروی اعمال شده می باشد و علامت نقطه، مفهوم یک ضرب اسکالر است که از

## بخش ۸.۱: تحلیل ایستایی خطی ۲۰۵

انتگرال گیری روی دامنه سازه بدست می آید. برای مثال، برای حالت تنش صفحه ای داریم:

$$\sigma \cdot \delta \epsilon = \int \sigma \cdot \delta \epsilon dA = \int (N_x \delta \epsilon_x + N_y \delta \epsilon_y + 2N_{xy} \delta \gamma_{xy}) dA,$$

و

$$f \cdot \delta u = \int f \cdot \delta u dA = \int (f_x \delta u + f_y \delta v) dA + \int (T_x \delta u + T_y \delta v) d\Gamma_T, \quad (۸.۱.۷)$$

که  $f_x$  و  $f_y$  نیروهای کالبدی در واحد سطح و  $T_x$  و  $T_y$  بردار کشش سطحی روی مرز بارگذاری شده  $\Gamma_T$  می باشند.

میدان تغییر مکان مجازی  $\delta u$  باید قابل مشتق گیری باشد و شرایط مرزی سینماتیک را برآورده نماید، ولی در هر صورت اختیاری خواهد بود. میدان کرنش مجازی  $\delta \epsilon$  از میدان تغییر مکان مجازی از طریق رابطه (۸.۱.۱) به دست می آید.

$$\delta \epsilon = L_1(\delta u). \quad (۸.۱.۸)$$

این نماد عملگر برای معادلات کاملاً متداول است و هم در مسائل پیوسته، و هم در رابطه سازی های گسسته، قابل استفاده می باشد. همچنین برای محاسبات حساسیت نیز بسیار مناسب است. در این بخش، ما فقط حساسیت ها را نسبت به یک پارامتر سختی که در ماتریس سختی مصالح  $D$  ظاهر می شود، در نظر می گیریم. برای مسائل یک بعدی یا دو بعدی، پارامتر می تواند شامل متغیرهای اندازه از قبیل مساحت سطح مقطع تیرها یا ضخامت صفحه ها باشد، زیرا این متغیرها در ماتریس  $D$  ظاهر می شوند (همانند گشتاور ماند مقطع تیر در معادله (۸.۱.۵)).

## ۸.۱.۱ روش مستقیم

برای محاسبه حساسیت به روش مستقیم از معادلات به دست آمده پاسخ سازه نسبت به  $p$  مشتق گیری می شود. سپس یک دسته معادلات برای حساسیت پاسخ به صورت  $u_p$ ،  $\epsilon_p$  و  $\sigma_p$  به دست می آوریم. می توان نشان داد که معادلات حاکم میدانهای حساسیت همانند معادلات پاسخ می باشد، ولی جملات بار گذاری آن متفاوت است و به آن بارهای مجازی می گویند. مفهوم آن این است که اگر در مسأله

۴۰۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۸: مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

اصلی، بار با بار مجازی جایگزین گردد، بسته نرم افزاری تحلیل سازه ای به جای پاسخ، حساسیت های پاسخ را محاسبه خواهد کرد. با مشتق گیری از رابطه کرنش - تغییر مکان شروع می کنیم.

$$\epsilon_p = L_1(u_p). \quad (۸.۱.۹)$$

به طور مشابه با مشتق گیری از معادلات حاکم داریم:

$$\sigma_p = D\epsilon_p + D_p(\epsilon - \epsilon^i), \quad (۸.۱.۱۰)$$

و معادلات دیفرانسیل تعادل به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_p \bullet \delta \epsilon = 0, \quad (۸.۱.۱۱)$$

که  $\delta \epsilon$  از رابطه (۸.۱.۸) به دست آمده و تابع  $p$  نمی باشد، زیرا  $\delta u$  یک میدان اختیاری است. توجه کنید که واحد تمام میدانهای حساسیت، همان واحد میدانهای اصلی است که بر واحد  $p$  تقسیم شده است. برای مثال، اگر  $p$  مساحت سطح مقطع یک عضو خرابی باشد، آن گاه  $\sigma_p$  دارای واحد تنش تقسیم بر سطح می باشد.

اکنون معادلات دیفرانسیلی (۸.۱.۹)، (۸.۱.۱۰) و (۸.۱.۱۱) را با معادلات اصلی (۸.۱.۱)، (۸.۱.۴) و (۸.۱.۶) مقایسه می کنیم. می بینیم که میدان حساسیت  $u_p$ ،  $\epsilon_p$  و  $\sigma_p$  می تواند به عنوان جواب سازه اصلی، تحت یک بار متفاوت که بار مجازی نامیده می شود در نظر گرفته شود. این بارها هیچ یک از اجزای مکانیکی را در بر نمی گیرند و تنها میدان کرنش اولیه  $\epsilon^p$  هستند. این میدان کرنش اولیه با مرتب کردن معادله (۸.۱.۱۰) به صورت زیر به دست می آید:

$$\sigma_p = D(\epsilon_p - \epsilon^p), \quad \epsilon^p = -D^{-1}D_p(\epsilon - \epsilon^i). \quad (۸.۱.۱۲)$$

به طور مثال، برای اعضای خرپا، رابطه بین تنش عمودی (نیروی عضو)  $N$  و کرنش به صورت زیر است:

$$N = EA(\epsilon - \epsilon^i). \quad (۸.۱.۱۳)$$

با مشتق گیری از این رابطه نسبت به  $A$  داریم:

$$N_{,A} = EA[\epsilon_{,A} + (\epsilon - \epsilon^i)/A], \quad (۸.۱.۱۴)$$

بنابراین برای اجرای روش مستقیم، به جای بارهای واقعی باید از یک مقدار کرنش اولیه به صورت  $(\epsilon - \epsilon^i)/A$  استفاده کنیم.

به عنوان مثالی دیگر، یک تنش صفحه ای همسانگرد که معادلات حاکم آن به صورت زیر می باشد را در نظر بگیرید:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (۸.۱.۱۵)$$

با مشتق گیری از رابطه (۸.۱.۱۵) نسبت به ضخامت  $h$ ، می توانیم نشان دهیم که برای یافتن مقدار حساسیت نسبت به تغییرات ضخامت، نیازمند به کار گرفتن یک کرنش اولیه مجازی به صورت  $\epsilon^p = -\epsilon/h$  هستیم. برای به دست آوردن حساسیت نسبت به ضریب پواسون<sup>۱</sup>  $\nu$  داریم:

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{Eh} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{,\nu} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)^2} \begin{bmatrix} 2\nu & 1+\nu^2 & 0 \\ 1+\nu^2 & 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(1-\nu)^2}{2} \end{bmatrix}. \quad (۸.۱.۱۶)$$

که باید کرنش مجازی اولیه زیر را اعمال کنیم

$$\epsilon^p = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} -\nu\epsilon_x - \epsilon_y \\ -\nu\epsilon_y - \epsilon_x \\ (1-\nu)\gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (۸.۱.۱۷)$$

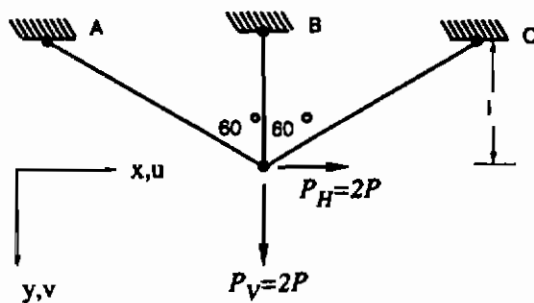
هنگامی که مازه را با استفاده از یک مدل اجزای محدود، تحلیل کنیم، کرنش اولیه مجازی، به یک نیروی گره ای مجاز مثل  $f^p$  تبدیل می گردد که در این صورت داریم:

$$\mathbf{D}\epsilon^p \bullet \delta\epsilon = \mathbf{f}^p \bullet \delta\mathbf{u}. \quad (۸.۱.۱۸)$$

1) Poisson

## ۴۰۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۸: مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

در فنون حل دیگر، بار مجازی از کرنش اولیه با روش متفاوتی به دست می آید. برای مثال، در یک مسأله رابطه سازی پیوسته سه بعدی، کرنش اولیه مجازی  $\epsilon^p$ ، می تواند با نیروهای کالبدی مجازی با مؤلفه های  $f_i = (D\epsilon^p)_{ij}n_j$  و نیروهای سطحی با مؤلفه های  $T_i = (D\epsilon^p)_{ij}n_j$  جایگزین گردد. در این روابط،  $n_j$ ها مؤلفه های بردار عمود بر مرز  $S$  می باشند و علامت کاما همراه اندیس  $j$ ، نمایانگر مشتق نسبت به مختصات  $x_j$  می باشد.



شکل ۸.۱.۱ خرابای سه میله ای

## مثال ۸.۱.۱

مشتق تنش در اعضای A، B و C از خرابای شکل (۸.۱.۱) را نسبت به مساحت عضو B محاسبه کنید. مساحت اسمی سطح مقطع تمام تیرها A است.

فرض می کنیم که مساحت سطح مقطع عضوهای A و C یکسان بمانند و با  $A_A$  و مساحت سطح مقطع عضو B به صورت  $A_B$  نمایش داده شود. با توجه به تقارن مسأله، نیروی عمودی، فقط تغییر مکان عمودی ایجاد کرده و نیروی افقی فقط تغییر مکان افقی. افزون بر این، عضو B در تغییر مکانهای افقی، تأثیری ندارد. به آسانی می توان مقادیر تغییر مکانها را در نقطه اعمال نیرو به صورت زیر به دست آورد.

$$u = 4P_H l / 3EA_A, \quad v = P_V l / [(A_B + 0.25A_A)E]. \quad (\text{الف})$$

نیروهای موجود در اعضای A، B و C به صورت زیر محاسبه می گردند:

$$N_A = 0.57735P_H + \frac{0.25P_V A_A}{A_B + 0.25A_A} = 0.97735P,$$

بخش ۸.۱: تحلیل ایستایی خطی ۲۰۹

$$N_B = \frac{P_V A_B}{A_B + 0.25 A_A} = 1.6P, \quad (\text{ب})$$

$$N_C = -0.57735P_H + \frac{0.25P_V A_A}{A_B + 0.25 A_A} = -0.17735P.$$

به منظور مقایسه بعدی با مشتق‌هایی که با استفاده از روش مستقیم به دست آمده‌اند، می‌توان مشتق این نیروها را نسبت به  $A_B$  به صورت تحلیلی به دست آورد.

$$\frac{dN_C}{dA_B} = \frac{dN_A}{dA_B} = \frac{-0.25P_V A_A}{(A_B + 0.25 A_A)^2} = -0.32P/A.$$

$$\frac{dN_B}{dA_B} = \frac{0.25P_V A_A}{(A_B + 0.25 A_A)^2} = 0.32P/A.$$

برای این مسأله، باید یک کرنش اولیه مجازی به عضو B اعمال کنیم.

$$\epsilon^p = -\epsilon_B/A_B = -N_B/EA_B^2 = -1.6P/EA^2,$$

در حالی که کرنش اولیه مجازی برای اعضای دیگر صفر است. به یاد داشته باشید که مانند تمام میدانهای حساسیت، واحد کرنش اولیه مجازی، به صورت واحد کرنش تقسیم بر واحد  $p$  (در اینجا مساحت) می‌باشد. میدان تغییر مکان ایجاد شده به وسیله‌ای این کرنش اولیه، با اعمال یک جفت نیروی مخالف هم به عضو B به دست آمده است که نیروی اعمال شده به لولای پایینی آن (که واحد آن نیرو بر مساحت می‌باشد) عبارت است از (معادله ۸.۱.۱۸) را ببینید)

$$f^p \delta v = \int_0^l EA_B \epsilon^p \delta \epsilon dy = EA_B \epsilon^p (\delta v/l) l = -1.6P/A \delta v.$$

می‌توان تغییر مکانهای به وجود آمده را با صفر قرار دادن نیروی افقی  $P_H$  و جایگزینی نیروی عمودی  $P_V$  با  $f^p$  در معادله (الف) به دست آورد. این تغییر مکانها، مشتقات تغییر مکانهای اصلیند. بنابراین

$$\frac{du}{dA_B} = 0, \quad \frac{dv}{dA_B} = \frac{(-1.6P/A)l}{(A_B + 0.25 A_A)E} = \frac{-1.28Pl}{EA^2}.$$

به طور مشابه، مشتق  $N_A$  و  $N_C$  از معادله (ب) به صورت زیر بدست می‌آید:



۴۱۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۸: مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

به هر حال نیروی داخلی عضو B به سبب کرنش اولیه مجازی که در ارتباط با مشتق  $N_B$  می باشد را نمی توان با روش مشابه، از معادله (ب) به دست آورد، زیرا اکنون عضو B دارای کرنش اولیه است. در عوض از معادله (۱۴.۱.۸) که به مشتق  $\epsilon_B$  نیاز دارد استفاده می کنیم بنابراین

$$\frac{d\epsilon_B}{dA_B} = \frac{1}{l} \frac{dv}{dA_B} = \frac{-1.28P}{EA^2},$$

و سپس

$$\frac{dN_B}{dA_B} = EA_B \left( \frac{d\epsilon_B}{dA_B} - \epsilon^p \right) = \frac{-1.28P}{A} + \frac{1.6P}{A} = 0.32 \frac{P}{A}.$$

ملاحظه می شود که هر دو مشتق با عباراتی که از مشتق گیری صریح به دست آوردیم مطابقت دارند. برای محاسبه مشتقات تنش ها، از مشتقات نیروها داریم:

$$\sigma_A = \frac{N_A}{A_A}, \quad \sigma_B = \frac{N_B}{A_B}, \quad \sigma_C = \frac{N_C}{A_A},$$

و بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_A}{dA_B} &= \frac{1}{A_A} \frac{dN_A}{dA_B} = \frac{-0.32P}{A^2}, \\ \frac{d\sigma_C}{dA_B} &= \frac{1}{A_A} \frac{dN_C}{dA_B} = \frac{-0.32P}{A^2}, \end{aligned}$$

و

$$\frac{d\sigma_B}{dA_B} = \frac{1}{A_B} \frac{dN_B}{dA_B} - \frac{N_B}{A_B^2} = \frac{0.32P}{A^2} - \frac{1.6P}{A^2} = -1.28 \frac{P}{A^2}.$$

## ۸.۱.۲ روش مجاورتی

اغلب ما به مشتقات تمامی میدان تغییر مکان یا تنش نیاز نداریم و تنها بعضی از آنها مثلاً مشتق تغییر مکان عمودی در یک نقطه یا تنش وان میز در یک نقطه دیگر مورد نیاز است. در این گونه موارد استفاده از روش مجاورتی برای محاسبه این مشتقات اقتصادی تر است. بنابراین برای محاسبه مشتقات تابع تغییر مکان و تنش، از روش فوق استفاده می کنیم. ابتدا تغییر مکان زیر که به وسیله یک انتگرال روی دامنه

سازه  $V$  تعریف شده است را در نظر بگیرید.

$$H = \int h(u, p) dV. \quad (۸.۱.۱۹)$$

با به کار بردن تابع دیرک دلتا به عنوان بخشی از  $h$ ، این رابطه می تواند برای نشان دادن مقدار مؤلفه یک تغییر مکان در یک نقطه نیز استفاده شود. مشتق  $H$  نسبت به پارامتر طراحی  $p$  به صورت زیر است:

$$H_{,p} = \int h_{,p} dV + h_{,u} \bullet u_{,p}, \quad (۸.۱.۲۰)$$

که  $h_{,u}$  میدان برداری شبیه به نیرو می باشد (به خاطر داشته باشید که علامت نقطه مشخص کننده ضرب اسکالر می باشد که بعد از آن روی سازه انتگرال گیری می شود). برای مثال در مورد تنش صفحه ای اگر  $h = u^2 + v^2$  باشد، آن گاه

$$h_{,u} = \left\{ \frac{2u}{2v} \right\}. \quad (۸.۱.۲۱)$$

محاسبه  $h_{,u}$  و  $h_{,p}$  معمولاً ساده است و مشکل اصلی به دست آوردن مشتق میدان تغییر مکان  $u_{,p}$  می باشد. می توان با استفاده از روش مستقیم  $u_{,p}$  را محاسبه نمود، اما به جای آن همان گونه که در زیر نشان داده شده می توانیم با در نظر گرفتن  $h_{,u}$  به عنوان بار، یک مسأله مجاورتی تعریف کنیم و با استفاده از آن  $u_{,p}$  را حذف نماییم. از آن جایی که می خواهیم مشتق  $H$  را با شرط این که معادلات (۸.۱.۱)، (۸.۱.۴) و (۸.۱.۶) برآورده گردند محاسبه کنیم، این معادلات در یک سری ضربگرهای مناسب لاگرانژ ضرب می شوند (که به نام متغیرهای مجاورتی نامیده می شوند) و به  $H$  اضافه می گردند. ضربگرهای لاگرانژ معادلات (۸.۱.۱) و (۸.۱.۴) به ترتیب یک میدان تنش مجاورتی و یک میدان کرنش مجاورتی (همسایه) می باشند. معادله (۸.۱.۶) نمایشگر معادلات تعادل می باشد که به صورت کار انجام شده بر روی میدان تغییر مکان مجازی  $\delta u$  و میدان کرنش مجازی مربوط  $\delta \epsilon = L_1(\delta u)$  نوشته می شود. اگر معادلات تعادل در یک ضربگر لاگرانژ ضرب شوند، با کار انجام شده، هنگامی که ضربگر لاگرانژ به عنوان تغییر مکان مجازی در نظر گرفته شود، معادل است. بنابراین  $\delta u$  را با میدان تغییر مکان مجاورتی جایگزین می کنیم. اگر میدانهای تغییر مکان را با یک اندیس بالای  $(a)$  مشخص کنیم داریم:

$$H^* = H + \sigma^a \bullet (\epsilon - L_1(u)) + \epsilon^a \bullet (\sigma - D(\epsilon - \epsilon^i)) + f \bullet u^a - \sigma \bullet L_1(u^a). \quad (۸.۱.۲۲)$$

چون معادلات (۸.۱.۱)، (۸.۱.۴) و (۸.۱.۶) باید برای تمام مقادیر  $p$  برآورده شوند لذا داریم  $H_p^* = H_p$  و  $H^* = H$ . اکنون از معادله (۸.۱.۲۱) دیفرانسیل می گیریم و سپس میدانهای مجاورتی را به گونه ای تعریف می کنیم که از جمله های مشتقات پاسخ هزینه بررها شویم. مشتق معادله (۸.۱.۲۱) نسبت به  $p$  صورت زیر است:

$$H_p = \int h_p dV + h_{,u} \bullet u_p + (\sigma^a - D\epsilon^a) \bullet \epsilon_p - \sigma^a \bullet L_1(u_p) - \epsilon^a \bullet D_p(\epsilon - \epsilon^i) + (\epsilon^a - L_1(u^a)) \bullet \sigma_p. \quad (۸.۱.۲۳)$$

با توجه به این که میدانهای مجاورتی باید رابطه خطی بین تغییر مکان کرنش و قانون هوک را برآورده کنند می توانیم از جملات شامل  $\sigma_p$  و  $\epsilon_p$  بررها شویم.

$$\epsilon^a = L_1(u_a), \quad (۸.۱.۲۴)$$

$$\sigma^a = D\epsilon^a. \quad (۸.۱.۲۵)$$

با توجه به این که میدان مجاورتی باید معادلات تعادل با یک نیروی کالبدی مساوی  $h_{,u}$  را برآورده کند عبارات شامل  $u_p$  می تواند حذف شود، بنابراین از اصل کار مجازی داریم:

$$\sigma^a \bullet \delta \epsilon = h_{,u} \bullet \delta u. \quad (۸.۱.۲۶)$$

در واقع، اگر در معادله (۸.۱.۲۶)،  $\delta u = u_p$  باشد، می توانیم عبارات شامل  $u_p$  را حذف کنیم. در نهایت داریم:

$$H_p = \int h_p dV - D_p(\epsilon - \epsilon^i) \bullet \epsilon^a. \quad (۸.۱.۲۷)$$

با استفاده از معادله (۸.۱.۱۲) و (۸.۱.۲۵) عبارت فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$H_p = \int h_p dV + \epsilon^p \bullet \sigma^a. \quad (۸.۱.۲۸)$$

بخش ۸.۱: تحلیل ایستایی خطی ۲۱۳

وقتی که برای تحلیل از روش اجرای محدود استفاده می‌کنیم، عبارت دوم را باز هم می‌توان تبدیل کرد. اکنون در معادله (۸.۱.۱۸)،  $\delta \varepsilon = \varepsilon^a$  و  $\delta u = u^a$  قرار می‌دهیم، داریم

$$f^p \bullet u^a = D\varepsilon^p \bullet \varepsilon^a = \varepsilon^p \bullet \sigma^a, \quad (8.1.29)$$

در نتیجه معادله (۸.۱.۲۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$H_p = \int h_p dV + f^p \bullet u^a. \quad (8.1.30)$$

برای تابع تنش کلی نیز می‌توان همین گونه عمل کرد. بحث را محدود به سازه‌ای می‌کنیم که کرنش اولیه در آن وجود ندارد (یعنی بارهای مکانیکی مجاز هستند ولی بار حرارتی، جابجایی و غیره وجود ندارند) و تابع تنش را به صورت:

$$G = \int g(\sigma, p) dV \quad (8.1.31)$$

و مشتق آن را به شکل:

$$G_p = \int g_p dV + g_{\sigma} \bullet \sigma_p, \quad (8.1.32)$$

در نظر می‌گیریم که  $g_{\sigma}$  یک تانسور شبه کرنش است. بار دیگر برای رها شدن از محاسبات پرهزینه، مشتقات پاسخ یعنی  $\sigma_p$  عبارات مجاورتی را به صورت ضربگرهای لاگرانژ به معادلات (۸.۱.۱)، (۸.۱.۴) و (۸.۱.۶) اضافه می‌کنیم

$$G^* = G + \sigma^a \bullet (\varepsilon - L_1(u)) + \varepsilon^a \bullet (\sigma - D\varepsilon) + f \bullet u^a - \sigma \bullet L_1(u^a). \quad (8.1.33)$$

از معادله (۸.۱.۳۳) نسبت به متغیر  $p$  مشتق می‌گیریم، داریم:

$$G_p = G_p^* = \int g_p dV + g_{\sigma} \bullet \sigma_p + (\sigma^a - D\varepsilon^a) \bullet \varepsilon_p - \sigma^a \bullet L_1(u_p) + \varepsilon^a \bullet \sigma_p - \varepsilon^a \bullet D_p \varepsilon - \varepsilon_p \bullet L_1(u^a). \quad (8.1.34)$$

با استفاده از معادله (۸.۱.۱۰) و مرتب کردن عبارات داریم:

$$G_p = \int g_p dV + (\sigma^a + Dg_p - D\varepsilon^a) \bullet \varepsilon_p - \sigma^a \bullet L_1(u_p) \quad (۸.۱.۳۵)$$

$$+ (g_p - \varepsilon^a) \bullet D_p \varepsilon + (\varepsilon^a - L_1(u^a)) \bullet \sigma_p.$$

از معادله (۸.۱.۳۵) دیده می شود که عبارات شامل مشتقات پاسخ را می توان با استفاده از رابطه تغییر مکان- کرنش مجاورتی که به شکل معادله (۸.۱.۲۴) است و قانون هوک برای میدان مجاورتی

$$\sigma^a = D(\varepsilon^a - g_p), \quad (۸.۱.۳۶)$$

و تعادل به شکل:

$$\delta \varepsilon_p = -\delta \varepsilon. \quad (۸.۱.۳۷)$$

حذف نمود. یعنی در این مورد بار مجاورتی یک کرنش اولیه  $g_p$  بدون بار مکانیکی است. آن گاه

$$G_p = \int g_p dV - D_p \varepsilon \bullet (\varepsilon^a - g_p). \quad (۸.۱.۳۸)$$

هر چند معادله (۸.۱.۳۸) بدون نیاز به محاسبه میدان حساسیت طراحی،  $G_p$  را می دهد، ولی دومین جمله آن نیاز به محاسبه مشتقات ماتریس سختی در سطح جزء مورد نظر دارد و ممکن است به اطلاعاتی در زمینه اجزای محدود نیاز باشد. برای غلبه بر این مشکل، توجه داریم که با استفاده از معادله (۸.۱.۳۶) می توان عبارت دوم معادله تحلیل (۸.۱.۳۸) را به شکل:

$$D_p \varepsilon \bullet (\varepsilon^a - g_p) = D_p \varepsilon \bullet D^{-1} \sigma^a, \quad (۸.۱.۳۹)$$

تبدیل کرد. بنابراین با استفاده از معادله (۸.۱.۱۲) که با  $\varepsilon^a = 0$  به صورت  $\varepsilon^p = -D^{-1} D_p$  می آید، می توان  $G_p$  را به شکل زیر نیز نوشت:

$$G_p = \int g_p dV + \varepsilon^p \bullet \sigma^a. \quad (۸.۱.۴۰)$$

برای به دست آوردن معادله (۸.۱.۴۰) از این حقیقت استفاده کرده ایم که اگر  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  دو تانسور باشند داریم  $\sigma_1 \bullet D^{-1} \sigma_2 = D^{-1} \sigma_1 \bullet \sigma_2$ . با قرار دادن تابع تغییر مکان همچنین می توان  $G_p$  را با عبارات

بخش ۸.۱: تحلیل ایستایی خطی ۲۱۵

بار مجازی نوشت. با استفاده از  $(u^e, \epsilon^e)$  به جای  $(\delta u, \delta \epsilon)$  در معادله (۸.۱.۱۸) و (۸.۱.۱۲) داریم:

$$f^p \bullet u^e = D\epsilon^p \bullet \epsilon^e = -D_p \epsilon \bullet \epsilon^e, \quad (۸.۱.۴۱)$$

آن گاه معادله (۸.۱.۳۸) به شکل زیر در می آید:

$$G_p = \int g_p dV + f^p \bullet u^e + D_p \epsilon \bullet g_p. \quad (۸.۱.۴۲)$$

آخرین جمله در معادله (۸.۱.۴۲) هنوز در گرو محاسبه تغییر مکانها و کرنش هایی است که در یک برنامه تحلیل سازه ای عمومی به آسانی قابل انجام نیست. به هر حال هنگامی که  $G$  تنش متوسط (نه تنش کلی) یک جزء است، اغلب اولین و آخرین جمله حذف می شوند. برای مثال تنش متوسط را برای جزء  $i$ ام خرابا در نظر بگیرید. در یک المان خرابایی تنش کلی نیروی عضو  $N$  می باشد. بنابراین:

$$g_p = \frac{1}{Al_i} \quad \text{و} \quad G = \frac{1}{l_i} \int \frac{N}{A} dl_i \quad (۸.۱.۴۳)$$

هنگامی که مشتق  $G$  نسبت به یک متغیر طراحی که اثری بر جزء  $i$ ام ندارد را می خواهیم بدست آوریم؛ اولین و سومین جمله معادله (۸.۱.۴۲) برابر صفر می شود. برای  $G$  مشتق نسبت به سطح جزء  $i$ ام از معادله (۸.۱.۴۲) داریم (با استفاده از  $D_p = E$  و  $\epsilon = N/AE$ )

$$G_p = \frac{1}{l_i} \int (-N/A^2) dl_i + f^p \bullet u^e + \int (N/A)(1/Al_i) dl_i = f^p \bullet u^e. \quad (۸.۱.۴۴)$$

توجه کنید که مانند حالت گسسته، هم روش مستقیم و هم روش مجاورتی از بار مجازی  $f^p$  استفاده می کنند. در روش مستقیم  $f^p$  به عنوان نیروی ایجاد کننده کرنش اولیه مجازی  $\epsilon^p$  در معادله (۸.۱.۱۲) به سازه اعمال می گردد و پاسخ به این نیرو  $u_p$  است. در روش مجاورتی  $f^p$  با میدان تغییر مکان مجاورتی  $u^e$  تشکیل یک ضرب اسکالر می دهد مانند معادله (۸.۱.۴۲).

#### مثال ۸.۱.۲

بار دیگر مثال (۸.۱.۱) را با استفاده از روش مجاورتی به منظور دستیابی به مشتقات تنش در اعضای  $A$

و  $B$  نسبت به سطح مقطع هر دو عضو، حل می کنیم. ابتدا تنش در عضو  $B$  که بر حسب تنش کلی (نیروی عضو)  $N_B$  نوشته شده است را در نظر بگیرید.

$$G = \sigma_B = \frac{1}{l_B} \int \frac{N_B}{A_B} dl_B.$$

بار مجاورتی همان کرنش اولیه  $g, \sigma$  می باشد که در این جا به دلیل این که  $N$  نیروی تنها مؤلفه  $\sigma$  می باشد به صورت  $g, N$  نمایش داده می شود.

$$g, N = \frac{1}{l_B A_B} = \frac{1}{l_A}.$$

توجه شود که کرنش اولیه مجاورتی با واحد (حجم)  $1/$  اندازه گیری می شود در صورتی که کرنش های فیزیکی بدون بعدند. در نتیجه، تمام واحدهای میدان مجاورتی به صورت واحد مربوط تقسیم بر حجم در نظر گرفته می شوند. مانند مثال (۸.۱.۱) اثر این کرنش اولیه با به کار بردن یک جفت نیروی مخالف هم به عضو  $B$  به دست می آید که نیرو در انتها عبارت است از  $E/l$   $E A_B g, N = E/l$ . با استفاده از معادله (الف) مثال (۸.۱.۱) داریم

$$v^a = (E/l)l/[(A_B + 0.25A_A)E] = 0.8/A.$$

معادله (۸.۱.۴۴) را در نیروهای مجازی  $f_P$  که از مثال (۸.۱.۱) به دست آمده یعنی  $1.6P/A$  ضرب می کنیم داریم

$$\frac{d\sigma_B}{dA_B} = G_{A_B} = -1.28 \frac{P}{A^2},$$

که با نتیجه های به دست آمده از مثال (۸.۱.۱) هم خوانی دارد.

سپس مشتق  $\sigma_B$  نسبت به  $A_A$  را محاسبه می کنیم. مانند مثال (۸.۱.۱)، باید نیروی مجازی در اثر تغییرات  $A_A$  را به دست آوریم. این تغییرات، اعضای  $A$ ،  $C$  را نیز تحت تأثیر قرار می دهد و باعث ایجاد کرنش های اولیه مجازی در آنها می شود که به ترتیب برابر  $-e_A/A_A$  و  $-e_C/A_A$  است. این کرنش ها باعث بارهای مجازی  $-N_A/A_A$  در جهت عضو  $A$  و  $-N_C/A_A$  در جهت عضو  $C$  نیز می شود. مؤلفه های بار مجازی عبارتند از:

بخش ۸.۱: تحلیل ایستایی خطی ۴۱۷

$$P_H^p = -\left(\frac{N_A}{A_A} - \frac{N_C}{A_A}\right)\sin 60^\circ = -\frac{P}{A}, \quad P_V^p = -\left(\frac{N_A}{A_A} + \frac{N_C}{A_A}\right)\cos 60^\circ = -0.4\frac{P}{A},$$

که مقادیر  $N_A$  و  $N_C$  از معادله (ب) مثال (۸.۱.۱) جایگزین می گردند. با ضرب کردن بار مجازی در تغییر مکان مجاورتی داریم:

$$\frac{d\sigma_B}{dA_A} = G_{,A_A} = v^a P_V^p = -0.32 \frac{P}{A^2},$$

که می توان به آسانی و به طور مستقیم آنها را بررسی نمود.

سپس مشتقات  $\sigma_A$  با در نظر گرفتن تابعی به صورت

$$G = \frac{1}{l_A} \int \frac{N_A}{A_A} dl_A.$$

محاسبه می شوند.

باید یک کرنش اولیه مجاورتی را به صورت

$$g_{,N} = \frac{1}{l_A A_A} = \frac{1}{2l_A}.$$

به مسأله اعمال کنیم. این کار با اعمال یک جفت نیروی مخالف هم با مقدار  $EA_A g_{,N} = E/2l$  که در امتداد عضو  $A$  می باشند در دو گره عضو  $A$  عملی می شود. مؤلفه های افقی و عمودی نیروی مجاورتی در گره پایین عبارتند از:

$$P_H^a = \frac{0.433E}{l}, \quad P_V^a = \frac{0.25E}{l}.$$

با استفاده از معادله (الف) از مثال (۸.۱.۱) می توان نوشت:

$$v^a = \frac{(0.25E/l)l}{(A_B + 0.25A_A)E} = \frac{0.2}{A}, \quad u^a = \frac{4(0.433E/l)l}{3EA_A} = \frac{0.57735}{A}.$$

برای به دست آوردن مشتق تنش نسبت به  $A_B$ ، تغییر مکانهای مجاورتی را در نیروی مجازی مربوط به  $A_B$  ضرب می کنیم، داریم:

$$\frac{d\sigma_A}{dA_B} = \frac{-1.6P}{A} \frac{0.2}{A} = -0.32 \frac{P}{A^2}.$$



۲۱۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۸: مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

به طور مشابه برای بدست آوردن مشتق تنش نسبت به  $A_A$ ، تغییر مکانهای مجاورتی را در نیروی مجازی مربوط به  $A_A$  ضرب می کنیم، داریم:

$$\frac{d\sigma_A}{dA_A} = \frac{-P}{A} \frac{0.57735}{A} - \frac{0.4P}{A} \frac{0.2}{A} = -0.65735 \frac{P}{A^2}.$$

این نتیجه را می توان با استفاده از عبارت  $N_A$  در معادله (ب) مثال (۸.۱.۱) مستقیماً بدست آورد.

### ۸.۱.۳ نکته هایی در پیاده سازی روش

به طور کلی، پیاده سازی روش مستقیم آسانتر از روش مجاورتی است، به خصوص اگر در خارج از برنامه تحلیل سازه پیاده سازی شود. برای محاسبه مقدار کرنش اولیه مجازی از مقادیر کرنش های واقعی از معادله (۸.۱.۱۲)، روش مستقیم به یک پس پردازش نیاز دارد. مشتق ماتریس سختی مصالح  $D$  که باید در این پس پردازش ارزیابی شود، به شکل قانون هوك استفاده شده در برنامه تحلیل نیاز دارد، اما در پیاده سازی در نرم افزارهای تحلیل اجزای محدود، نیازی به دانستن نوع قانون هوك نیست. مقادیر کرنش مجازی می تواند به عنوان کرنش اولیه ورودی به همان بسته نرم افزاری تحلیل سازه به کار برده شود. خروجی بسته نرم افزاری، به جای پاسخ، میدان حساسیت خواهد بود. اگر بسته نرم افزاری تحلیل سازه کارآیی قبول کرنش اولیه را به صورت ورودی نداشته باشد، اغلب می توان با ترکیبی از میدان درجه حرارت و ضریب انبساط دمایی ناهمسانگرد، کرنش های اولیه را ایجاد کرد.

پیاده سازی روش مجاورتی با تابع تغییر مکان  $H$  از معادله (۸.۱.۱۹) بسیار ساده است. باید سازه را به جای نیروی واقعی با نیروی مجاورتی  $h_u$  تحلیل کنیم. توجه داشته باشید که نیروی مجاورتی  $h_u$  شبیه به نیروی مجاورتی مورد استفاده در حالت گسسته است که نیروی مذکور مشتق قید نسبت به بردار تغییر مکان می باشد (بخش ۷.۲.۱ را ببینید). واحد آنها عبارت از واحد  $h$  تقسیم بر واحد  $u$  است که در حالت کلی واحد نیرو بر واحد حجم نیستند. در نتیجه، واحدهای میدان مجاورتی واحدهای معمول مربوط به میدانهای تغییر مکان، کرنش و تنش نیستند. همچنین به یک پس پردازش که قابلیت انجام محاسبات مربوط به معادله (۸.۱.۲۸) یا معادله (۸.۱.۳۰) را داشته باشد نیازمندیم. معادله (۸.۱.۲۸) شامل کرنش اولیه مجازی معادله (۸.۱.۱۲) است و معادله (۸.۱.۳۰) بار مجازی مربوط به این کرنش، معادله (۸.۱.۱۸)، است. کاربرد معادله (۸.۱.۳۰) معمولاً از معادله (۸.۱.۲۸) آسانتر

## بخش ۸.۲: تحلیل ایستایی غیرخطی و بارهای حدی ۴۱۹

است زیرا فقط به یک ضرب اسکالر بار مجازی در میدان تغییر مکان مجاورتی نیاز دارد. معادله (۸.۱.۳۰) شبیه معادله (۷.۱.۸) می باشد به جز این که نیروی مجازی، بر حسب مشتق ماتریس های سختی به دست نمی آید و بنابراین نیازی به داشتن دانش کامل از بسته نرم افزاری اجزای محدود ندارد. پیاده سازی روش مجاورتی برای یک تابع تنش، مانند معادله (۸.۱.۳۱) پیچیده تر است. ابتدا، نیاز به پیاده سازی محاسبه یک میدان کرنش اولیه  $\epsilon_0$  داریم که معمولاً ساده است. سپس باید معادله (۸.۱.۴۲) را به کار ببریم که نیاز به محاسبات در سطح اجزاء داریم که باید یک برنامه اجزای محدود آن را انجام دهد. از بحث پیشین در مورد معادله (۸.۱.۴۲) می توان نتیجه گرفت که اگر تابع تنش فقط به صورت تنش باشد، این مشکل در بسیاری از موارد به وجود نمی آید.

## ۸.۲ تحلیل ایستایی غیرخطی و بارهای حدی

## ۸.۲.۱ تحلیل ایستایی

در این بخش، نتیجه های بخش قبلی برای مسائل با هندسه غیر خطی، تعمیم داده می شود. ما فقط موردی که غیر خطی بودن به طور مناسبی توسط رابطه زیر بیان گردد را در نظر می گیریم.

$$\epsilon = L_1(u) + \frac{1}{2}L_2(u), \quad (8.2.1)$$

که  $L_2$  یک عملگر همگن از مرتبه دو می باشد. به عنوان مثال برای تغییر شکل غیر خطی یک تیر تحت بارهای جانبی و محوری، کرنش تعمیم یافته، یک مؤلفه کرنش محوری  $\epsilon_x$  و یک مؤلفه انحنای  $\kappa$  دارد و معادله (۸.۲.۱) به صورت زیر نوشته می شود.

$$\left\{ \begin{matrix} \epsilon_x \\ \kappa \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u_{,x} \\ w_{,xx} \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} w_0^2 \\ 0 \end{matrix} \right\}. \quad (8.2.2)$$

تغییرات کرنش بر حسب تغییرات تغییر مکان به صورت زیر نوشته می شود:

$$\delta \epsilon = L_1(\delta u) + L_{11}(u, \delta u), \quad (8.2.3)$$

که  $L_{11}$ ، عملگر خطی دو سویه متقارن می باشد یعنی  $L_{11}(u, v) = L_{11}(v, u)$ ، و به شکل زیر

۴۴۰ سبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۸: مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

تعریف می شود

$$L_2(u + v) = L_2(u) + L_2(v) + 2L_{11}(u, v). \quad (۸.۲.۴)$$

و معادله (۸.۲.۴) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$L_{11}(u, u) = L_2(u). \quad (۸.۲.۵)$$

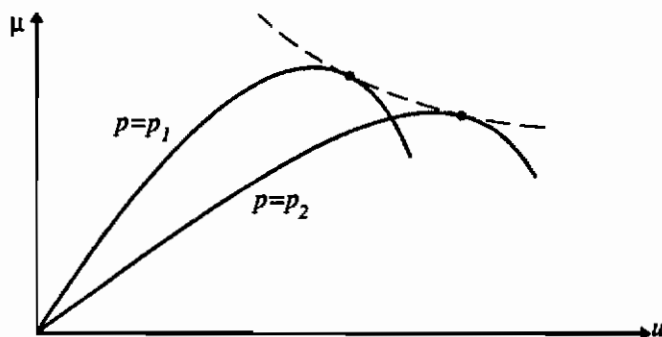
در حل مسائل تحلیلی غیر خطی معمولاً بار به صورت تدریجی از صفر تا مقدار نهایی افزایش می یابد. بنابراین، فرض می کنیم که بار  $f$  و کرنش اولیه  $\epsilon^i$  به پارامتر دامنه بار  $\mu$  به صورت زیر بستگی دارد

$$f = f(\mu) \quad \text{و} \quad \epsilon^i = \epsilon^i(\mu). \quad (۸.۲.۶)$$

آن گاه پاسخ سازه را می توان با حل معادلات (۸.۲.۱)، (۸.۱.۴) و (۸.۱.۶) به صورت تابعی از پارامتر بار  $\mu$  به دست آورد.

متأسفانه در مسائل غیر خطی، پاسخ همیشه به صورت تابع یک متغیره از پارامتر بار  $\mu$  نیست. شکل (۸.۲.۱) یک نمونه منحنی بار-تغییر مکان را برای دو مقدار از پارامتر سختی  $p$  نشان می دهد. در سطوح بار نزدیک به ماکزیمم (بار حدی) برای هر مقدار  $\mu$  دو جواب وجود دارد. اغلب بسته های نرم افزاری تحلیل سازه که برای پاسخ غیر خطی به کار برده می شوند، برای بهتر مشخص کردن منحنی پاسخ، متغیرهای عمومی بیشتری به کار می برند. یک نمونه از این متغیرها طول کمان در فضای  $(u, \mu)$  می باشد. هر پارامتری که به منظور مشخص کردن مسیر تعادل (مسیر حاصل از حل معادلات (۸.۲.۱)، (۸.۱.۴) و (۸.۶) به کار برده می شود، پارامتر مسیر نامیده می شود.

به منظور در نظر گرفتن تغییرات در سازه، می خواهیم هم متغیر بار و هم سختی را همزمان به دلخواه تغییر دهیم. این گونه تغییرات همزمان در محاسبه مشتقات بارهای حدی لازم خواهد بود. شکل (۸.۲.۱) یک مثال از منحنی حاصل از این گونه پارامترهای عمومی تر را نشان می دهد. منحنی خط چین در شکل متصل کننده تمام نقاط حدی برای حالت های با سختی های متفاوت است. برای مشخص کردن مشتقات نسبت به پارامترهای عمومی مسیر از یک نقطه استفاده می کنیم. با دیفرانسیل گیری از معادلات (۸.۲.۱)، (۸.۱.۴) و (۸.۱.۶) نسبت به چنین متغیری داریم:



شکل ۸.۲.۱ نمودار بار-تغییر مکان

$$\dot{\epsilon} = L_1(\dot{u}) + L_{11}(u, \dot{u}), \quad (8.2.7)$$

$$\dot{\sigma} = \dot{D}(\epsilon - \epsilon^i) + D(\dot{\epsilon} - \mu \epsilon^i), \quad (8.2.8)$$

$$\dot{\sigma} \bullet \delta \epsilon + \sigma \bullet L_{11}(\dot{u}, \delta u) = \mu f' \bullet \delta u, \quad (8.2.9)$$

که علامت پرایم<sup>۱</sup> نشان دهنده مشتق نسبت به  $\mu$  می باشد. دومین عبارت در معادله<sup>۱</sup> (۸.۲.۹) مربوط به وابستگی  $\delta \epsilon$  به  $u$  است که در معادله<sup>۱</sup> (۸.۲.۳) دیده می شود.

بیشتر الگوریتم های حل که برای تحلیل های غیر خطی به کار برده می شوند بر اساس افزایش تدریجی متغیر بار  $\mu$  قرار دارند. برای حل، آنها غالباً به محاسبه حساسیت پاسخ نسبت به  $\mu$  نیاز دارند. معادلات (۸.۲.۷) - (۸.۲.۹) را برای این مورد نوشته و حساسیت های بار را با پرایم نشان می دهیم. داریم:

$$\epsilon' = L_1(u') + L_{11}(u, u'), \quad (8.2.10)$$

$$\sigma' = D(\epsilon' - \epsilon^i), \quad (8.2.11)$$

$$\sigma' \bullet \delta \epsilon + \sigma \bullet L_{11}(u', \delta u) = f' \bullet \delta u, \quad (8.2.12)$$

که فرض می شود  $D$  مستقل از بار باشد. محاسبات مورد نیاز برای حل معادلات (۸.۲.۱۰) تا (۸.۲.۱۲) را مدول حساسیت بار می نامیم. این معادلات برای مشتق گیری نسبت به پارامتر بار، کاملاً

1) Prime

۴۴۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۸: مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

شبه به معادلات حاکم در حساسیت نسبت به یک پارامتر سختی که از نوشتن معادلات (۸.۲.۷) تا (۸.۲.۹) برای حالتی با یک پارامتر سختی  $p$  به دست آمد، می باشند. داریم:

$$\varepsilon_{,p} = L_1(u_{,p}) + L_{11}(u, u_{,p}), \quad (8.2.13)$$

$$\sigma_{,p} = D_p(\varepsilon - \varepsilon^i) + D\varepsilon_{,p} = D(\varepsilon_{,p} - \varepsilon^p), \quad (8.2.14)$$

$$\sigma_p \bullet \delta\varepsilon + \sigma \bullet L_{11}(u_p, \delta u) = 0. \quad (8.2.15)$$

با مقایسه این دو سری معادلات در می یابیم که عبارت بار در معادله (۸.۲.۱۲) از معادله (۸.۲.۱۵) حذف گردیده و معادله حاکم (۸.۲.۱۴) شامل یک کرنش اولیه متفاوت است که مقدار آن برابر  $\varepsilon^p$  است که در معادله (۸.۲.۱۲) تعریف شده است. بنابراین، برای پیاده سازی محاسبه حساسیت طراحی در یک بسته نرم افزاری تحلیل سازه، یک مدول حساسیت بار که در آن، بار واقعی و کرنش اولیه با کرنش اولیه مجازی  $\varepsilon^p$  و بار مکانیکی صفر، جایگزین شده اند، استفاده می کنیم.

از دیدگاه تحلیل اجزای محدود، معادلات حساسیت بار با ماتریس سختی تانژانت<sup>۱</sup> بیان می شوند. بنابراین تنها تفاوت بین محاسبه حساسیت خطی و غیر خطی این است که کرنش اولیه مجازی به جای سازه اصلی به سازه تانژانت وارد می شود. اکنون حالتی را در نظر می گیریم که هم معادلات حساسیت بار و هم معادلات حساسیت طراحی خطی باشند، هر چند مسأله تحلیلی غیر خطی باشد. این یک خاصیت عمومی تحلیل حساسیت مسائل غیر خطی می باشد.

می توان نشان داد که اثر غیر خطی بودن روی روش مجاورتی مشابه اثر آن روی روش مستقیم است. یعنی، در مورد یک تابع تغییر مکان  $H$ ، معادله (۸.۱.۱۹)، سازه مجاورتی، معادلات زیر را برآورده می سازد:

$$\varepsilon^a = L_1(u^a) + L_{11}(u, u^a), \quad (8.2.16)$$

$$\sigma^a = D\varepsilon^a, \quad (8.2.17)$$

$$\sigma^a \bullet \delta\varepsilon + \sigma \bullet L_{11}(u^a, \delta u) = h_{,u} \bullet \delta u. \quad (8.2.18)$$

بنابراین، سازه مجاورتی یک سازه تانژانت است که در آن  $h_{,u}$  به عنوان بار اعمال شده می باشد (مرجع [3])

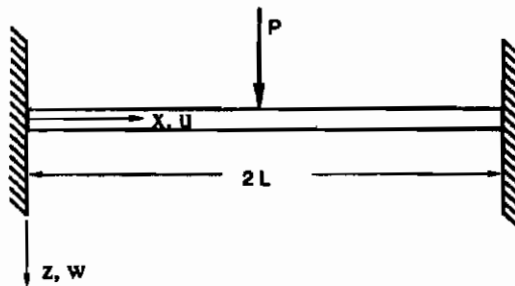
1) Tangent

## بخش ۸.۲: تحلیل ایستایی غیرخطی و بارهای حدی ۴۴۳

را نیز ببینید). برای پیاده سازی محاسبه میدان مجاورتی در یک بسته نرم افزاری تحلیل سازه، در مدول حساسیت بار، باید فقط بار واقعی، با  $p_w$  جایگزین گردد. می توان نشان داد (تمرین ۵) که معادله (۸.۱.۲۸) هنوز قابل استفاده است. به طور مشابه در مورد تابع تنش  $G$  معادله (۸.۱.۳۱) یک کرنش اولیه  $\epsilon_0$  را می توان به سازه تانژانت اعمال کرد و معادله (۸.۱.۲۴) را به دست آورد.

## مثال ۸.۲.۱

تیر نشان داده شده در شکل (۸.۲.۲) دارای مساحت سطح مقطع  $A_0$ ، لنگر مانند  $I = 0.001 A_0 L^2$  است و تحت تأثیر یک دمای ثابت  $T$  (که از دمای بدون تنش جسم اندازه گیری می شود) قرار دارد و بار متغیر عرضی  $\mu P$  به آن اعمال می شود. دمای به کار رفته  $T$  به گونه ای انتخاب گردیده که بار محوری ناشی از آن، نزدیک به بار حدی کمانش تیر می باشد که به صورت  $EA_0 \epsilon^i = EA_0 \alpha T = 7.5 EI_0 / L^2$  است. در این رابطه،  $\alpha$  ضریب انبساط حرارتی و بار اعمالی برابر  $P = 1.2 \times 10^{-4} EA_0$  است. می خواهیم مشتق تغییر مکان در اثر بار  $w_m$  را نسبت به مساحت سطح مقطع  $A$  محاسبه کنیم (فرض می کنیم که  $P$  و  $I$  ثابت باقی می مانند).



شکل ۸.۲.۲ تیر تحت تأثیر کرنش اولیه و بار عمودی

برای یک تیر تحت تأثیر بارهای ترکیبی محوری و خمشی، تانسور کرنش کلی، دارای دو مؤلفه  $\epsilon_x$  و  $\kappa$  بوده و تانسور تنش کلی شامل بار محوری  $N$  و گشتاور خمشی  $M$  می باشد. رابطه غیر خطی تغییر مکان - کرنش برای این تیر، معادله (۸.۲.۲) و قانون هوک به صورت زیر می باشد.

$$N = EA(\epsilon_x - \epsilon^i), \quad M = EI\kappa,$$

۲۲۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۸: مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

که در آن  $\epsilon^i = \alpha T$  است. معادله کار مجازی عبارت است از:

$$\int_0^{2L} (N\delta\epsilon_x + M\delta\kappa)dx = \mu P\delta w_m,$$

که در آن

$$\delta\epsilon_x = \delta u_{,x} + w_{,x}\delta w_{,x}, \quad \delta\kappa = \delta w_{,xx}.$$

ابتدا مسأله تحلیل را به صورت دقیق<sup>۱</sup> بر اساس یک مدل ساده اجزای محدود حل می کنیم. به دلیل تقارن، فقط نیاز به تحلیل نیمه چپ تیر داریم که باید از نصف بار و شرایط تقارن  $w_{,x} = 0$  و  $u = 0$  در وسط تیر استفاده کنیم. سمت چپ تیر را با یک تیر منفرد جزء محدود با تغییرات خطی  $u$  و تغییرات از درجه سه  $w$  تقریب می زنیم. با به کار بردن شرایط مرزی و توابع شکل جزء محدود داریم.

$$u = 0, \quad (w/L) = \bar{w}(3\bar{x}^2 - 2\bar{x}^3), \quad \bar{x} = x/L, \quad \bar{w} = w_m/L.$$

کرنش ها و تنش های کلی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= 18\bar{w}^2(\bar{x} - \bar{x}^2)^2, & \kappa &= (6\bar{w}/L)(1 - 2\bar{x}), \\ \delta\epsilon_x &= 36\bar{w}\delta\bar{w}(\bar{x} - \bar{x}^2)^2, & \delta\kappa &= (6\delta\bar{w}/L)(1 - 2\bar{x}), \\ N &= 18EA\bar{w}^2(\bar{x} - \bar{x}^2)^2 - EA\epsilon^i, & M &= (6EI\bar{w}/L)(1 - 2\bar{x}). \end{aligned}$$

با انتگرال گیری از معادله کار مجازی روی جزء (با بار از صفر تا  $P$  در انتها) داریم

$$1.02857EA\bar{w}^3 + 12(EI/L^2)\bar{w} - 1.2EA\epsilon^i\bar{w} = 0.5\mu P. \quad (\text{الف})$$

معادله (الف) را بر  $EA$  تقسیم می کنیم و با استفاده از رابطه بین مقادیر  $\epsilon^i$ ،  $I$  و  $P$  در حالت  $A = A_0$  داریم:

$$1.02857\bar{w}^3 + 0.003\bar{w} = 6 \times 10^{-5}\mu.$$

برای  $\mu = 1$  داریم  $\bar{w} = 0.01800$ .

1) Closed-form

## بخش ۸.۲: تحلیل ایستایی غیرخطی و بارهای حدی ۴۴۵

قبل از به کار بردن روشهای مستقیم و مجاورتی برای محاسبه  $\bar{w}_A$  حالت تانژانت مشتق نسبت به  $\mu$  را در نظر می گیریم. لذا معادلات (۸.۲.۱۰) تا (۸.۲.۱۲) به شکل زیر نوشته می شوند:

$$\epsilon'_x = u'_{,x} + w_{,x}w'_{,x} = 36\bar{w}\bar{w}'(\bar{x} - \bar{x}^2)^2, \quad \kappa' = w'_{,xx} = 6\bar{w}'(1 - 2\bar{x})/L,$$

$$N' = EA\epsilon'_x, \quad M' = EI\kappa',$$

$$\int_0^L (N'\delta\epsilon_x + M'\delta\kappa + Nw'_{,xx}\delta w_{,x})dx = 0.5P\delta w_m.$$

که از آخرین معادله می توان انتگرال گیری کرد که به صورت زیر در می آید:

$$3.08571EA\bar{w}^2\bar{w}' + 12(EI/L^2)\bar{w}' - 1.2EA\epsilon^i\bar{w}' = 0.5P. \quad (\text{ب})$$

این معادله می تواند از مشتق گیری از معادله (الف) نسبت به  $\mu$  نیز به دست آید.

روش مستقیم: معادلات (۵.۲.۱۳) تا (۵.۲.۱۵) به صورت زیر نوشته می شوند (یادآور می شود که  $I$  ثابت است)

$$\epsilon_{x,p} = u_{,xp} + w_{,x}w_{,xp}, \quad \kappa_{,p} = w_{,xpp},$$

$$N_p = EA[\epsilon_{x,p} + (\epsilon_x - \epsilon^i)/A], \quad M_p = EI\kappa_{,p},$$

$$\int_0^L (N_p\delta\epsilon_x + M_p\delta\kappa + Nw_{,xp}\delta w_{,x})dx = 0.$$

می بینیم که معادلات حساسیت، همان معادلات حالت تانژانت هستند به جز این که به جای بار  $P$ ، از کرنش اولیه مجازی  $\epsilon^p = -(\epsilon_x - \epsilon^i)/A$  استفاده شده است. با استفاده از معادله (۸.۱.۱۸) در می یابیم که کرنش اولیه ناشی از بار مجازی، به شکل زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} P^p\delta w_m &= - \int_0^L E(\epsilon_x - \epsilon^i)\delta\epsilon_x dx = -E \int_0^L [18\bar{w}^2(\bar{x} - \bar{x}^2)^2 - \epsilon^i]36\bar{w}\bar{w}'(\bar{x} - \bar{x}^2)^2 dx \\ &= -1.02857E\bar{w}^3\delta w_m + 1.2E\epsilon^i\bar{w}\delta w_m. \end{aligned} \quad (\text{پ})$$

معادله حساسیت طراحی از معادله حساسیت بار، معادله (ب)، با جایگزین کردن بار واقعی ( $0.5P$ ) با بار مجازی  $P^p$  و جایگذاری  $\bar{w}'$  با  $\bar{w}_A$  بدست می آید که معادله بر حسب  $\bar{w}_A$  به شکل زیر در می آید:

$$3.08571EA\bar{w}^2\bar{w}_A + 12(EI/L^2)\bar{w}_A - 1.2EA\epsilon^i\bar{w}_A = -1.02857E\bar{w}^3 + 1.2E\epsilon^i\bar{w}.$$

(ت)



۴۴۶ سبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۸: مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

این نتیجه با مشتق گیری از معادله (الف) نسبت به  $A$  نیز به دست می آید. با حل کردن معادله برای به دست آوردن  $\bar{w}_A$  داریم:

$$\bar{w}_A = \frac{-1.02857\bar{w}^3 + 0.096\bar{w}}{(3.08571\bar{w}^2 + 0.024)A} = \frac{0.6888}{A}.$$

روش مجاورتی: برای استفاده از روش مجاورتی  $\bar{w}$  را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\bar{w} = H = \int_0^{2L} (w/L)\delta(x-L)dx,$$

که  $\delta(x-L)$  تابع دیرک دلتا می باشد. برای این حالت،  $h_w$  یک بار متمرکز عمودی واحد با مقدار  $1/L$  است که به وسط تیر اعمال می گردد. از آن جا که میدان مجاورتی از مدول حساسیت بار با جایگزینی بار واقعی با  $h_w$  به دست می آید، بنابراین، معادله حالت مجاورتی  $w^a$  می تواند با جایگزینی  $\bar{w}'$  با  $\bar{w}^a$  و  $0.5P$  با  $1/L$  در معادله (ب) به دست آید.

$$\bar{w}^a = [3.08571EA\bar{w}^2 + 12(EI/L^2) - 1.2EA\epsilon^4]^{-1}/L.$$

آن گاه از معادله (۸.۱.۳۰)،  $w_A$  به صورت زیر به دست می آید.

$$\bar{w}_A = H_A = P^p w(l/2) = LP^p \bar{w}^a$$

که این نتیجه با نتیجه حاصل از روش مستقیم یکی است.

## ۸.۲.۲ بارهای حدی

اکنون سراغ محاسبه یک بار حدی می رویم؛ در این جا معادلات حساسیت بار یعنی معادلات (۸.۲.۱۰) تا (۸.۲.۱۲) مفرد می شوند. برای چاره جویی مسأله ای که دارای شرایط منفرد است، معمول این است که مسیر پاسخ را با پارامتر دیگری به جز بار (به عنوان مثال یک مؤلفه تغییر مکان یا یک متغیر طول کمان) تعریف می کنند. معادلات (۸.۲.۷) تا (۸.۲.۹) را برای این حالت به گونه ای در نظر می گیریم که پارامتر پاسخ و  $\mu$  را کنترل کنند و نه سختی را (یعنی  $\dot{D} = 0$ ). در نقطه حدی،  $\mu = 0$  و مشتق پاسخ نسبت به پارامتر مسیر را با زیرنویس مشخص می کنیم. بنابراین معادلات (۸.۲.۷) تا

(۸.۲.۹) به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\varepsilon_1 = L_1(u_1) + L_{11}(u^*, u_1), \quad (8.2.19)$$

$$\sigma_1 = D\varepsilon_1, \quad (8.2.20)$$

$$\sigma_1 \bullet \delta\varepsilon + \sigma^* \bullet L_{11}(u_1, \delta u) = 0, \quad (8.2.21)$$

که علامت ستاره نشانگر پاسخ در نقطه حدی است. توجه کنید که معادلات (۸.۲.۱۹) تا (۸.۲.۲۱) با قسمت همگن معادلات حساسیت بارها (۸.۲.۱۰) تا (۸.۲.۱۲) شبیه هستند. این حقیقت که معادلات همگن دارای جواب غیر صفرند، نشانگر این است که معادلات حساسیت بارها به صورت منفردند (همان طور که در نقاط حدی انتظار می رود). منفرد بودن نه فقط در نقاط حدی بلکه در نقطه شاخه نیز اتفاق می افتد؛ در این جا، جواب معادلات (۸.۲.۱) تا (۸.۲.۱۲) منحصر به فرد نیست. در یک نقطه شاخه، معادلات (۸.۲.۱۹) تا (۸.۲.۲۱) برقرار است، حتی اگر  $\mu \neq 0$  باشد. چه در بار حدی و چه در کمانش شاخه، به  $u_1$  مود کمانشی گفته می شود.

برای محاسبه مشتق بار حدی  $\mu$  نسبت به یک پارامتر سختی  $p$  باید معادلات (۸.۲.۷) تا (۸.۲.۹) به گونه ای نوشته شوند که بتوان همزمان سختی و بار را تغییر داد. اما هنگام تغییر سختی، باید مقدار بار را در حد آن نگه داشت. این مسیر با  $\nu$  مشخص می شود و در شکل (۸.۲.۱) با خط چین نشان داده شده است در طول مسیر داریم:

$$p = \nu, \quad \mu = \mu^*(p), \quad u = u^*(p). \quad (8.2.22)$$

برای مشخص کردن تغییر همزمان  $p$  و بار، زیرنویس  $p$  را برای مشتق و علامت ستاره را برای بار حدی به کار گرفته ایم، بنابراین معادلات (۸.۲.۷) تا (۸.۲.۹) به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\varepsilon_p^* = L_1(u_p^*) + L_{11}(u^*, u_p^*), \quad (8.2.23)$$

$$\sigma_p^* = D_p(\varepsilon^* - \varepsilon^i) + D(\varepsilon_p^* - \mu_p^* \varepsilon^i), \quad (8.2.24)$$

$$\sigma_p^* \bullet \delta\varepsilon + \sigma^* \bullet L_{11}(u_p^*, \delta u) = \mu_p^* f' \bullet \delta u. \quad (8.2.25)$$

اکنون می توان با جایگزینی  $\delta u = u_p^*$  در معادله (۸.۲.۲۵)، رابطه زیر را برای مشتق بار حدی به

دست آورد.

$$\mu_p^* = \frac{\sigma_p^* \bullet \varepsilon_1 + \sigma^* \bullet L_{11}(u_p^*, u_1)}{f' \bullet u_1} \quad (۸.۲.۲۶)$$

این معادله به مشتقات پاسخ پیش کمانش نیاز دارد. این مشتقات را می توانیم بدون استفاده از یک میدان مجاورتی و با توجه به تشابه صورت کسر با آنچه از جایگزینی  $u = u_p^*$  در معادله (۸.۲.۲۱) به دست می آید حذف نمود.

$$\sigma_1 \bullet \varepsilon_p^* + \sigma^* \bullet L_{11}(u_1, u_p^*) = 0. \quad (۸.۲.۲۷)$$

برای بیشتر شبیه ساختن معادله (۸.۲.۲۷) به صورت کسر معادله (۸.۲.۲۶)، از معادلات (۸.۲.۲۴) و (۸.۲.۲۱) برای نوشتن مجدد معادله (۸.۲.۲۷) به صورت زیر استفاده می کنیم

$$\sigma_p^* \bullet \varepsilon_1 - D_{,p}(\varepsilon^* - \varepsilon^i) \bullet \varepsilon_1 + \mu_p^* D\varepsilon^{ii} \bullet \varepsilon_1 + \sigma^* \bullet L_{11}(u_1, u_p^*) = 0. \quad (۸.۲.۲۸)$$

سرانجام با ترکیب کردن معادلات (۸.۲.۲۶) و (۸.۲.۲۸)، به شکلی از مشتق بار حدی نسبت به پارامتر سختی به صورت زیر می رسیم:

$$\mu_p^* = \frac{D_{,p}(\varepsilon^* - \varepsilon^i) \bullet \varepsilon_1}{f' \bullet u_1 + D\varepsilon^{ii} \bullet \varepsilon_1} \quad (۸.۲.۲۹)$$

که به مشتقات پاسخ پیش کمانش نیاز ندارد. این عبارت می تواند برای موارد محاسبه اجزای محدود، بیشتر ساده سازی شود. با استفاده از معادلات (۸.۱.۱۲) و (۸.۱.۱۸) داریم:

$$\mu_p^* = \frac{-f^{pm} \bullet u_1}{(f' + f^{ii}) \bullet u_1}, \quad (۸.۲.۳۰)$$

که  $f^{pm}$  بار مجازی معادله (۸.۱.۱۸) است که در نقطه بار حدی ارزیابی گردیده و  $f^{ii}$  بار معادل گره ای مربوط به کرنش اولیه  $\varepsilon^i$  می باشد.

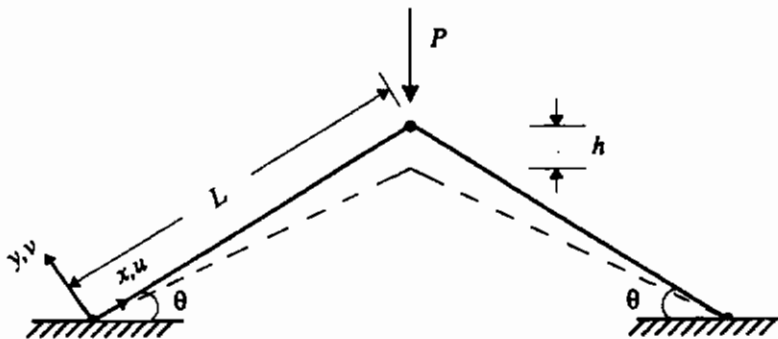
محاسبات بالا را می توان برای کمانش شاخه نیز به کار برد. یادآور می شود که برای کمانش شاخه  $\mu$  در معادله (۸.۲.۹) صفر نیست. شرط سازگاری برای این معادله این است که طرف راست بر جواب غیر صفر مسأله همگن  $u_1$  متعامد باشد؛ یعنی برای مسأله شاخه،  $(f' + f^{ii}) \bullet u_1 = 0$

## بخش ۸.۲: تحلیل ایستایی غیرخطی و بارهای حدی ۲۲۹

نمی توانیم معادلات (۸.۲.۳۰) و (۸.۲.۲۹) را استفاده کنیم. حساسیت بارهای کمانش شاخه در بخش بعدی بحث خواهد شد.

## مثال ۸.۲.۲

خرپای دو عضوی نشان داده شده در شکل ۸.۲.۳ تحت بار ثابت  $P$  و دمای متغیر منفی  $\mu T$  قرار گرفته است. هنگامی که خرپا سرد می شود، تغییر مکان  $h$  در اثر بار  $P$  افزایش خواهد یافت تا به یک نقطه حدی می رسد و خرپا متلاشی می گردد. می خواهیم مشتق عامل بار حدی  $\mu^*$  را نسبت به مساحت سطح مقطع  $A$  برای  $A = A_0$  محاسبه کنیم. داده های دیگر مسأله  $P/EA_0 = 0.001$ ،  $\alpha T = 0.01$  و  $\theta = 10^\circ$  می باشد که  $E$  ضریب ارتجاعی و  $\alpha$  ضریب انبساط حرارتی است.



شکل ۸.۲.۳ خرپای دو میله ای تحت تأثیر بار ترکیبی مکانیکی و حرارتی

به دلیل تقارن، می توانیم تنها نصف خرپا را با نصف بار مکانیکی اعمال شده به آن تحلیل کنیم. مختصات  $x$  را در امتداد طول خرپا انتخاب می کنیم. رابطه کرنش - تغییر مکان، قانون هوک و معادله کار مجازی به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\epsilon = u_{,x} + 0.5(u_{,x}^2 + v_{,x}^2), \quad N = EA(\epsilon + \mu\alpha T), \quad \int_0^L N \delta \epsilon dx = 0.5P\delta h,$$

که

$$\delta \epsilon = \delta u_{,x} + u_{,x} \delta u_{,x} + v_{,x} \delta v_{,x}$$

۴۴۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۸: مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

از آن جا که مسأله ما یک خریاست می توانیم فرض کنیم که  $u$  و  $v$  به طور خطی با  $x$  تغییر می کنند و داریم:

$$u_x = -\bar{h}\sin\theta, \quad v_x = -\bar{h}\cos\theta, \quad \text{که} \quad \bar{h} = h/L,$$

بنابراین:

$$\epsilon = -\bar{h}\sin\theta + 0.5\bar{h}^2, \quad \delta\epsilon = -\delta\bar{h}\sin\theta + \bar{h}\delta\bar{h},$$

و

$$N = EA(-\bar{h}\sin\theta + 0.5\bar{h}^2 + \mu\alpha T).$$

با جایگزینی در معادله کار مجازی داریم:

$$EA(-\bar{h}\sin\theta + 0.5\bar{h}^2 + \mu\alpha T)(-\sin\theta + \bar{h})\delta\bar{h} = 0.5P\delta\bar{h}.$$

با تقسیم معادله به  $0.5EA$  و مرتب سازی دوباره و استفاده از اطلاعات داده شده در مسأله می توان نوشت

$$\bar{h}^3 - 0.5209\bar{h}^2 + 0.02(3.015 + \mu)\bar{h} = 0.001A_0/A + 0.003473\mu. \quad (\text{الف})$$

از معادله (الف) می توان پاسخ خریا به افزایش دما را پیش بینی کرد. برای این کار با یک پارامتر بار داده شده  $\mu$  باید یک معادله درجه سوم حل شود. با این وجود می توان با افزایش تدریجی  $\bar{h}$  نیز برآیند  $\mu$  را محاسبه کرد. از منحنی می توان دریافت که ضریب بار محدود کننده مربوط به تغییر مکان  $\bar{h} = 0.09424$  برابر  $\mu^* = 0.56274$  است. با توجه به این که مسأله فقط یک درجه آزادی دارد، حالت (مود) کمانش فقط دارای یک مؤلفه  $\bar{h}$  می باشد و می توان مقدار آن را واحد در نظر گرفت.

برای محاسبه حساسیت  $\mu$  با استفاده از معادله (۸.۲.۳۰) همچنین به  $\epsilon' - \epsilon$  در نقطه حدی نیازمندیم. با استفاده از عبارت کرنش بر حسب تابعی از  $\bar{h}$  داریم:

$$\epsilon^* - \epsilon'^* = -\bar{h}^*\sin\theta + 0.5(\bar{h}^*)^2 + \mu^*\alpha T = -0.006297.$$

کرنش اولیه مجازی برای یک جزء خریا به صورت  $(\epsilon - \epsilon')/A$  می باشد (معادله (۸.۱.۱۴) را ببینید).

## بخش ۸.۲: تحلیل ایستایی غیرخطی و بارهای حدی ۴۳۱

بنابراین مقدار بار مجازی به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$f^P = -E(\epsilon'' - \epsilon^{ie}) = 0.006297E.$$

بار مجازی شامل دو نیروی هم راستا با عضو خراب می باشد که در دو انتهای آن اعمال می شود. همچنین باید بار مجازی مربوط به  $\epsilon'' = -\alpha T$  نیز محاسبه گردد. مقدار این نیرو عبارت است از:

$$f'' = -EA\alpha T = -0.01EA.$$

این نیرو نیز در راستای عضو می باشد. اکنون با استفاده از معادله (۸.۲.۳۰) و توجه به این که برای مسأله مورد نظر ما  $f' = 0$  می باشد داریم.

$$\mu_{,A}^* = \frac{-0.006297E \cos(90^\circ + \theta)}{-0.01EA \cos(90^\circ + \theta)} = \frac{0.6297}{A_0}.$$

صحت این نتیجه را با تفاضلهای محدود بررسی می کنیم. با افزایش یک درصدی مساحت و جایگزین نمودن  $A = 1.01A_0$  در معادله (الف) و حل مجدد  $\mu^* = 0.56899$  به دست می آید. تقریب تفاضل محدود برای مشتق به صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_{,A}^* \approx \frac{0.56899 - 0.56274}{0.01A_0} = \frac{0.625}{A_0},$$

که با مشتق تحلیلی یک هم خوانی منطقی دارد. •••

## ۸.۲.۳ نکات پیاده سازی و اجرا

معمولاً در یک بسته نرم افزاری تحلیل سازه برای تحلیل غیر خطی، برای تولید مشتقات بارهای اعمالی نسبت به پارامتر بار  $\mu$  و برای حل معادلات تانژانت تعادل به ازای هر مقدار بار، ابزار خاصی پیش بینی می شود. برای حساسیت پاسخ ایستایی در روش مستقیم فقط قسمت دوم مورد نیاز است. روش گفته شده عیناً مشابه روش استفاده شده در حالت خطی است (بخش ۸.۱.۳ را ببینید). بار واقعی با کرنش های اولیه مربوط به تغییر سختی (معادله ۸.۱.۱۲) جایگزین می گردد و معادلات تانژانتی تعادل به وسیله بسته نرم افزاری تحلیل سازه حل می شود. آن گاه خروجی بسته نرم افزاری، حساسیت به متغیر سختی

خواهد بود.

روش مجاورتی مشابه روش استفاده شده در حالت خطی می باشد. همان بار مجاورتی استفاده می شود اما به سیستم تانژانتی اعمال می گردد. معادلات (۸.۱.۲۸) و (۸.۱.۴۲) هم قابل استفاده هستند. با این وجود برای تحلیل غیر خطی، استفاده از روش مجاورتی مانند حالت خطی، دلیل محکمی وجود ندارد. در تحلیل غیر خطی هزینه تحلیل، خیلی بیشتر از هزینه محاسبات حساسیت (که همیشه خطی اند) می باشد. بنابراین، حتی هنگامی که تعداد توابع پاسخی که باید دیفرانسیل گیری شوند، خیلی کمتر از تعداد متغیرهای طراحی باشد، باز هم روش مستقیم یک انتخاب منطقی است.

برای حساسیت بارهای حدی، کاربرد معادله (۸.۲.۳۰) ساده است. در این حالت محاسبه بار مجازی مربوط به تغییر سختی و دو ضرب اسکالر: یکی بار مجازی و دیگری بار واقعی (که هم شامل مؤلفه های مکانیکی و هم شامل کرنش اولیه است) در مود ارتعاشی مورد نیاز می باشد.

### ۸.۳ ارتعاش و گمانش

ابتدا ارتعاشات هارمونیک آزاد کوچک را با بسامد  $\omega$  که به حالت تعادل غیر خطی  $(u(\mu), \varepsilon(\mu), \sigma(\mu))$  وابسته به پارامتر بار  $\mu$  اضافه شده در نظر می گیریم. میدانهای دامنه ارتعاشی را با  $u_1, \varepsilon_1$  و  $\sigma_1$  نشان می دهیم. این میدانهای دامنه ارتعاشی را می توان به صورت یک اغتشاش کوچک در حالت تعادل غیر خطی در نظر گرفت. بنابراین، معادلاتی که این میدانها آنها را برآورده می سازند، با اضافه کردن یک اغتشاش کوچک به معادلات میدان غیر خطی (۸.۲.۱)، (۸.۱.۴)، (۸.۱.۶) و با جایگزین کردن نیروی کالبدی  $f$  با یک نیروی مانند دالامبر<sup>۱</sup> به دست می آیند. با فرض این که هیچ کرنش اولیه وجود ندارد، داریم:

$$\varepsilon_1 = L_1(u_1) + L_{11}(u, u_1), \quad (8.3.1)$$

$$\sigma_1 = D\varepsilon_1, \quad (8.3.2)$$

$$\sigma_1 \cdot \delta\varepsilon + \sigma \cdot L_{11}(u_1, \delta u) = \omega^2 M u_1 \cdot \delta u, \quad (8.3.3)$$

که  $M$  مشخص کننده تانسور جرم بوده و  $\delta\varepsilon$  از معادله (۸.۲.۳) به دست می آید. توجه شود که این

1) D'Alembert

## بخش ۸.۳: ارتعاش و کماتش ۴۴۳

معادلات عیناً شبیه معادلات حساسیت بار (۸.۲.۱۰) تا (۸.۲.۱۲) هستند به جز این که  $\mathcal{E}$  با بار ماند جایگزین شده است. با در نظر گرفتن  $\delta u = u_1$  در معادله (۸.۳.۳) نسبت ریلی<sup>۲</sup> برای بسامد ارتعاشی به صورت زیر به دست می آید:

$$\omega^2 = \frac{\sigma_1 \bullet \varepsilon_1 + \sigma \bullet L_2(u_1)}{Mu_1 \bullet u_1} \quad (۸.۳.۴)$$

در یک بارگذاری استاتیکی، سازه در یک بار  $\mu^*$  مربوط به حالت پیش کماتشی  $u^* = u(\mu^*)$ ،  $\sigma^* = \sigma(\mu^*)$ ،  $\varepsilon^* = \varepsilon(\mu^*)$  کماتش می کند. بار کماتشی مربوط به حالت بسامد ارتعاشی صفر است. بنابراین حالت مود کماتشی  $u_1$  و  $\sigma_1$  و  $\varepsilon_1$  معادلات (۸.۳.۱)، (۸.۳.۲) و (۸.۳.۳) را با  $\omega = 0$  و  $u = u^*$ ،  $\sigma = \sigma^*$  برآورده می سازند.

## ۸.۳.۱ روش مستقیم

برای محاسبه مشتق بسامد نسبت به یک پارامتر سختی  $p$ ، با دیفرانسیل گیری از معادلات (۸.۳.۱)، (۸.۳.۲) و (۸.۳.۳) نسبت به  $p$  شروع می کنیم. سپس مقدار  $\delta u$  را برابر شکل مود  $u_1$  قرار داده و با استفاده از معادله (۸.۲.۵) داریم:

$$\varepsilon_{1,p} = L_1(u_{1,p}) + L_{11}(u_p, u_1) + L_{11}(u, u_{1,p}), \quad (۸.۳.۵)$$

$$\sigma_{1,p} = D_p \varepsilon_1 + D \varepsilon_{1,p}, \quad (۸.۳.۶)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,p} \bullet \varepsilon_1 + \sigma_1 \bullet L_{11}(u_p, u_1) + \sigma_p \bullet L_2(u_1) + \sigma \bullet L_{11}(u_{1,p}, u_1) \\ = (\omega^2)_{,p} Mu_1 \bullet u_1 + \omega^2 M_{,p} u_1 \bullet u_1 + \omega^2 Mu_{1,p} \bullet u_1. \end{aligned} \quad (۸.۳.۷)$$

مشتقات حالت (مود) ارتعاشی  $\sigma_{1,p}$  را می توان از معادله (۸.۳.۷) ابتدا با قرار دادن  $\delta u = u_{1,p}$  در معادله (۸.۳.۳) و سپس استفاده از معادله (۸.۲.۳) حذف نمود. بنابراین داریم:

$$\sigma_1 \bullet [L_1(u_{1,p}) + L_{11}(u, u_{1,p})] + \sigma \bullet L_{11}(u_1, u_{1,p}) = \omega^2 Mu_1 \bullet u_{1,p}. \quad (۸.۳.۸)$$

سپس با کم کردن معادله (۸.۳.۸) از معادله (۸.۳.۷) و استفاده از معادلات (۸.۳.۵) و (۸.۳.۶)

1) Rayleigh



می توان نوشت (تمرین ۷)

$$(\omega^2)_{,p} = \frac{\mathbf{D}_{,p} \boldsymbol{\epsilon}_1 + 2\sigma_1 \bullet \mathbf{L}_{11}(\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_1) + \sigma_{,p} \bullet \mathbf{L}_2(\mathbf{u}_1) - \omega^2 \mathbf{M}_{,p} \mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_1}{\mathbf{M} \mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_1} \quad (۸.۳.۹)$$

اولین و آخرین عبارت در صورت کسر معادله (۸.۳.۹) به ترتیب مربوط به مشتقات ماتریس سختی و ماتریس جرم در معادله (۷.۳.۵) می باشد. وقتی مشتقات بسامدهای طبیعی را محاسبه می کنیم، جملات دیگر صورت کسر حذف می شوند. برای بسامدهای ارتعاشی یک سازه تحت بار، به جمله دیگری که شامل مشتقات میدان استاتیکی  $\mathbf{u}$  و  $\sigma$  نسبت به  $p$  باشد، نیاز داریم. این گونه مشتقات باید از حل معادلات (۸.۲.۱۳) تا (۸.۲.۱۵) محاسبه گردند.

مشتق بار کمانشی با شرط  $\omega^2 = 0$  در کمانش به دست می آید. همان گونه که  $p$  تغییر می کند،  $\mu^*$  باید همزمان با آن تغییر کند به گونه ای که  $\omega^2$  برابر صفر باقی بماند. یعنی  $d(\omega^2) = 0$ . بنابراین:

$$d(\omega^2) = (\omega^2)_{,p} dp + (\omega^2)' d\mu^* = 0 \quad (۸.۳.۱۰)$$

که علامت پریم مشخص کننده مشتق نسبت به  $\mu$  می باشد. اولین عبارت در معادله (۸.۳.۱۰) تغییر در  $\omega^2$  یک سطح بار معین بوده و دومین عبارت، تغییر در  $\omega^2$  مربوط به تغییر در سطح بار می باشد. مجموع این دو تغییر صفر می شوند به گونه ای که بسامد در بار کمانشی، صفر باقی می ماند. از معادله (۸.۳.۱۰) داریم:

$$\mu_{,p}^* = - \frac{(\omega^2)_{,p}}{(\omega^2)'} \quad (۸.۳.۱۱)$$

برای محاسبه مشتق بسامد نسبت به پارامتر بار  $\mu$ ، از دیفرانسیل گیری از معادلات (۸.۳.۱) تا (۸.۳.۳). نسبت به  $\mu$  و سپس قرار دادن  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_1$  شروع می کنیم.

$$\boldsymbol{\epsilon}'_1 = \mathbf{L}_1(\mathbf{u}'_1) + \mathbf{L}_{11}(\mathbf{u}', \mathbf{u}_1) + \mathbf{L}_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{u}'_1), \quad (۸.۳.۱۲)$$

$$\sigma'_1 = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}'_1, \quad (۸.۳.۱۳)$$

$$\sigma'_1 \bullet \boldsymbol{\epsilon}_1 + \sigma_1 \bullet \mathbf{L}_{11}(\mathbf{u}', \mathbf{u}_1) + \sigma' \bullet \mathbf{L}_2(\mathbf{u}_1) + \sigma \bullet \mathbf{L}_{11}(\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}_1) = (\omega^2)' \mathbf{M} \mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_1 + \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u}'_1 \bullet \mathbf{u}_1. \quad (۸.۳.۱۴)$$

بخش ۸.۳: ارتعاش و کماتش ۲۳۵

سپس مشتقات میدان ارتعاشی نسبت به  $\mu$  را با جایگزینی  $u_1' = \delta u$  در معادله (۸.۳.۳) و استفاده از معادله (۸.۲.۳) حذف می‌کنیم.

$$\sigma_1 \bullet [L_1(u_1') + L_{11}(u, u_1')] + \sigma b |L_{11}(u_1, u_1') = \omega^2 M u_1 \bullet u_1', \quad (۸.۳.۱۵)$$

و سپس با کم کردن معادله (۸.۳.۱۵) از معادله (۸.۳.۱۴) و استفاده از معادلات (۸.۳.۲)، (۸.۳.۱۲) و (۸.۳.۱۳) داریم:

$$(\omega^2)' = \frac{2\sigma_1 \bullet L_{11}(u_1', u_1) + \sigma' \bullet L_2(u_1)}{M u_1 \bullet u_1}. \quad (۸.۳.۱۶)$$

در نهایت با جایگزین کردن مقادیر معادلات (۸.۳.۹) و (۸.۳.۱۶)، که در بار کماتشی ارزیابی گردیده‌اند، در معادله (۸.۳.۱۱) داریم:

$$\mu_{ip}^* = - \frac{D_p \epsilon_1 \bullet \epsilon_1 + 2\sigma_1 \bullet L_{11}(u_{ip}^*, u_1) + \sigma_p^* \bullet L_2(u_1)}{2\sigma_1 \bullet L_{11}(u_1'', u_1) + \sigma_1'' \bullet L_2(u_1)}, \quad (۸.۳.۱۷)$$

که علامت ستاره مشخص کننده مقادیر پیش کماتشی ارزیابی شده در بار کماتشی است. توجه داشته باشید که میدان  $\sigma_1$  و  $u_1$  مشخص کننده بسامد- صفر یا حالت مود کماتشی است.

### مثال ۸.۳.۱

تیر مثال (۸.۲.۱) دارای جرم حجمی  $p$  می‌باشد. مشتق کمترین بسامد ارتعاش عرضی تیر نسبت به مساحت سطح مقطع  $A$  را با فرض پارامتر بار اعمال شده  $\mu = 1$  محاسبه کنید (مجدداً فرض کنید  $I$  و  $P$  تغییر نمی‌کنند).

همان تقریب یک جزء محدود را برای نصف تیر که در مثال (۸.۲.۱) استفاده شده، به کار می‌بریم. با فرض یک شکل مود متقارن، مود ارتعاشی را می‌یابیم.

$$u_1 = 0, \quad w_1/L = 3\bar{x}^2 - 2\bar{x}^3.$$

به منظور محاسبه بسامد ارتعاشی، از نسبت ریلی معادله (۸.۳.۴) استفاده می‌کنیم. اولین جمله در صورت کسر عبارت است از:

۲۳۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۸: مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

$$\sigma_1 \bullet \epsilon_1 = \int_0^L (N_1 \epsilon_{x1} + M_1 \kappa_1) dx.$$

با استفاده از معادلات (۸.۳.۱) و (۸.۳.۲) و عبارات مثال (۸.۲.۱) داریم:

$$\epsilon_{x1} = w_{,x} w_{1,x} = 36\bar{w}(\bar{x} - \bar{x}^2)^2, \quad N_1 = EA\epsilon_{x1},$$

$$\kappa_1 = w_{1,xx} = 6(1 - 2\bar{x})/L, \quad M_1 = EI\kappa_1.$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \bullet \epsilon_1 &= \int_0^L [1296EA\bar{w}(\bar{x} - \bar{x}^2)^4 + 36EI(1 - 2\bar{x})^2/L^2] dx \\ &= 2.05714EA\bar{w}L + 12EI/L. \end{aligned}$$

دیگر عبارتهای نسبت ریلی به صورت زیر است

$$\sigma \bullet L_2(u_1) = \int_0^L N w_{1,x}^2 dx = 1.02857EA\bar{w}^2L - 1.2EAL\epsilon^i,$$

$$Mu_1 \bullet u_1 = \int_0^L A\rho w_1^2 dx = 0.3714\rho AL^3,$$

بنابراین:

$$\omega^2 = \frac{3.08571EA\bar{w}^2 + 12EI/L^2 - 1.2EA\epsilon^i}{0.3714\rho AL^2} = 0.01077 \frac{E}{\rho L^2}.$$

توجه کنید که برای یک تیر بارگذاری نشده  $\bar{w} = 0$  و  $\epsilon^i = 0$  داریم

$$\omega = 5.68 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}},$$

که در حدود 1.5% بیشتر از جواب دقیق می باشد. برای یک مشتق تحلیلی که بعداً برای مقایسه استفاده می کنیم می توان مشتق  $\omega^2$  را نسبت به  $A$  دست آورد.

$$(\omega^2)_{,A} = \frac{3.08571E(\bar{w}^2 + 2A\bar{w}\bar{w}_{,A}) - 1.2E\epsilon^i}{0.3714\rho AL^2} - \frac{\omega^2}{A}.$$

به منظور محاسبه این مشتق در روش مستقیم از معادله (۸.۳.۹) استفاده می کنیم. عبارات مختلف در

این معادله به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} D_p \varepsilon_1 \bullet \varepsilon_1 &= \int_0^L E \varepsilon_1^2 dx = 2.05714 E \bar{w}^2 L, \\ 2\sigma_1 \bullet L_{11}(u_p, u_1) &= 2 \int_0^L N_1 w_{,x} w_{1,x} dx = 4.11428 EA \bar{w} \bar{w}_{,A} L, \\ \sigma_p \bullet L_2(u_1) &= \int_0^L N_{,A} w_1^2 dx, \end{aligned}$$

که

$$N_{,A} = E(\varepsilon_x - \varepsilon^i) + EA \varepsilon_{x,A} = E(\varepsilon_x - \varepsilon^i) + EA w_{,x} w_{,xA}.$$

بنابراین

$$\sigma_p \bullet L_2(u_1) = 1.02857 E \bar{w}^2 L - 1.2 E \varepsilon^i L + 2.05714 EA \bar{w} \bar{w}_{,A} L,$$

و

$$\omega^2 M_{,A} u_1 \bullet u_1 = \omega^2 \int_0^L \rho w_1^2 dx = 0.3714 \omega^2 \rho L^3.$$

در مجموع

$$(\omega^2)_{,A} = \frac{3.08571 E \bar{w}^2 + 6.17142 EA \bar{w} \bar{w}_{,A} - 1.2 E \varepsilon^i}{0.3714 \rho AL^2} - \frac{\omega^2}{A},$$

که با نتایج تحلیلی مطابقت می کند. با استفاده از مقادیر  $\bar{w}$  و  $\bar{w}_{,A}$  از مثال (۸.۲.۱) داریم:

$$(\omega^2)_{,A} = 0.1788 \frac{E}{\rho AL^2}.$$

...

## ۸.۳.۲ روش مجاورتی

روش حساسیت مستقیم به محاسبه حساسیتهای میدان استاتیکی (حالت پیش کماتش) معادلات (۸.۲.۱۳) تا (۸.۲.۱۵) نیاز دارد. این گونه محاسبات هنگامی که بخواهیم حساسیت ها را نسبت به تعداد زیادی از پارامترهای سازه ای به دست آوریم، هزینه زیادی در بر خواهد داشت. در این گونه موارد

۴۳۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۸: مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

یک فن مجاورتی که به حساسیت های استاتیکی نیاز ندارد مناسب به نظر می رسد. به طور معمول، معادلات تعادل استاتیکی را در ضربگرهای لاگرانژ (که ما به آنها میدانهای مجاورتی می گوییم) ضرب می کنیم و سپس به  $\omega^2$  اضافه می کنیم بنابراین:

$$(\omega^2)^* = m_0 \omega^2 + \sigma^a \bullet [\varepsilon - L_1(u) - \frac{1}{2} L_2(u)] + \varepsilon^a \bullet [\sigma - D(\varepsilon - \varepsilon^i)] + f \bullet u^a - \sigma \bullet [L_1(u^a) + L_{11}(u, u^a)], \quad (۸.۳.۱۸)$$

که  $m_0$  اندازه  $\mathbf{Mu}_1 \bullet \mathbf{u}_1$  برای مقدار اسمی  $p$  می باشد (یعنی  $m_0$  با  $p$  تغییر نمی کند). ثابت  $m_0$  به این سبب اضافه شده است که عبارات نهایی برای میدان مجاورتی، ساده شود. با مشتق گیری از معادله (۸.۳.۱۸) و استفاده از معادله (۸.۳.۹) داریم:

$$m_0(\omega^2)_{,p} = (\omega^2)^*_{,p} = D_{,p} \varepsilon_1 \bullet \varepsilon_1 + 2\sigma_1 \bullet L_{11}(u_{,p}, u_1) + \sigma_{,p} \bullet L_2(u_1) - \omega^2 M_{,p} u_1 \bullet u_1 + \sigma^a \bullet [\varepsilon_{,p} - L_1(u_{,p}) - L_{11}(u, u_{,p})] + \varepsilon^a \bullet [\sigma_{,p} - D_{,p}(\varepsilon - \varepsilon^i) - D\varepsilon_{,p}] - \sigma_{,p} \bullet [L_1(u^a) + L_{11}(u, u^a)] - \sigma \bullet L_{11}(u_{,p}, u^a). \quad (۸.۳.۱۹)$$

با جمع بندی عبارتهایی که شامل مشتقات تغییر مکان، مشتقات کرنش و مشتقات تنش هستند داریم:

$$m_0(\omega^2)_{,p} = D_{,p} \varepsilon_1 \bullet \varepsilon_1 - \omega^2 M_{,p} u_1 \bullet u_1 - \varepsilon^a \bullet D_{,p}(\varepsilon - \varepsilon^i) - \sigma^a \bullet [L_1(u_{,p}) + L_{11}(u, u_{,p})] - \sigma \bullet L_{11}(u_{,p}, u^a) + 2\sigma_1 \bullet L_{11}(u_{,p}, u_1) + \varepsilon_{,p} \bullet [\sigma^a - D\varepsilon^a] + \sigma_{,p} \bullet [\varepsilon^a - L_1(u^a) - L_{11}(u, u^a) + L_2(u_1)]. \quad (۸.۳.۲۰)$$

از معادله (۸.۳.۲۰) مشخص می گردد که به منظور حذف مشتقات حالت تعادل استاتیکی، حالت مجاورتی بایستی معادلات زیر را برآورده سازد.

$$\varepsilon^a = L_1(u^a) + L_{11}(u, u^a) - L_2(u_1), \quad (۸.۳.۲۱)$$

$$\sigma^a = D\varepsilon^a, \quad (۸.۳.۲۲)$$

$$\sigma^a \bullet [L_1(\delta u) + L_{11}(u, \delta u)] + \sigma \bullet L_{11}(u^a, \delta u) - 2\sigma_1 \bullet L_{11}(u_1, \delta u) = 0. \quad (۸.۳.۲۳)$$

آنگاه مشتق بسامد به صورت زیر خواهد بود:

$$(\omega^2)_{,p} = \frac{D_{,p}\epsilon_1 \bullet \epsilon_1 - \omega^2 M_{,p} u_1 \bullet u_1 - \epsilon^a \bullet D_{,p}(\epsilon - \epsilon^i)}{M u_1 \bullet u_1} \quad (۸.۳.۲۴)$$

معادلات مجاورتی که یک قسمت همگن مشابه با معادلات (۸.۳.۱) تا (۸.۳.۳) برای  $\omega = 0$  دارند، ممکن است به عنوان معادلات میدانی یک سازه مجاورتی در نظر گرفته شوند که در آن عبارت  $L_2(u_1)$  در معادله (۸.۳.۲۱) کرنش اولیه و آخرین عبارت در معادله (۸.۳.۲۳) مربوط به نیروی کالبدی می باشد. در یک مسأله کماتشی ( $\omega = 0$ ) قسمت همگن منفرد و میدانهای مجاورتی یکتا نیستند و هر ضریبی از مود کماتشی  $u_1$  می تواند اضافه گردد. هر رابطه تعامد ساز مناسب برای یکتا ساختن میدانهای مجاورتی می تواند استفاده گردد.

به طور مشابه مشتق مقدار ویژه کماتش به صورت زیر است:

$$\mu_{,p}^* = -\frac{D_{,p}\epsilon_1 \bullet \epsilon_1 - D_{,p}\epsilon^* \bullet \epsilon^*}{2\sigma_1 \bullet L_{11}(u'', u_1) + \sigma'^* \bullet L_2(u_1)} \quad (۸.۳.۲۵)$$

معادله (۸.۳.۲۵) بر اساس مود کماتش و حالت پیش کماتش که در  $\mu = \mu^*$  محاسبه شده قرار دارد. در عمل بار کماتش به وسیله حل یک مسأله مقدار ویژه خطی شده در یک بار  $\mu^* < \mu$  تخمین زده می شود. در مرجع [4] نشان داده شده که خطای حاصل در مشتق  $\mu_p^*$  با این تقریب از مرتبه  $(\mu^* - \mu)^2$  می باشد.

### مثال ۸.۳.۲

مثال (۸.۳.۱) را بار دیگر با استفاده از روش مجاورتی حل می کنیم. باید دو عبارتی که به مشتق جواب ایستایی بستگی دارند را دوباره محاسبه کنیم. از آن مثال داریم:

$$A = 2\sigma_1 \bullet L_{11}(u_{,p}, u_1) + \sigma_{,p} \bullet L_2(u_1) = 1.02857EL\bar{w}^2 - 1.2EL\epsilon^i + 6.171424L\bar{w}\bar{w}_{,A} \quad (\text{الف})$$

با استفاده از روش مجاورتی این دو عبارت با عبارت زیر

$$A = -\epsilon^a \bullet D_{,p}(\epsilon - \epsilon^i)$$

در معادله (۸.۳.۲۴) جایگزین می گردند.

۴۴۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۸: مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

حالت مجاورتی که به وسیله معادلات (۸.۳.۲۱) تا (۸.۳.۲۳) تعریف گردیده شامل یک کرنش اولیه و یک نیروی کالبدی است. کرنش اولیه  $w_{1,x}^2 = I_2(u_1)$  می باشد. نیروی گرهی معادل،  $f_1^a$ ، به صورت زیر نوشته می شود

$$f_1^a L \delta \bar{w} = \int_0^L w_{1,x}^2 EA \delta \epsilon_x dx.$$

با استفاده از عبارات بیان شده در مثالهای (۸.۲.۱) و (۸.۳.۱) برای  $\delta \epsilon_x$  و  $w_1$  داریم

$$f_1^a = 1296 \frac{EA \bar{w}}{L} \int_0^L (\bar{x} - \bar{x}^2)^4 dx = 2.05714 EA \bar{w}.$$

نیروی کالبدی عبارت است از:

$$\begin{aligned} f_2^a L \delta \bar{w} &= 2\sigma_1 \bullet L_{11}(u_1, \delta u) = 2 \int_0^L N_{\epsilon 1} w_{1,x} \delta w_{,x} dx = 2EA \int_0^L w_{1,x}^2 w_{,x} \delta w_{,x} dx \\ &= 2592 EA \bar{w} \delta \bar{w} \int_0^L (\bar{x} - \bar{x}^2)^4 dx = 4.11428 EA L \bar{w} \delta \bar{w}. \end{aligned}$$

در مجموع نیروی گرهی به شکل زیر نوشته می شود

$$f^a = f_1^a + f_2^a = 6.17142 EA \bar{w}.$$

این نیرو باید به سازه 'تائزاتی اعمال گردد. این بدان معنی است که اگر بخواهیم آن نیرو را در سمت راست معادله حالت تائزاتی (ب) از مثال (۸.۲.۱) جایگزین کنیم باید به جای  $w$  در سمت چپ معادله از  $\bar{w}^a$  استفاده کنیم؛ یعنی

$$3.08571 EA \bar{w}^2 \bar{w}^a + 12(EI/L^2) \bar{w}^a - 1.2 EA \epsilon^i \bar{w}^a = 6.17142 EA \bar{w}. \quad (\text{ب})$$

برای استفاده بعدی معادله ' (ب) را با معادله ' (ت) مثال (۸.۲.۱) مقایسه می کنیم و می بینیم که:

$$\bar{w}^a = \frac{6.17142 A \bar{w}_A}{-1.02857 \bar{w}^2 + 1.2 \epsilon^i}. \quad (\text{پ})$$

با توجه به این که  $\bar{w}^a$  را از معادله (الف) داریم، می توان  $A$  را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$A = -\epsilon^a \bullet D_p(\epsilon - \epsilon^i) = - \int_0^L E \epsilon_x^a (\epsilon - \epsilon^i) dx.$$

از معادله (۸.۲.۲۱)

$$\epsilon_x^a = w_{,x}^a w_{,x} - w_{1,x}^2 = 36(\bar{x} - \bar{x}^2)^2 (\bar{w}^a \bar{w} - 1),$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} A &= 36(1 - \bar{w}^a \bar{w}) \int_0^L (\bar{x} - \bar{x}^2)^2 [18(\bar{x} - \bar{x}^2)^2 - \epsilon^i] dx \quad (ت) \\ &= (1 - \bar{w}^a \bar{w}) EL(1.02857 \bar{w}^2 - 1.2 \epsilon^i). \end{aligned}$$

اکنون می‌توان مشتق  $w^2$  را بدون محاسبه  $w_{,A}$  با حساب کردن  $w^a$  از معادله (ب) و  $A$  از معادله (ت) به دست آورد. به منظور بررسی این که نتیجه به دست آمده از معادله (ت) مانند نتیجه معادله (الف) می‌باشد یا خیر، با استفاده از معادله (پ) داریم:

$$(1 - \bar{w}^a \bar{w}) = \frac{6.17142 A \bar{w}_{,A} + 1.02857 \bar{w}^2 - 1.2 \epsilon^i}{1.02857 \bar{w}^2 - 1.2 \epsilon^i}.$$

با قرار دادن عبارت فوق در معادله (ت) معادله (الف) به دست می‌آید. ...

#### ۸.۴ حساسیت شکل ایستایی

محاسبه حساسیت نسبت به تغییرات شکل بسیار پیچیده‌تر از تغییرات سختی می‌باشد. بخش حاضر به حساسیت شکل پاسخ ایستایی در محدوده ارتجاعی خطی محدود می‌شود و بر اساس مراجع [5-11] است. افزون بر این بحث ما به رابطه سازی بدون انحنا (از قبیل کمان و پوسته) محدود می‌شود. خواننده برای اثبات نتیجه‌های استفاده شده در این بخش می‌تواند به مرجع [2] مراجعه کند.

برای حساسیت شکل متغیر از دو راه کلی استفاده می‌شود. روش اول و مشهورتر، مشتق مادی بوده و روش دوم راه پارامترسازی دامنه می‌باشد که به عنوان روش حجم کنترل نیز شناخته می‌شود. هر دو روش بسیار کلی هستند، اما روش پارامترسازی دامنه ساده‌تر می‌باشد و به خصوص برای تحلیل اجزای محدود با اجزای ایزوپارامتریک<sup>۱</sup> قوی و کارآمد می‌باشد. این بخش را با بحث پیرامون این دو روش

1) Isoparametric



شروع می کنیم و سپس می بینیم که آنها چگونه می توانند با روش مستقیم و مجاورتی به کار گرفته شوند.

### ۸.۴.۱ مشتق مادی

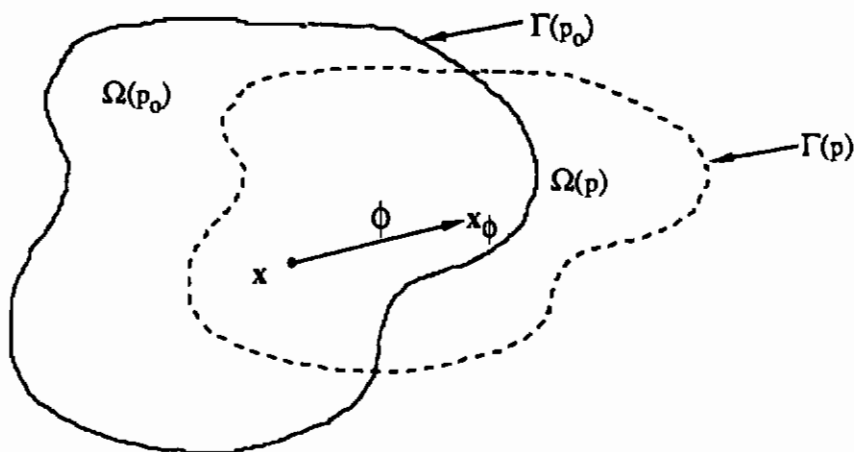
میدان تغییرات شکل  $\phi$  را در نظر بگیرید به گونه ای که یک ذره مادی از مکان  $x$  به مکان  $x_\phi$  تغییر موضع داده باشد.

$$x_\phi = x + \phi(x, p), \quad (۸.۴.۱)$$

که  $p$  متغیر طراحی شکل می باشد.  $x$  معمولاً به مختصه مادی یا لاگرانژی معروف است که مربوط به یک ذره مادی است.

تغییرات دامنه  $V$  و  $K$  مرز سازه را مانند شکل (۸.۴.۱) تغییر می دهد.

تابع  $f(x, p)$  را که روی دامنه متغیر سازه  $V$  تعریف شده است در نظر بگیرید. مشتق جزئی  $\partial f / \partial p$  از  $f$  نسبت به  $p$  را با  $f_p$  مشخص می کنیم. این مشتق تغییر  $f$  را در یک موقعیت ثابت در سازه اندازه گیری می نماید و اغلب، مشتق محلی نامیده می شود. مشتقی که تغییر  $f$  در یک نقطه معین از ماده را اندازه گیری می کند باید تغییر در  $x$  هنگامی که  $p$  تغییر می کند را نیز در بر گیرد. این مشتق به نام مشتق مادی یا مشتق مجموع  $f$  نامیده می شود و این جا با  $f_p$  مشخص می شود.



شکل ۸.۴.۱ تغییرات شکل دامنه سازه

بخش ۸.۴: حساسیت شکل ایستایی ۲۲۳

$$f_p = f_p + \nabla f^T \mathbf{x}_{\phi,p} = f_p + \nabla f^T \mathbf{v}, \quad (۸.۴.۲)$$

که  $\nabla f$  گرادیان  $f$  را در فضا معین می کند و

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}_{\phi,p} = \phi_p \quad (۸.۴.۳)$$

اغلب میدان سرعت شکل نامیده می شود. این اصطلاح بر اساس این نظر که  $p$  یک متغیر شبه زمان است استوار است و در این صورت،  $\mathbf{x}_{\phi,p}$  یک میدان سرعت خواهد بود. مؤلفه های  $\mathbf{v}$  با  $v_x$  که  $\kappa$  از ۱ تا ابعاد مسأله تغییر می کند مشخص می شوند و  $v_1 = v_x$ ،  $v_2 = v_y$  و  $v_3 = v_z$ . اکنون یک تابع برداری از قبیل میدان تغییر مکان  $\mathbf{u}$  را در نظر بگیرید. برای هر مؤلفه  $u_i$  از  $\mathbf{u}$  می توان با استفاده از معادله (۸.۴.۱) مشتق مادی را به شکل زیر به دست آورد:

$$u_{i,p} = u_{i,p} + (\nabla u_i)^T \mathbf{v}. \quad (۸.۴.۴)$$

که معادله فوق به صورت زیر خلاصه می شود:

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_p + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{v}, \quad (۸.۴.۵)$$

$\nabla \mathbf{u}$  ماتریسی است که گرادیان تغییر شکل نامیده می شود و مؤلفه های آن به شکل زیر نوشته می شوند:

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = u_{i,j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (۸.۴.۶)$$

یادآور می شود علامت کاما و زیرنویس  $j$  که بعد از آن آمده، مشخص کننده مشتق نسبت به  $x_j$  می باشد. از این تعریف می توان نتیجه گرفت که:

$$(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{v} = u_{i,j} v_j, \quad (۸.۴.۷)$$

که اندیسهای تکراری روی بعد مسأله جمع بسته می شوند، به گونه ای که برای یک مسأله دو بعدی داریم:

$$u_{i,j} v_j = u_{i,1} v_1 + u_{i,2} v_2 = u_{i,x} v_x + u_{i,y} v_y. \quad (۸.۴.۸)$$

به طور مشابه برای یک تانسور کرنش  $\epsilon$ ، مشتق مادی به صورت زیر است:

$$\epsilon_p = \epsilon_{,p} + (\nabla \epsilon) v = \epsilon_{,p} + \epsilon_{,i} v_i. \quad (۸.۴.۹)$$

معمولاً مشتق مادی از لحاظ فیزیکی معنی دارتر از مشتق محلی است. برای مثال اگر شکل مرزی یک سوراخ را برای رها شدن از تمرکز تنش روی مرز تغییر بدهیم، به مشتق تنش در مرز نیاز داریم و نه در یک نقطه با مختصات ثابت. از لحاظ ریاضی کار با مشتق مادی پیچیده تر از مشتق محلی است. مشتق محلی در مشتق نسبت به مختصات، جابه جایی پذیر است، در صورتی که مشتق مادی این گونه نیست. برای مثال، میدان کرنش مربوط به یک میدان تغییر مکان  $u$  را در نظر بگیرید و آن را با نماد  $\epsilon(u)$  مشخص کنید. کرنش با مشتق گیری از تغییر مکانها به دست می آید و لذا می توان ترتیب مشتق گیری را برای مشتقات محلی تغییر داد.

$$\epsilon_p(u) = \epsilon(u_p), \quad (۸.۴.۱۰)$$

در حالی که نمی توان برای مشتق مادی  $\epsilon_p$  این معادله را نوشت.

به منظور مشتق گیری از معادله کار مجازی نسبت به  $p$  باید مشتقات انتگرال ها روی حجم و سطح سازه محاسبه گردند. فرض کنید که  $I_V$  نمایانگر انتگرال روی دامنه سازه باشد.

$$I_V = \int_V f(x, p) dV. \quad (۸.۴.۱۱)$$

مشتق  $I_V$  نسبت به  $p$  برابر است با:

$$I_{Vp} = \int_V f_p dV + \int_V f(dV)_p = \int_V (f_p + \bar{V}_p f) dV, \quad (۸.۴.۱۲)$$

$\bar{V}_p$  تغییرات نسبی حجم می باشد. می توان نشان داد (برای مثال مرجع [2]) که:

$$(dV)_p = \bar{V}_p dV = v_{k,k} dV. \quad (۸.۴.۱۳)$$

به یاد داشته باشید که اندیسهای تکراری روی ابعاد مسأله جمع بسته می شوند. بنابراین برای یک حالت سه بعدی داریم:

بخش ۸.۴: حساسیت شکل ایستایی ۲۲۵

$$v_{k,k} = v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} = v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z} = \text{div } \mathbf{v}. \quad (۸.۴.۱۴)$$

مشتق انتگرال سطحی

$$I_S = \int_S f(\mathbf{x}, p) dS \quad (۸.۴.۱۵)$$

با یک روش مشابه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$I_{Sp} = \int_S f_p dS + \int_S f(dS)_p. \quad (۸.۴.۱۶)$$

مشتق جزء سطح عبارت است از:

$$(dS)_p = \bar{S}_p dS = -H \mathbf{n}^T \mathbf{v} dS, \quad (۸.۴.۱۷)$$

که  $\mathbf{n}$  بردار عمود بر مرز  $S$  بوده و  $H$  انحنای  $S$  در فضای دو بعدی است که دو برابر انحنای در حالت سه بعدی است.

## ۸.۴.۲ پارامترسازی دامنه

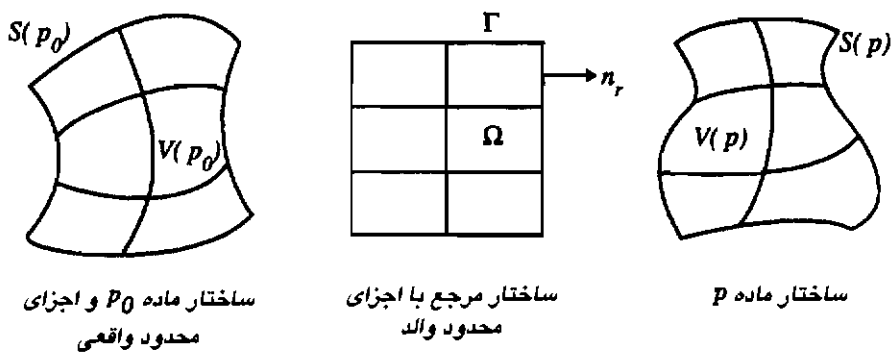
بحث پارامترسازی دامنه بر اساس کار هابر<sup>۱</sup> و همکارانش به خصوص در مرجع [۱۱] بنا نهاده شده است. در این راهبرد، بردار مختصه<sup>۲</sup> ماده  $\mathbf{x}$  بر حسب دامنه مرجع به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{r}, p), \quad (۸.۴.۱۸)$$

که  $\mathbf{r}$  یک بردار مختصه در دامنه مرجع  $\Omega$  با مرز  $\Gamma$  بوده و  $p$  یک پارامتر شکل می‌باشد (شکل ۸.۴.۲ را ببینید). هنگامی که اجزای ایزوپارامتریک<sup>۲</sup> استفاده می‌شوند بهتر آن است که جزء والد به عنوان دامنه مرجع برای جزء حقیقی استفاده گردد. به ویژه برای اجزای ایزوپارامتریک بردار مختصه<sup>۲</sup>  $\mathbf{x}$  در جزء به صورت زیر نوشته می‌شود:

1) Haber

2) Isoparametric



شکل ۸.۱.۲ راهبرد پارامترسازی دامنه

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\#nodes} h_i(\mathbf{r}) \mathbf{d}_i(p), \quad (8.4.19)$$

که  $h_i$  توابع شکل جزء  $\mathbf{r}$  یک بردار از مختصات اصلی و  $\mathbf{d}_i$  بردار مختصات گره ها می باشند. تغییرات هندسه به وسیله تغییرات در مختصات گره ها نشان داده می شوند در حالی که توابع شکل ثابت نگه داشته شده اند.

تبدیل صورت بین دامنه 'مرجع و دامنه' مادی به وسیله ژاکوبین<sup>۱</sup> تبدیل  $\mathbf{J}^E$  مشخص می شود که به آن ژاکوبین اولری می گویند و معکوس آن  $\mathbf{J}^{-E}$  می باشد.

$$J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j} = r_{i,j}, \quad \text{و} \quad J_{ij}^{-E} = \frac{\partial x_i}{\partial r_j} = x_{i,j}. \quad (8.4.20)$$

توجه شود که علامت کاما که یک اندیس زیرنویس (مانند  $\epsilon_{ij}$ ) بعد از آن نوشته می شود مشخص کننده مشتق نسبت به یک مختصه<sup>۲</sup> مادی بوده در حالی که علامت نقطه که یک اندیس زیرنویس بعد از آن آمده، علامت مشتق نسبت به یک مختصه<sup>۳</sup> مرجع می باشد. دیفرانسیل حجمی و سطحی در شکل مادی بر حسب شکل مرجع که از دترمینان ژاکوبین اولری استفاده می کند بیان شود.

$$dV = \det(\mathbf{J}^{-E}) d\Omega, \quad dS = \det(\mathbf{K}^{-E}) d\Gamma, \quad (8.4.21)$$

که  $\mathbf{K}^{-E}$  یک ژاکوبین تبدیل بین مختصات سطحی در مرجع و شکل های مادی می باشد و دترمینان آن به

1) Jacobian

بخش ۸.۴: حساسیت شکل ایستایی ۴۴۷

صورت زیر نوشته می شود:

$$\det(\mathbf{K}^{-E}) = (J_{ji}^E J_{ki}^E n_j^r n_k^r)^{1/2} \det(\mathbf{J}^{-E}), \quad (۸.۴.۲۲)$$

که  $n_j^r$  ها مؤلفه های بردار نرمال واحد خروجی از سطح  $\Gamma$  از دامنه مرجع می باشند و اندیس های تکراری جمع بسته می شوند. مشتق  $\mathbf{J}^{-E}$  نسبت به  $p$  طبق تعریف عبارت است از:

$$J_{ij,p}^{-E} = (x_{i,j})_{,p}, \quad (۸.۴.۲۳)$$

در حالی که برای مشتق  $\mathbf{J}^E$  باید از فرمولی برای محاسبه مشتق وارون استفاده کرد.

$$\mathbf{J}_{,p}^E = -\mathbf{J}^E \mathbf{J}_{,p}^{-E} \mathbf{J}^E, \quad (۸.۴.۲۴)$$

بنابراین داریم:

$$J_{ij,p}^E = -J_{ik}^E J_{lj}^E (x_{k,l})_{,p}. \quad (۸.۴.۲۵)$$

در راهبرد پارامترسازی دامنه، تغییر مکانها کرنش ها و تنش ها تابعی از مختصات مرجع  $\mathbf{x}$  در نظر گرفته می شوند. بنابراین هنگامی که مشتقات آنها نسبت به  $p$  ارزیابی می شوند، مشتقات را برای موقعیت ثابت  $\mathbf{x}$  به دست می آوریم که در واقع مشتقات مادی این کمیتها باشند. ابتدا یک تابع  $f(\mathbf{x}, p)$  بر حسب مختصات مرجع، مانند  $\bar{f}(\mathbf{x}, p)$  نوشته می شود و سپس:

$$f_p = \frac{\partial \bar{f}}{\partial p}. \quad (۸.۴.۲۶)$$

مشتقات نسبت به مختصات مادی باید با استفاده از قاعده زنجیره ای به مشتقات نسبت به مختصات مرجع تبدیل گردند. بنابراین رابطه تغییر مکان کرنشی خطی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2}(u_{i,k} J_{kj}^E + u_{j,k} J_{ki}^E). \quad (۸.۴.۲۷)$$

این رابطه، وابستگی صریح کرنش به متغیر شکل را نشان می دهد و برای انعکاس آن معادله (۸.۱.۱) را به صورت زیر می نویسیم:

۴۴۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۸: مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

$$\varepsilon = L_1(u, p). \quad (۸.۴.۲۸)$$

مشتقات انتگرال به صورت مشابه روش مشتق مادی به دست می آیند. یک انتگرال حجمی بر حسب مختصات مرجع به صورت زیر است:

$$I_V = \int_V f(x, p) dV = \int_{\Omega} \bar{f}(\mathbf{r}, p) \det(\mathbf{J}^{-E}) d\Omega, \quad (۸.۴.۲۹)$$

که  $\bar{f}$  شکل جدیدی از تابع هنگامی که بر حسب مختصات مرجع نوشته شود است. آن گاه

$$I_{Vp} = \int_{\Omega} (f_p + \bar{V}_p f) \det(\mathbf{J}^{-E}) d\Omega, \quad (۸.۴.۳۰)$$

که

$$\bar{V}_p = \left( \det(\mathbf{J}^{-E}) \right)_p / \det(\mathbf{J}^{-E}). \quad (۸.۴.۳۱)$$

به طور مشابه برای یک انتگرال سطحی  $I_S$  معادله (۸.۴.۲۱) می توان نوشت:

$$I_{Sp} = \int_{\Gamma} (f_p + \bar{S}_p f) \det(\mathbf{K}^{-E}) d\Gamma, \quad (۸.۴.۳۲)$$

که در آن

$$\bar{S}_p = \left( \det(\mathbf{K}^{-E}) \right)_p / \det(\mathbf{K}^{-E}). \quad (۸.۴.۳۳)$$

### ۸.۴.۳ روش مستقیم

برای کاربرد روش مستقیم در محاسبه حساسیت شکل باید از رابطه 'تغییر مکان- کرنش معادله' (۸.۱.۱)، قانون هوک معادله (۸.۱.۴) و معادلات تعادل (۸.۱.۶) نسبت به  $p$  مشتق بگیریم. با رابطه تغییر مکان کرنش و روش مشتق مادی شروع می کنیم. با استفاده از معادلات (۸.۴.۹) و (۸.۴.۱۰) رابطه 'کرنش تغییر مکان به صورت زیر نوشته می شود:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{,p} + (\nabla \varepsilon) \mathbf{v} = L_1(u_p) + (\nabla \varepsilon) \mathbf{v}. \quad (۸.۴.۳۴)$$

بخش ۸.۴: حساسیت شکل ایستایی ۴۴۹

با استفاده از معادله' (۸.۴.۵) رابطه فوق را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\epsilon_p = L_1(u_p) - \bar{\epsilon}, \quad (8.4.35)$$

که در آن

$$\bar{\epsilon} = L_1[(\nabla u)v] - (\nabla \epsilon)v \quad (8.4.36)$$

یک کرنش اولیه ی مربوط به میدان حساسیت می باشد. گرچه در معادله' (۸.۴.۳۶) گرادینهای کرنش دیده می شود، ولی این گرادینها با هم حذف می شوند و  $\bar{\epsilon}$  فقط شامل مشتقات اول تغییر مکان و میدانهای سرعت شکل می شود. برای مثال برای حالت سه بعدی داریم:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,k}v_{k,j} + u_{j,k}v_{k,i}). \quad (8.4.37)$$

با استفاده از راهبرد پارامترسازی دامنه، می توان شکل دیگری از  $\bar{\epsilon}$  را به دست آورد. با مشتق گیری از معادله' (۸.۴.۲۷) می توان نوشت

$$(\epsilon_{ij})_p = \frac{1}{2}(u_{pi,k}J_{kj}^E + u_{pj,k}J_{ki}^E) + \frac{1}{2}(u_{i,k}J_{kj,p}^E + u_{j,k}J_{ki,p}^E) = [L_1(u_p)]_{ij} - \bar{\epsilon}_{ij}, \quad (8.4.38)$$

که در آن

$$\bar{\epsilon}_{ij} = -\frac{1}{2}(u_{i,k}J_{kj,p}^E + u_{j,k}J_{ki,p}^E). \quad (8.4.39)$$

فرض می کنیم که ضرایب ارتجاعی با تغییر شکل تغییر نمی کنند و هیچ کرنش اولیه نیز وجود ندارد. آن گاه مشتق قانون هوک عبارت است از:

$$\sigma_p = D\epsilon_p. \quad (8.4.40)$$

مشتق معادلات تعادل عبارت است از:

$$(\sigma \circ \delta \epsilon)_p = (f \circ \delta u)_p. \quad (8.4.41)$$



۲۵۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۸: مقله ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

عبارت سمت چپ معادله (۸.۴.۴۱) یک انتگرال حجمی است که بر اساس معادلات (۸.۴.۱۲) و (۸.۴.۳۰) یک انتگرال حجم مشتق انتگرال (که از آن انتگرال می گیرند) به اضافه جمله ای که مربوط به تغییر حجم جزء است می باشد یعنی:

$$(\sigma \bullet \delta \varepsilon)_p = \sigma_p \bullet \delta \varepsilon + \sigma \bullet \delta \varepsilon_p + \sigma \bullet (\bar{V}_p \delta \varepsilon). \quad (۸.۴.۴۲)$$

مشتق کرنش مجازی  $\delta \varepsilon_p$  با روشی مشابه معادله (۸.۴.۳۵) به دست می آید و عبارت است از:

$$\delta \varepsilon_p = L_1(\delta u_p) - \delta \bar{\varepsilon}, \quad (۸.۴.۴۳)$$

که از روش مشتق مادی داریم:

$$\delta \bar{\varepsilon} = L_1[\nabla(\delta u)v] - (\nabla \delta \varepsilon)v, \quad (۸.۴.۴۴)$$

در حالی که از راهبرد پارامتر سازی دامنه می توان نوشت:

$$\delta \bar{\varepsilon}_{ij} = -\frac{1}{2}(\delta u_{i,k} J_{kj,p}^E + \delta u_{j,k} J_{ki,p}^E). \quad (۸.۴.۴۵)$$

مشتق کار مجازی بار اعمالی به دلیل این که کار مورد نظر با انتگرال های حجمی و سطحی ترکیب می شود، پیچیده تر است

$$f \bullet \delta u = f_b \bullet \delta u + T \bullet \delta u, \quad (۸.۴.۴۶)$$

که  $f_b$  مشخص کننده بردار کالبدی و  $T$  بردار کششهای سطحی اعمال شده است. اولین عبارت در سمت راست معادله (۸.۴.۴۶) یک انتگرال حجمی بوده، در حالی که عبارت دوم یک انتگرال سطحی است. مشتق گیری از انتگرال نیروی کالبدی، مبراست است. با این وجود، اگر روی مرز گوشه وجود داشته باشد و یا اگر مرز بارگذاری، تغییر کند عبارت کشش سطحی می تواند مسأله ساز باشد. فرض می کنیم که هیچ گوشه ای یا تغییری در مرز بارگذاری شده وجود نداشته باشد. آن گاه می توان مشتق معادله (۸.۴.۴۶) را به صورت زیر نوشت:

$$(f \bullet \delta u)_p = f_{bp} \bullet \delta u + f_b \bullet \delta u_p + f_b \bullet (\bar{V}_p \delta u) + T_p \bullet \delta u + T \bullet \delta u_p + T \bullet (\bar{S}_p \delta u). \quad (۸.۴.۴۷)$$

بخش ۸.۴: حساسیت شکل ایستایی ۴۵۱

تغییر مکان مجازی  $\delta u$  اختیاری است ولی باید شرایط مرزی سینماتیک (حرکتی) را که فرض می شود مستقل از  $p$  باشند برآورده کند. هنگامی که شکل تغییر می کند از رابطه زیر مطمئن می شویم که  $\delta u$  شرایط مرزی مربوط را برآورده می کند.

$$\delta u_p = 0. \quad (۸.۴.۴۸)$$

با استفاده از معادله (۸.۴.۴۸) معادله (۸.۴.۴۳) به شکل زیر در می آید:

$$\delta \varepsilon_p = -\delta \bar{\varepsilon}. \quad (۸.۴.۴۹)$$

در نهایت با استفاده از معادلات (۸.۴.۴۱)، (۸.۴.۴۲)، (۸.۴.۴۷) و (۸.۴.۴۹) داریم:

$$\sigma_p \bullet \delta \varepsilon = f_{bp} \bullet \delta u + f_b \bullet (\bar{V}_p \delta u) + T_p \bullet \delta u + T \bullet (\bar{S}_p \delta u) + \sigma \bullet \delta \bar{\varepsilon} - \sigma \bar{V}_p \bullet \delta \varepsilon. \quad (۸.۴.۵۰)$$

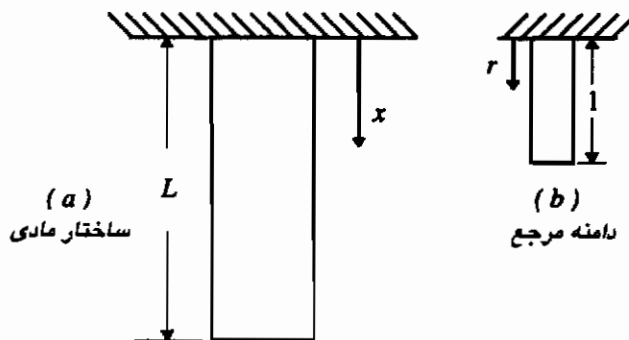
سمت راست معادله (۸.۴.۵۰) بیان کننده نیروهای کالبدی است که باید به سازه اعمال شود (همراه با کرنش اولیه  $\bar{\varepsilon}$ ) تا حل مسأله به میدان حساسیت بینجامد. بار مجازی  $f_b$  که باید به سازه اصلی اعمال گردد تا میدان حساسیت به وجود آید شامل جملاتی از سمت راست معادله (۸.۴.۵۰) و همچنین نیروی مجازی مربوط به کرنش اولیه  $\bar{\varepsilon}$  می باشد.

$$f^p \bullet \delta u = f_{bp} \bullet \delta u + f_b \bar{V}_p \bullet \delta u + T_p \bullet \delta u + T \bar{S}_p \bullet \delta u + \sigma \bullet \delta \bar{\varepsilon} - \sigma \bar{V}_p \bullet \delta \varepsilon + D \bar{\varepsilon} \bullet \delta \varepsilon. \quad (۸.۴.۵۱)$$

هنگامی که منحنی جدا کننده مرزهای بارگذاری شده و بدون بار تغییر می کند و هنگامی که مرز گوشه دار است جملات دیگری وجود خواهد داشت (مرجع [6] را ببینید). با استفاده از معادله (۸.۴.۵۱) می توان معادله (۸.۴.۵۰) را به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_p \bullet \delta \varepsilon = f^p \bullet \delta u - D \bar{\varepsilon} \bullet \delta \varepsilon \quad (۸.۴.۵۲)$$

### مثال ۸.۴.۱



شکل ۸.۴.۳ میله ای تحت بار وزنی خودش

بارگذاری اعمال شده بر میله نشان داده شده در شکل (۸.۴.۳)، وزن خودش است. حساسیت جواب به تغییرات طول میله (که با یک جزء محدود تقریب زده شده است) را با استفاده از روش مستقیم محاسبه کنید.

در این مسأله، بارگذاری یک نیروی ثابت با مقدار  $f = \rho Ag$  می باشد. حل دقیق برای تغییر مکان  $u$  و نیروی عضوی  $N$  بر حسب چگالی  $\rho$ ، مساحت  $A$  و شتاب جاذبه  $g$  به صورت زیر است:

$$N = \rho Ag(L - x), \quad u = (\rho g/E)(Lx - x^2/2).$$

با استفاده از یک جزء محدود خطی، نصف نیروی کالبدی به هر گره اعمال می شود به گونه ای که بار هر گره برابر  $\rho AgL/2$  خواهد بود. جواب اجزای محدود عبارت است از:

$$u_2 = \rho gL^2/2E, \quad \epsilon = \rho gL/2E, \quad N = \rho AgL/2,$$

بنابراین تغییر مکان حداکثر درست بوده، اما نیروی عضوی حداکثر با یک ضریب ۲ اختلاف دارد. مشتقات این دو مقدار نسبت به  $L$  برابر است با:

$$u_{2L} = \rho gL/E, \quad N_L = \rho Ag/2. \quad (\text{الف})$$

برای محاسبه میدان حساسیت باروش مشتق مادی، باید یک میدان تغییر شکل  $\phi$  فرض کنیم. فرض

#### بخش ۸.۴: حساسیت شکل ایستایی ۲۵۳

می‌کنیم با تغییر طول میله تمام نقاط در تیر متناسب با هم حرکت کنند. اگر طول جدید میله را با  $p$  نشان دهیم، داریم:

$$x_\phi = x(p/L), \quad \text{یا} \quad \phi = x(p/L - 1),$$

و میدان سرعت شکل عبارت است از:

$$v = \phi_{,p} = x/L.$$

اکنون داریم:

$$\bar{V}_p = v_{k,k} = v_{,x} = 1/L, \quad \bar{\epsilon} = u_{,x}v_{,x} = \epsilon/L, \quad \delta\epsilon = \delta u_{,x}v_{,x} = \delta\epsilon/L.$$

برای روش پارامترسازی دامنه، با استفاده از یک جزء مادر به طول واحد داریم:

$$x = x_1(1 - r) + x_2r, \quad u = u_1(1 - r) + u_2r,$$

که در مسأله ما  $x_2 = p$  و  $x_1 = 0$  است. ژاکوبین تبدیل، یک عدد به صورت زیر است:

$$J^{-E} = \frac{\partial x}{\partial r} = -x_1 + x_2 = p.$$

آن گاه  $J^E = 1/p$ . بنابراین از معادله (۸.۴.۳۹)

$$\bar{\epsilon} = -u_{1,1}J_p^E = -\frac{\partial u}{\partial r} \frac{1}{p^2} = \frac{u_2}{p^2},$$

که همانند  $\bar{\epsilon}$  به دست آمده از روش مشتق مادی است. تغییر نسبی حجم  $\bar{V}_p$  عبارت است از:

$$\bar{V}_p = \left( \det(J^{-E}) \right)_p / \det(J^{-E}) = 1/p,$$

که این نیز با نتیجه مشتق مادی مطابقت دارد. اولین جمله در عبارت بار مجازی در معادله (۸.۴.۵۲) صفر است زیرا بار کالبدی ثابت است. جمله دوم بیان کننده یک نیروی کالبدی به صورت  $f/L = \rho Ag/L$  می‌باشد که به سبب تغییر در جزء حجم است و در برآیند نیروی کالبدی اصلی ظاهر

۲۵۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۸: مقدمه ای بر تحلیل حساسیت متغیر)

می شود. این نیرو معادل نیروی انتهای  $\rho Ag/2$  است. دو جمله 'مربوط به کششهای سطحی حذف شده اند، زیرا هیچ گونه کشش سطحی اعمال نمی شود. دو جمله 'بعدی با استفاده از این حقیقت ارزیابی شده اند که برای مدل اجزای محدود، نیروی عضوی  $N$  و کرنش  $\epsilon$  در المان ثابتند.

$$\sigma \bullet \delta \bar{\epsilon} - \bar{V}_p \sigma \bullet \delta \epsilon = \int_0^L (N \delta \epsilon / L) dx - \int_0^L (1/L) N \delta \epsilon = 0.$$

آخرین عبارت به صورت زیر نوشته می شود:

$$D\bar{\epsilon} \bullet \delta \epsilon = \int_0^L (EA \epsilon \delta \epsilon / L) dx = N \delta \epsilon = (\rho Ag/2) \delta u_2.$$

در مجموع داریم

$$f^p \bullet \delta u = \rho Ag \delta u_2$$

که بیانگر این است که  $f^p$  معادل یک نیروی  $\rho Ag$  است. در اثر این نیرو می توان نوشت:

$$u_{2p} = \rho g L / E$$

که با نتایج معادله 'الف' در بالا مطابقت می کند. برای محاسبه مشتق نیروی عضوی  $N_p$ ، ابتدا باید  $\epsilon_p$  از معادله '۸.۴.۱۹' محاسبه شود.

$$\epsilon_p = L_1(u_p) - \bar{\epsilon} = u_{p,x} - \epsilon/L = u_{2p}/L - \epsilon/L$$

بنابراین:

$$\epsilon_p = \rho g / 2E, \quad N_p = EA \epsilon_p = \rho Ag / 2$$

که با نتایج معادله 'الف' در بالا مطابقت می کند. ....

۸.۴.۳ روش مجاورتی

اکنون حساسیت تابع تغییر مکان  $H$  که از معادله '۸.۱.۱۹' به دست می آید را در نظر بگیرید. برای

بخش ۸.۴: حساسیت شکل ایستایی ۲۵۵

محاسبه مشتق نسبت به شناسه اول، از معادله (۸.۴.۱۲) استفاده می‌کنیم، با مشتق‌گیری از  $H$  داریم:

$$H_p = \int (h_p + h\bar{V}_p) dV + \mathbf{h}_{,u} \bullet \mathbf{u}_p \quad (۸.۴.۵۳)$$

برای حذف جمله مشتق تغییر مکان، مشتقات معادلات حاکم (۸.۴.۳۵)، (۸.۴.۴۰) و (۸.۴.۵۳) را در میدانهای مجاورتی مانند ضربگرهای لاگرانژ ضرب می‌کنیم و آنها را به  $H_p$  اضافه می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} H_p &= \int (h_p + h\bar{V}_p) dV + \mathbf{h}_{,u} \bullet \mathbf{u}_p + \sigma^a \bullet [\varepsilon_p - \mathbf{L}_1(\mathbf{u}_p) + \bar{\varepsilon}] \\ &\quad + \varepsilon^a \bullet (\sigma_p - \mathbf{D}\varepsilon_p) - \sigma_p \bullet \mathbf{L}_1(\mathbf{u}^a) + \mathbf{f}^p \bullet \mathbf{u}^a - \mathbf{D}\bar{\varepsilon} \bullet \mathbf{L}_1(\mathbf{u}^a) \\ &= \int (h_p + h\bar{V}_p) dV + \mathbf{h}_{,u} \bullet \mathbf{u}_p - \sigma^a \bullet \mathbf{L}_1(\mathbf{u}_p) + \varepsilon_p \bullet (\sigma^a - \mathbf{D}\varepsilon^a) \\ &\quad + \sigma_p \bullet [\varepsilon^a - \mathbf{L}_1(\mathbf{u}^a)] + [\sigma^a - \mathbf{D}\mathbf{L}_1(\mathbf{u}^a)] \bullet \bar{\varepsilon} + \mathbf{f}^p. \end{aligned} \quad (۸.۴.۵۴)$$

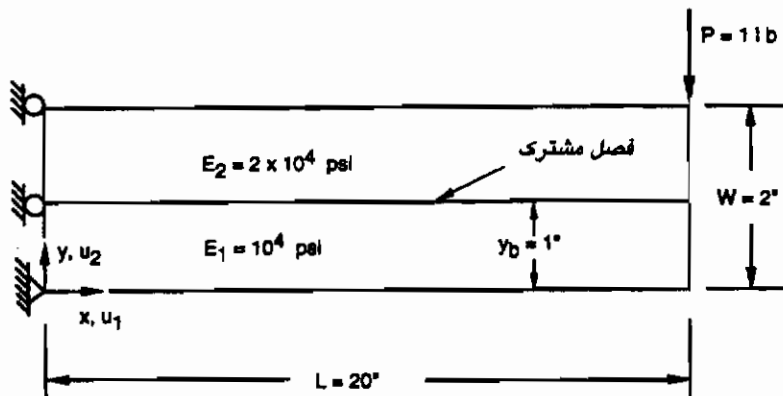
با توجه به معادله (۸.۴.۵۴) می‌بینیم که می‌توان جملات حساسیت پاسخ را با تعریف یک مجاور مانند آنچه که در مورد متغیر سختی در معادلات (۸.۱.۲۴) تا (۸.۱.۲۶) انجام شد حذف نمود. داریم:

$$H_p = \int (h_p + h\bar{V}_p) dV + \mathbf{f}^p \bullet \mathbf{u}^a. \quad (۸.۴.۵۵)$$

برای معادله (۸.۴.۵۵) باید  $\mathbf{f}^p$  را از انتگرال‌های حجمی معادله (۸.۴.۵۱) ارزیابی کنیم. این امکان نیز وجود دارد که  $\mathbf{f}^p \bullet \mathbf{u}^a$  به انتگرال‌های سطحی تبدیل گردد (برای مثال مراجع [6]، [7]). با این وجود تجربه محاسباتی خوبی از روش مجاورتی وجود ندارد (برای مثال مرجع [12]). متأسفانه امکان این که بتوان گفت کدام روش همیشه نتایج دقیقتری می‌دهد وجود ندارد؛ همان گونه که در مثال زیر نشان داده خواهد شد.

#### مثال ۸.۴.۲

تیر یک سرگیردار نشان داده شده در شکل (۸.۴.۴) با اجزای تنش صفحه‌ای مستطیلی شبیه سازی می‌شود. تیر ترکیبی از دو ماه با ضریبهای ارتجاعی متفاوت می‌باشد و موقعیت فصل مشترک بین دو ماده متغیر طراحی  $p$  می‌باشد. حساسیت تغییر مکان سر نسبت به موقعیت فصل مشترک با استفاده از شش



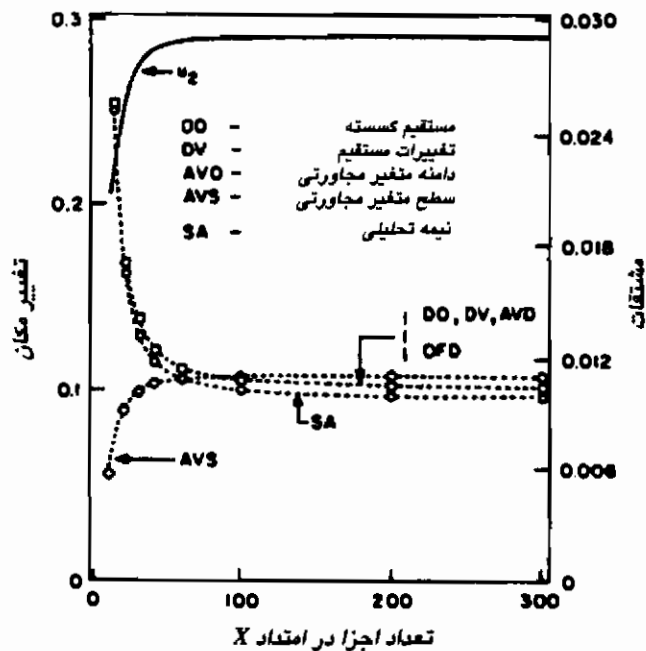
تعداد اجزا در امتداد X = nx

تعداد اجزا در امتداد y زیر فصل مشترک = nys

تعداد اجزا در امتداد y بالای فصل مشترک = nyh

شکل ۸.۴.۴ هندسه، بارگذاری و تعریف تقسیم بندی تیر یک سرگیردار مدل شده با اجزای تنش صفحه ای (از

مرجع [5])



شکل ۸.۴.۵ همگرایی تغییر مکان سر و مشتق آن برای ny = 8

## بخش ۸.۵: تمرینها ۲۵۷

روش محاسبه شده است: (I) تفاضل - محدود کلی (OFD)؛ (II) نیمه تحلیلی (SA)؛ (III) مستقیم گسسته (DD)؛ (IV) تغییرات مستقیم (DV)؛ (V) دامنه متغیر مجاورتی (AVD) و (VI) سطح متغیر مجاورتی (AVS). سه روش اول در فصل ۷، دو روش بعدی در همین فصل و آخرین روش در مرجع [6] بحث شده اند.

همگرایی تغییر مکان و مشتق آن با افزایش تعداد اجزا در امتداد محور تیر در شکل (۸.۴.۵) نشان داده شده است. همان گونه که انتظار می رود، همگرایی مشتقات آهسته تر از همگرایی تغییر مکانهاست. همچنین مشاهده می شود که گرچه چندین روش از جمله روشهای مستقیم و روش دامنه متغیر مجاورتی به خوبی با روش تفاضل محدود کلی مطابقت می کنند، اما آنها از روش سطح متغیر مجاورتی دقیقتر نیستند. آنها از جهت های متفاوت به مقدار صحیح همگرا می شوند.

## ۸.۵ تمرینها

۱. خرابای سه میله ای مثال ۸.۱.۱ به جای بارهای مکانیکی، به وسیله حرارت دادن عضو  $A$  به اندازه  $\Delta T$  درجه، بارگذاری شده است. با استفاده از روش مستقیم، مشتقات تنش ها را در سه عضو نسبت به سطح مقطع عضو  $A$  بر حسب  $A, l, E, \Delta T$  و ضریب انبساط حرارتی  $\alpha$  محاسبه کنید.
۲. عبارتی برای بار در حالت تحلیل سازه خطی، بر حسب تابع  $g(T_i)$  به دست آورید که  $T_i$ ها مؤلفه های کشش سطحی مرزند.
۳. عبارتی برای  $G_p$  بخش ۸.۱.۲ برای حالتی که کرنش اولیه صفر نیست به دست آورید.
۴. با استفاده از نتایج به دست آمده از مسأله قبلی، مشتقات تنش در عضو  $A$  از خرابای سه میله ای مسأله ۱ را نسبت به دو مساحت سطح مقطع از روش مجاورتی محاسبه کنید.
۵. نشان دهید که معادلات (۸.۱.۲۷) و (۸.۱.۴۰) برای مسأله غیر خطی نیز قابل استفاده است.
۶. با استفاده از روشهای مستقیم و مجاورتی مشتق کرنش محوری  $\sigma_z$  در مثال (۸.۲.۱) را نسبت به  $A$  محاسبه کنید.
۷. معادله (۸.۳.۹) را به دست آورید.
۸. مثال (۸.۴.۱) را با استفاده از روش مجاورتی تکرار کنید.



## ۸.۶ مراجع

- [1] Cohen, G.A., "FASOR—A program for Stress, Buckling, and Vibration of Shells of Revolution", *Advances in Engineering Software*, 3 (4), pp.155-162, 1981.
- [2] Haug, E.J., Choi, K.K., and Komkov, V., *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, 1986.
- [3] Mróz, Z., Kamat, M.P., and Plaut, R.H., "Sensitivity Analysis and Optimal Design of Nonlinear Beams and Plates," *J. Struct. Mech.*, 13 (3/4), pp. 245-266, 1985.
- [4] Cohen, G.A., "Effect of Nonlinear Prebuckling State on the Postbuckling Behavior and Imperfection Sensitivity of Elastic Structures", *AIAA Journal*, 6 (8), pp. 1616-1619, 1968.
- [5] Mróz, Z., "Sensitivity Analysis and Optimal Design with Account for Varying Shape and Support Conditions", In *Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems* (C.A. Mota Soares, Editor), Springer-Verlag, 1987, pp. 407-438.
- [6] Choi, K.K., "Shape Design Sensitivity Analysis and Optimal Design of Structural Systems", In *Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems* (C.A. Mota Soares, Editor), Springer-Verlag, 1987, pp. 439-492.
- [7] Yang, R.-J., "A Three Dimensional Shape Optimization System—SHOP3D", *Computers and Structures*, 31(8), pp. 881-890, 1989.
- [8] Dems, K., and Haftka, R.T., "Two Approaches to Sensitivity Analysis for Shape Variation of Structures," *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 16, No. 4, pp. 501-522, 1988/89.
- [9] Dems, K., and Mróz, Z., "Variational Approach by Means of Adjoint Systems to Structural Optimization and Sensitivity Analysis, Part I: Variation of Material Parameters within Fixed Domain," *Int. J. Solids Struct.*, 19 (8), pp. 677-692, 1983, "Part II: Structure Shape Variation," 20, pp. 527-552, 1984.
- [10] Phelan, D.G., and Haber, R.B., "Sensitivity Analysis of Linear Elastic Systems Using Domain Parametrization and a Mixed Mutual Energy Principle," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 77, pp. 31-59, 1989.
- [11] Arora, J.S., and Cardoso, J.B., "A Variational Principle for Shape Design Sensitivity Analysis," *AIAA Paper 91-1213-CP*, Proceedings AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 32nd Structures, Structural Dynamics and Material Conference, Baltimore, MD, April 8-10, 1991, Part 1, pp. 664-674.
- [12] Choi, K.K. and Seong, H.G., "A Domain Method for Shape Design Sensitivity of Built-Up Structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 57, pp. 1-15, 1986.
- [13] Haftka, R.T., and Barthelemy, B., "On the Accuracy of Shape Sensitivity Derivatives", In: Eschenauer, H.A., and Thierauf, G. (eds), *Discretization Methods and Structural Optimization—Procedures and Applications*, pp. 136-144, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

## روشهای معیار بهینگی و دوگان

۹

در بیشتر مثالهایی که در فصل ۲ به صورت تحلیلی حل شدند، کلید حل مسأله، استفاده از معادلات جبری یا دیفرانسیلی بود که شرط بهینگی را تشکیل می دادند. برای یک مسأله جبری نامقید، شرط بهینگی صفر شدن مشتقات اول تابع هدف است. وقتی که تابع هدف به شکل تابعی (تابعی از توابع) است، شرایط بهینگی معادلات اولر - لاگرانژند (به عنوان مثال معادله (۱۳، ۲۰، ۲۰)). از طرفی روشهای حل عددی فصلهای ۴ و ۵ (که تحت عنوان روشهای جست و جوی مستقیم دسته بندی شدند) شرایط بهینگی را برای رسیدن به طراحی بهینه مورد استفاده قرار نمی دهند. خواننده ممکن است از این که روشهای حل عددی برای حل مسائل ارائه شده در فصل ۲ استفاده نشده اند شگفت زده شده باشد. در حقیقت چنین روشهای عددی وجود دارند و به عنوان روشهای معیار بهینگی شناخته می شوند. یک دلیل این که بیان عملکرد چنین روشهایی تا این فصل به تعویق افتاد، پذیرش محدود آن از سوی بهینه سازان بود.

در حالی که روشهای جست و جوی مینیم که در فصلهای ۴ و ۵ توضیح داده شدند، به طور گسترده ای در شاخه های مختلف مهندسی، علوم و علوم مدیریت مورد استفاده قرار گرفته اند؛ ولی روشهای معیار بهینگی بیشتر در طراحی سازه ها مورد استفاده قرار گرفته است. حتی در همین دامنه کاربردی نیز مزیت آن از نظر دست اندرکاران، مورد تردید است.

ارزش روشهای معیار بهینگی، زمانی روشن می شود که ارتباط نزدیک آنها را با دو گانی در روشهای حل دوگان مورد توجه قرار دهیم (بخش ۳، ۷۰ را ببینید). این ارتباط که اولین بار توسط فلوری<sup>۱</sup> بیان گردید، به درك کارآمدی این روش، در صورت کم بودن تعداد قیدها نسبت به متغیرهای طراحی، کمک

می کند. این فصل تلاش می کند تا توانایی روش معیار بهینگی و روش دوگان را برای حالتی که تعداد قیدها کم است نشان دهد. در حالت خاص هنگامی که تنها یک قید (به همراه امکان وجود حد بالا و پایین برای متغیرها) وجود دارد با اطمینان می توان ادعا کرد که روشهای معیار بهینگی و یا روش دوگان بهترین روش است. این فصل با توضیحاتی برای درک روشهای معیار بهینگی آغاز می گردد. این روشها سبب توسعه روشهای جامعتری شده اند که امروزه مورد استفاده قرار می گیرند. سپس روش دوگان توضیح داده خواهد شد و در انتها نشان می دهیم که روش معیار بهینگی با روش دوگان دارای ارتباط نزدیک است.

### ۹.۱ روشهای معیار بهینگی شهودی

روشهای معیار بهینگی شامل دو جزء است که یکدیگر را کامل می کنند. اولین جزء شرط بهینگی است که می تواند یک عبارت صریح ریاضی مانند شرایط کان-تاکر و یا یک شرط شهودی مانند یکنواخت بودن چگالی انرژی کرنشی در سازه باشد. دومین جزء، الگوریتم مورد استفاده برای تغییر اندازه سازه به منظور برآورده شدن معیار بهینه سازی است. بار دیگر تأکید می شود که برای اطمینان از برآورده سازی معیار بهینگی روش صریح ریاضی مورد استفاده قرار می گیرد، در حالی که ممکن است فرد روش خاص دیگری ابداع کند که گاهی کاربرد دارد و گاهی ندارد. تقسیم روشها به صریح و شهودی معمولاً بیشتر به انتخاب معیار بهینگی بستگی دارد تا الگوریتم تعیین اندازه. در بخشهای بعد این اصطلاح بارها مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

#### ۹.۱.۱ طراحی تمام تنیده

فن طراحی تمام تنیده<sup>۱</sup> (FSD) شاید موفقترین روش معیار بهینگی است و سبب جذابیت اولیه این روش بوده است. فن FSD برای سازه هایی که تنها در معرض تنش و قیدهای حد پایین هستند، مورد استفاده قرار می گیرد. معیار بهینگی FSD می تواند به صورت زیر بیان گردد:

«در طراحی بهین، هر عضو از سازه که در پایین ترین حد تنش قرار ندارد، دست کم در اثر یکی از شرایط بار طراحی، تمام تنیده است.»

1) Fully stressed design

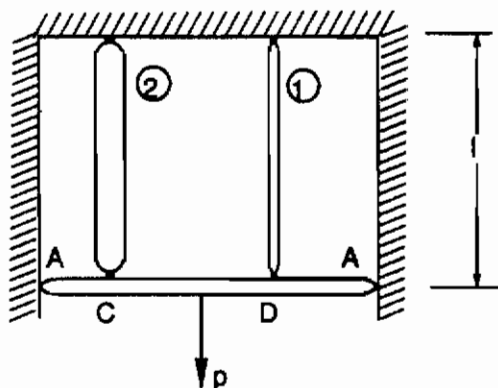
## بخش ۹.۱: روشهای معیار بهینگی شهودی ۲۶۱

این معیار بهینگی ایجاب می کند که ما از اعضای که تمام تنیده نیستند، مصالح را برداریم تا این که قید حد پایین مانع شود. این مسأله قابل قبول به نظر می رسد، اما بر پایه این شرط ضمنی قرار دارد که تأثیر اولیه اضافه کردن یا برداشتن مصالح از یک عضو سازه سبب تغییر تنشها در آن عضو می شود. اگر این فرض نقض شود، یعنی اگر اضافه کردن مصالح به یک بخشی از سازه می تواند تأثیرات زیادی بر تنشهای سایر قسمتهای سازه داشته باشد، ممکن است اعضای را که دارای حداکثر تنش ممکن نیستند نگه داریم، زیرا سبب کاهش تنش در سایر اعضا می شوند.

برای سازه های معین ایستایی فرض این که اضافه کردن مصالح به یک عضو، تنشهای آن عضو را تحت تأثیر قرار می دهد فرض درستی است. در حقیقت اگر بارهای حرارتی و نیروهای مانند موجود نباشند، اضافه نمودن مصالح به هیچ وجه اثری روش تنشهای سایر اعضا نخواهد داشت. بنابراین می توان انتظار داشت که FSD حداقل وزن طراحی را برای چنین سازه هایی به دست دهد و این به اثبات رسیده است [1,2]. اما برای سازه های نامعین ایستایی طراحی برای مینیمم شدن وزن ممکن است یک طراحی تمام تنیده نباشد [3,6]. در بیشتر حالت هایی که سازه تنها از یک مصالح ساخته شده است، یک طراحی تمام تنیده نزدیک به طراحی بهینه وجود دارد. بنابراین، این روش به طور گسترده برای سازه های فلزی مورد استفاده قرار گرفته است، مخصوصاً در صنعت هوافضا (برای نمونه مراجع را ببینید). همان گونه که در مثال بعد روشن خواهد شد، روش FSD ممکن است هنگامی که در سازه چندین مصالح به کار رفته به آن خوبی که انتظار می رود نباشد.

## مثال ۹.۱.۱

بار  $p$  توسط صفحه صلب A-A به دو عضو محوری مانند شکل ۹.۱.۱ منتقل می شود. صفحه کاملاً افقی باقی می ماند به گونه ای که تغییر مکان عمودی نقاط  $D$  و  $C$  یکسان است. این امر می تواند با جابه جاشدن بار  $p$  همزمان با تغییر مساحت سطح مقطع اعضای ۱ و ۲ نیز تحقق یابد. دو عضو از آلایزهای متفاوت فولادند که ضریب ارتجاعی یکسان  $E$  ولی جرم حجمی متفاوت  $p_1$  و  $p_2$  و همچنین تنش تسلیم  $\sigma_{01}$  و  $\sigma_{02}$  دارند. آلایزی که تنش تسلیم بالاتری دارد، تردتر است و به همین دلیل ما نمی توانیم آن را برای هر دو عضو به کار بگیریم. می خواهیم مساحت های سطح مقطعی  $A_1$  و  $A_2$  را به گونه ای انتخاب کنیم که تنشهای دو میله از تنش تسلیم تجاوز نکند و جرم سازه مینیمم باشد. افزون بر این، مساحت سطح مقطعی



شکل ۹.۱.۱ سازه دو میله ای

باید از یک مقدار حداقل  $A_0$  بیشتر باشد.

جرم، که تابع هدف است و باید مینیمم شود عبارت است از:

$$m = l(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2)$$

تنش در هر عضو (با توجه به شرط افقی ماندن صفحه A-A) به سادگی به دست می آید.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{p}{A_1 + A_2}.$$

فرض می کنیم که جرم عضو یک از آلیاژ مقاومتر و با جرم حجمی کمتر ساخته شده باشد، به گونه ای که:

$$\rho_1 = 0.9\rho_2, \sigma_{01} = 2\sigma_{02}$$

در این شرایط قید بحرانی عبارت است از:

$$\sigma_2 = \sigma_{02} = \frac{p}{A_1 + A_2}.$$

بنابراین:  $A_1 + A_2 = p/\sigma_{02}$ . بدیهی است که برای مینیمم شدن جرم باید از آلیاژ مقاومتر بیشترین استفاده

را ببریم و مساحت سطح مقطع عضو دو را به حداقل مقدار یعنی  $A_2 = A_0$  برسانیم.

بنابراین:  $A_1 = p/\sigma_{02} - A_0$ . مشروط به این که  $p/\sigma_{02}$  بزرگتر از  $2A_0$  باشد. این طراحی تمام تنیده

نیست، زیرا تنش وجود در عضو یک فقط نیمی از مقدار تنش مجاز آن است و مساحت سطح مقطع آن

در حد پایین خود نیست. طراحی تمام تنیده (که از فن نسبت تنش به دست می آید) عبارت است از:

## بخش ۹.۱: روشهای معیار بهینگی شهودی ۴۶۳

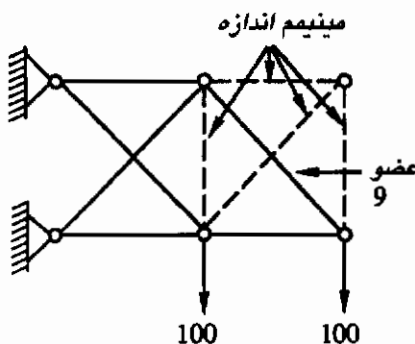
در این طراحی عضو ۲ تمام تنیده بوده و عضو ۱ در پایین ترین حد ممکن خود قرار دارد. البته این طرح مطلوب نیست، زیرا از آلیاژ مقاومتر استفاده کمتر و از آلیاژ با مقاومت کمتر، استفاده بیشتری شده است. برای روشن تر شدن تأثیر جرم فرض کنید

$$p/\sigma_{02} = 20A_0.$$

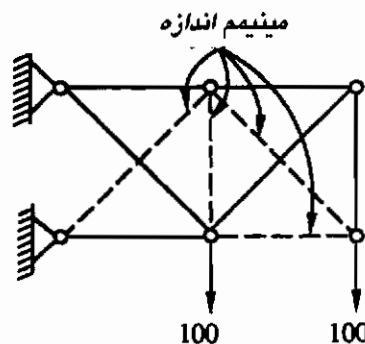
در این حالت طراحی بهینه عبارت است از:  $A_1 = 19A_0$ ,  $A_2 = A_0$  و  $m = 18.1\rho_2 A_0 l$ . در مقابل

طراحی تمام تنیده عبارت است از:  $A_1 = A_0$ ,  $A_2 = 19A_0$  و  $m = 19.9\rho_2 A_0 l$  ●●●

افزون بر این که در مثال ۹.۱.۱ از دو نوع مصالح استفاده شده، ویژگی دیگر آن، این است که جرم اضافی زیادی دارد به گونه ای که تغییر مساحت سطح مقطع یک عضو تأثیر زیادی بر روی تنش عضو دیگر دارد. در این مثال تفاوت طرح تمام تنیده و بهینه به سادگی قابل مشاهده است.



(a) طراحی بهین



(b) طراحی تمام تنیده

## شکل ۹.۱.۲ تارخیچه چرخه ها برای مینیم سازی

یک مثال کلاسیک پیچیده تر (برك و خات<sup>۱</sup> [9]) که اغلب برای نشان دادن ضعف FSD به کار می رود عبارت است از خریدای ده عضوی نشان داده شده در شکل ۹.۱.۲. خرپا از آلومینیم ساخته شده است (ضریب ارتجاعی  $E = 10^7$  psi و جرم حجمی  $\rho = 0.1$  lb/in<sup>3</sup>) که مساحت سطح مقطع هر عضو نباید از 0.1 in<sup>2</sup> کمتر شود. تنش تسلیم عبارت است از  $\pm 25000$  psi به غیر از عضو ۹. برك و خات نشان دادند

1) Berke and Khot

## ۲۶۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی و دوگان)

که برای  $\sigma_{00} \geq 37500 \text{ psi}$  طرح بهینه و FSD یکی است. اما برای  $\sigma_{00} \geq 37500 \text{ psi}$  وزن طرح بهینه 1497.6 lb و عضو ۹ نه تمام تنیده است و نه مساحت مقطع آن در حد پایین قرار دارد. وزن طرح FSD برابر 1725.2 lb است که 15% از بهینه سنگین تر است و عضو ۹ در حداقل مساحت سطح مقطع قرار دارد. هر دو طرح در شکل ۹.۱.۲ نشان داده شده اند.

فن FSD معمولاً با یک الگوریتم تغییر اندازه که بر پایه فرض استقلال توزیع بار در سازه از اندازه عضو قرار دارد، کامل می شود. یعنی تنش در هر عضو محاسبه می شود و سپس اندازه سازه تغییر داده می شود تا تنشها به مقدار مجاز آنها نزدیک گردد، با این فرض که بار حمل شده توسط اعضا ثابت می ماند (و این منطقی است زیرا معیار FSD بر پایه فرض مشابهی قرار دارد) برای مثال، در خرپاها که متغیرهای طراحی معمولاً مساحت سطح مقطع هاست، نیرو در هر عضو عبارت است از  $\sigma A$ ، که  $\sigma$  تنش و  $A$  مساحت سطح مقطع است. با فرض ثابت بودن  $\sigma A$  به فن تغییر اندازه نسبت تنش می رسم:

$$A_{\text{جدید}} = A_{\text{پس}} \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad (9.1.1)$$

که اندازه جدید  $A_{\text{جدید}}$  را بر حسب اندازه های قدیمی  $A_{\text{پس}}$  و تنش  $\sigma$  و مقدار مجاز  $\sigma_0$  به دست می دهد. برای یک خرپا که از نظر ایستایی معین است، فرض ثابت بودن نیروی هر عضو، فرضی دقیق است و معادله (۹.۱.۱) تنش را در هر عضو به مقدار مجاز آن خواهد رساند. ولی اگر سازه از نظر ایستایی نامعین باشد معادله (۹.۱.۱) باید بارها تکرار شود تا به سمت رواداری مورد نظر همگرا شود. همچنین، اگر  $A_{\text{new}}$  که از معادله (۹.۱.۱) به دست آمده کوچکتر از حداقل مقدار باشد، حداقل مقدار انتخاب می شود نه مقدار به دست آمده از معادله (۹.۱.۱). این روش که فن نسبت تنش نامیده می شود با مثال زیر تشریح می گردد.

## مثال ۹.۱.۲

برای سازه مثال (۹.۱.۱) از رابطه نسبت تنش استفاده می کنیم و چرخه های متعددی را تکرار می کنیم. فرض می کنیم در طرح اولیه  $A_1 = A_2 = A_0$  و بار  $p = 20A_0\sigma_{02}$ . نتایج حاصل از چرخه ها در جدول (۹.۱.۱) آمده است.

همگرایی سریع است و اگر مصالح عضو ۲ سبکتر باشد، حاصل این طراحی، طرح بهینه خواهد بود. ●●●

جدول ۹.۱.۱

چرخه	$A_1/A_0$	$A_2/A_0$	$\sigma_1/\sigma_{01}$	$\sigma_2/\sigma_{02}$
1	1.00	1.00	5.00	10.00
2	5.00	10.00	0.67	1.33
3	3.33	13.33	0.60	1.2
4	2.00	16.00	0.56	1.11
5	1.11	17.78	0.56	1.059
6	1.00	18.82	0.504	1.009
7	1.00	18.99	0.500	1.0005

همان گونه که در مثال (۹.۱.۲) دیده می شود، همگرایی فن نسبت تنش می تواند بسیار سریع باشد و این نکته یک علت اصلی جذابیت این روش است. یک علت جذابیت مهمتر این است که نیازی به مشتقات تنش نسبت به متغیرهای طراحی نیست. وقتی سازه دارای صدها یا هزاران عضو باشد که هر کدام باید جداگانه اندازه هایشان تغییر یابد، برای به دست آوردن مشتقات تمام تنشهای بحرانی نسبت به متغیرهای طراحی لازم نیست هزینه ای صرف شود. عملاً تمامی الگوریتمهای برنامه ریزی ریاضی نیاز به چنین مشتقاتی دارند، در حالی که فن نسبت تنش به آنها نیازی ندارد. بنابراین روش FSD برای طراحی خریپاهایی که تنها قید آن تنش باشد بسیار مؤثر است.

برای سایر انواع سازه ها نیز فن نسبت تنش می تواند عمومیت داده شود با این فرض که نیروی عضو مستقل از اندازه آن باشد. برای مثال در سازه های دیواره ای نازک که تنها تنش غشایی مهم است، فرض می شود که  $t\sigma_{ij}$  ثابت است که  $t$  ضخامت یک نقطه مشخص و  $\sigma_{ij}$  مؤلفه های تنش غشایی آن است. در چنین حالتی قید تنش معمولاً به صورت تابعی از یک تنش معادل  $\sigma_e$  به شکل زیر بیان می شود.

$$\sigma_e = f(\sigma_{ij}) \leq \sigma_0. \quad (9.1.2)$$

مثلاً در حالت تنش صفحه ای، تنش وان میز<sup>۱</sup> برای یک ماده<sup>۱</sup> همسانگرد عبارت است از:

$$\sigma_e^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 \leq \sigma_0^2. \quad (9.1.3)$$

در این حالت فن نسبت تنش به شکل زیر است:

$$t_{\text{جدید}} = t_{\text{مبدا}} \frac{\sigma_e}{\sigma_0}. \quad (9.1.4)$$

1) Von-Mises



وقتی تنش خمشی وجود دارد، معادله تغییر اندازه پیچیده تر است. این موضوع تمرین ۳ است. هنگامی که فرض ثابت ماندن نیروهای هر عضو قابل قبول نیست، فن نسبت تنش به کندی همگرا می شود و طراحی FSD ممکن است بهینه نباشد. این شرایط هنگامی اتفاق می افتد که سازه دارای عضوهای زیادی است (به عنوان مثال مرجع آدلمن<sup>۱</sup> و دیگران [10] را ببینید) و یا وقتی که بارها به اندازه ها بستگی دارند (مانند بارهای حرارتی یا ماند). این روش می تواند برای بارهای وابسته به اندازه، تعمیم یابد (برای مثال مرجع آدلمن و نارایا ناسوامی<sup>۲</sup> [11] برای بار حرارتی)، ولی برای مسائلی که دارای اعضای زیادی هستند، کار چندانی نمی توان انجام داد. ترکیب FSD و فن نسبت تنش عملاً برای طراحی سازه هایی که از مواد مرکب ساخته شده اند، غیر قابل استفاده است. از آن جا که مواد مرکب ناهمسانگردند، طراحی FSD ممکن است از نقطه بهین دور باشد و به دلیل خصوصیات ذاتی مواد مرکب که ماده اضافه دارند، همگرایی می تواند بسیار کند باشد.

موفقیت FSD سبب توسعه آن در بهینه سازی با قیدهای تغییر مکان شد که زیر بنای روش های معیار بهینگی مدرن است. و نکایا<sup>۳</sup> [12] یک روش دقیق معیار بهینگی را بر اساس چگالی انرژی کرنشی سازه بنا نهاد. این معیار بیان می کند که در طرح بهین، نسبت انرژی کرنشی هر عضو به ظرفیت انرژی کرنشی آن ثابت است. این معیار آغاز پدید آمدن معیار بهینگی عمومی تری بود که به شرح آن خواهیم پرداخت. معیار چگالی انرژی کرنشی در بعضی شرایط دقیق است، اما در مسائلی که برای آنها معیار بهینه سازی دقیقی وجود ندارد نیز مورد استفاده قرار می گیرد. به عنوان مثال سیگل<sup>۴</sup> [13] آن را برای طراحی هایی که مقید به قیدهای لرزشی اند به کار برده است. سیگل پیشنهاد می کند که چگالی انرژی کرنشی مربوط به مود لرزش باید در تمام سازه ثابت باشد. در هر دو مرجع [12] و [13] معیار بهینه سازی با یک قاعده ساده تغییر اندازه مشابه فن نسبت تنش همراه است.

## ۲. ۱. ۹ سایر روشهای شهودی

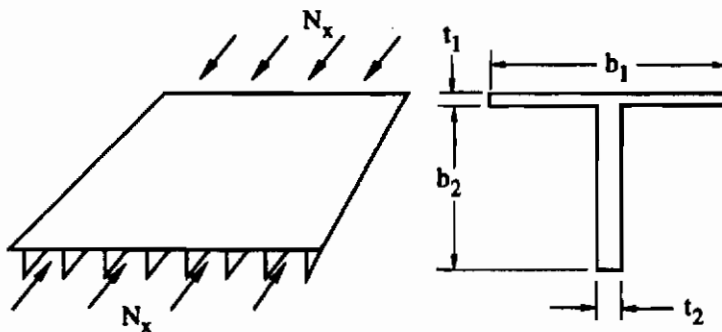
روش حالت شکست همزمان یکی از قدیمی ترین فنون طراحی است که شبیه FSD است. در این روش فرض می شود سبکترین طرح هنگامی به دست می آید که دو یا چند مود شکست همزمان اتفاق بیفتد. همچنین فرض می شود که مودهای شکستی که در بهین (یا در سبکترین طرح) فعالند از پیش شناخته

1) Adelman

2) Adelman and Narayanaswami

3) Venkayya

4) Siegel



شکل ۹.۱۰۳ صفحه فلزی مقاوم شده توسط تیغه هایی با چهار متغیر طراحی

شده اند.

برای مثال استراود<sup>۱</sup> [14] توجه کنید که چگونه می توان این روش را برای طراحی یک صفحه، که با تیغه هایی سختی آن افزایش یافته و سطح مقطع تیغه ها مانند شکل ۹.۱۰۳ است، به کار برد. چهار متغیر طراحی عبارتند از  $t_1, b_1, t_2, b_2$ . ابتدا با استفاده از تجربه، تناسبهایی مانند نسبت عرض به ضخامت صفحه را تعریف می کنیم. تعریف این تناسبها دو متغیر طراحی را حذف می کنند. آن گاه دو متغیر باقیمانده با مساوی قرار دادن بار کمانش کلی و بار کمانشی محلی با بار اعمال شده محاسبه می شوند. بدین ترتیب دو معادله برای دو متغیر مجهول به دست می آید. موفقیت این روش در گرو تجربه و آگاهی مهندسانی است که تناسبها را تعریف کرده و مودهای شکست را شناسایی می کنند. برای سازه های فلزی که شکلهای معمول دارند، با انجام آزمایشهای فراوانی این تجربه حاصل شده است. محدود کردن این تناسبها دو هدف را دنبال می کند: تعداد متغیرهای طراحی را کاهش می دهد و از مودهای شکست که تحلیل را مشکل می سازد اجتناب می شود. بنابراین، این روش ساده سازی شده با توانایی تحلیل ساده سازگار است.

## ۹.۲ روشهای دوگان

همان گونه که در مقدمه<sup>۱</sup> این فصل عنوان شد، روشهای دوگان برای آزمایش زیر بنای نظری بعضی از روشهای معیار بهینگی مورد استفاده قرار می گرفته است. از نظر تاریخی، روش معیار بهینگی از روش

1) Stroud

۴۶۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی و دوگان)

دوگان در بهینه سازی طراحی سازه ها قدیمی تر است، اما به دلیل اهمیت نظری آن، بر خلاف روند تاریخی ابتدا به بحث روش دوگان می پردازیم.

#### ۹.۲.۱ رابطه سازی عمومی

ضربگرهای لاگرانژ معمولاً متغیرهای دوگان یک مسأله بهینه سازی مقید نامیده می شوند. برای مسائل خطی رابطه سازی اولیه و دوگان در فصل سوم گفته شد و به آسانی می توان نقش متغیرهای دوگان به عنوان ضربگرهای لاگرانژ را درک کرد (مثال ۱ را ببینید). اگر مسأله اولیه به صورت زیر نوشته شده باشد

$$\begin{array}{ll} \text{رانسبت به} & c^T x \\ & Ax - b \geq 0, \\ \text{مینیم کنید} & x \geq 0. \end{array}$$

رابطه سازی دوگان مسأله به صورت ضربگرهای لاگرانژ به شکل زیر است

$$\begin{array}{ll} \text{رانسبت به} & \lambda^T b \\ & \lambda^T A - c \leq 0, \\ \text{ماکزیم کنید} & \lambda \geq 0. \end{array}$$

چندین روش برای تعمیم رابطه سازی دوگان خطی به مسائل غیر خطی وجود دارد. در بهینه سازی سازه ها، موفقترین آن متسبب به فالک<sup>۱</sup> است که توسط فلوری [16] در مسائل جدایی پذیر به کار گرفته شد. مسأله بهینه سازی اصلی به شکل زیر است:

$$\begin{array}{ll} \text{رانسبت به} & f(x) \\ \text{مینیم کنید} & g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g. \end{array}$$

شرایط لازم برای یک مینیمم محلی مسأله (۹.۲.۱) در نقطه  $x^*$  این است که بردار  $\lambda^*$  (با مؤلفه های  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_{n_g}^*$ ) به گونه ای وجود داشته باشد که

$$g_j(x^*) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \quad (9.2.2)$$

$$\lambda_j^* g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \quad (9.2.3)$$

$$\lambda_j^* \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \quad (9.2.4)$$

بخش ۹.۲: روشهای دوگان ۴۶۹

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.2.5)$$

معادلات (۹.۲.۳) تا (۹.۲.۵) شرایط کان تاکنند (فصل ۵ را ببینید). اگر تابع  $\mathcal{L}$  به نام تابع لاگرانژین را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j g_j(x). \quad (9.2.6)$$

معادله (۹.۲.۵) می تواند به عنوان شرایط ایستای نسبت به  $x$  تابع لاگرانژین در نظر گرفته شود. رابطه سازی دوگان فالک عبارت است از:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_m(\lambda) \text{ را مشروط به} \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

در حالی که

$$\mathcal{L}_m(\lambda) = \min_{x \in C} \mathcal{L}(x, \lambda), \quad (9.2.8)$$

و  $C$  یک مجموعه محدب بسته است که برای خوش خیم سازی مسأله تعریف می شود. به عنوان مثال اگر بدانیم که جواب مسأله کراندار است، می توان  $C$  را این گونه انتخاب کرد:

$$C = \{x : -r \leq x_i \leq r, \quad i = 1, \dots, n\}, \quad (9.2.9)$$

و  $r$  یک عدد به اندازه کافی بزرگ است. در شرایط خاصی جواب (۹.۲.۷) با جواب مسأله اصلی (۹.۲.۱) یکسان خواهد بود و مقدار بهینه  $\mathcal{L}_m$  با مقدار بهین  $f$  یکسان است. یک دسته از شرایط برای این است که مسأله بهینه سازی محدب باشد ( $f(x)$  محدب و کراندار، و  $g_j(x)$  مقعر)،  $f$  و  $g_j$  تا دو مرتبه پیوسته و مشتق پذیر باشند، و ماتریس مشتقهای دوم  $\mathcal{L}(x, \lambda)$  نسبت به  $x$  در  $x^*$  غیر منفرد باشد. با این شرایط، تحدب همچنین تضمین می کند که تنها یک مینیمم داشته باشیم. برای حالت خطی، دوگان فالک به رابطه دوگان بحث شده در بخش ۳.۷ می انجامد (تمرین ۱).

در حالت کلی، حل (۹.۲.۷) که یک بهینه سازی متداخل است، به جای (۹.۲.۱) که یک مسأله بهینه سازی معمولی است توجیه ندارد. اما ماکزیمم سازی (۹.۲.۷) و مینیمم سازی (۹.۲.۸) هر دو

۴۷۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهیگی و دوگان)

نامقیدند. در بعضی از شرایط این گونه بهینه سازی ها بسیار ساده است. یکی از این موارد ساده هنگامی است که تابع هدف و تابع قید هر دو توابع جدایی پذیرند.

۹.۲.۲ کاربرد در مسائل جدایی پذیر

هنگامی مسأله بهینه سازی جدایی پذیر نامیده می شود که توابع هدف و قید هر دو جدایی پذیر باشند، یعنی:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i), \quad (9.2.10)$$

$$g_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n g_{ji}(x_i), \quad j = 1, \dots, n_g. \quad (9.2.11)$$

در رابطه سازی ابتدایی، از این جدایی پذیری سود چندانی حاصل نمی شود. اما در رابطه سازی دوگان جدایی پذیری نقش سازنده ای دارد زیرا  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)$  نیز یک تابع جدایی پذیر است و بنابراین می توان آن را با تعدادی از مینیمم سازی های یک بعدی مینیمم ساخت و در نتیجه محاسبه  $\mathcal{L}_m(\lambda)$  آسان خواهد بود.

### مثال ۹.۲.۱

مینیمم تابع  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  را نسبت به دو قید

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 10 \geq 0,$$

$$g_2(\mathbf{x}) = x_2 + 2x_3 - 8 \geq 0.$$

بیابید. حل از روش دوگان:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1(x_1 + x_2 - 10) - \lambda_2(x_2 + 2x_3 - 8) \\ &= L_0 + L_1(x_1) + L_2(x_2) + L_3(x_3), \end{aligned} \quad \text{الف}$$

در حالی که

$$L_1(x_1) = x_1^2 - \lambda_1 x_1,$$

$$L_2(x_2) = x_2^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x_2,$$

$$L_3(x_3) = x_3^2 - 2\lambda_2 x_3,$$

$$L_0 = 10\lambda_1 + 8\lambda_2.$$

ب

برای به دست آوردن مینیمم  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)$  نسبت به  $\mathbf{x}$ ، باید مینیمم توابع  $L_1, L_2, L_3$  را به طور جداگانه به

بخش ۹.۲: روشهای دوگان ۴۷۱

دست آورد. مینیمم  $L_1$  با صفر قرار دادن مشتق اول آن به دست می آید

$$2x_1 - \lambda_1 = 0,$$

بنابراین  $x_1 = \lambda_1/2$ . به همین ترتیب و با روش مشابهی داریم  $x_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$  و  $x_3 = \lambda_2$ . با جایگزینی آنها در  $\mathcal{L}(x, \lambda)$  داریم

$$\mathcal{L}_m(\lambda) = -0.5\lambda_1^2 - 1.25\lambda_2^2 - 0.5\lambda_1\lambda_2 + 10\lambda_1 + 8\lambda_2.$$

اکنون باید ماکزیمم  $\mathcal{L}_m(\lambda)$  را نسبت به قیدهای  $\lambda_1 \geq 0$  و  $\lambda_2 \geq 0$  بیابیم. با دیفرانسیل گیری  $\mathcal{L}_m(\lambda)$

داریم:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \lambda_1} = -\lambda_1 - 0.5\lambda_2 + 10 = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \lambda_2} = -2.5\lambda_2 - 0.5\lambda_1 + 8 = 0,$$

یا

$$\lambda_1 = 9\frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = 1\frac{1}{3}, \quad \mathcal{L}_m(\lambda) = 52.$$

باید در امتداد مرز  $\lambda_1 = 0$  یا  $\lambda_2 = 0$  نیز ماکزیمم را بیابیم. اگر  $\lambda_1 = 0$  باشد

$$\mathcal{L}_m(\lambda) = -1.25\lambda_2^2 + 8\lambda_2,$$

و این تابع در  $\lambda_2 = 3.2$  ماکزیمم می شود  $\mathcal{L}_m(\lambda) = 12.8$ . اگر  $\lambda_2 = 0$  باشد داریم

$$\mathcal{L}_m(\lambda) = -0.5\lambda_1^2 + 10\lambda_1.$$

که ماکزیمم آن در  $\lambda_1 = 10$  اتفاق می افتد و  $\mathcal{L}_m = 50$ . نتیجه می گیریم که ماکزیمم در داخل فضای قابل قبول است. از مقادیر  $x_1, x_2, x_3$  که به دست آمد داریم:

$$x_1 = 4\frac{2}{3}, \quad x_2 = 5\frac{1}{3}, \quad x_3 = 1\frac{1}{3}, \quad f(x) = 52.$$

۲۷۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهیگی و دوگان)

یکسان بودن ماکزیمم  $\mathcal{L}_m(\lambda)$  و مینیمم  $f(x)$  یک آزمون مفید از صحت جوابهایمان است. . . .

### ۹.۲.۳ متغیرهای طراحی گسسته

از آن جا که روش دوگان تنها به مینیمم سازی یک بعدی در فضای متغیرهای طراحی می پردازد، این روش برای حالتی که بعضی از متغیرهای طراحی گسسته باشند، به کار می رفته است (مرجع اشمیت و فلوری<sup>۱</sup> [17] را ببینید). برای تشریح این روش فرض می کنیم تمامی متغیرهای طراحی گسسته اند. یعنی مسأله بهینه سازی به صورت زیر است.

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$$

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^n g_{ji}(x_i) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \quad (9.2.12)$$

رانسبت به

$$x_i \in X_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

مینیمم کنید

مجموعه  $X_i = \{d_{i1}, d_{i2}, \dots\}$  مجموعه از مقادیر گسسته است که  $i$ امین متغیر طراحی می تواند آن مقدار را داشته باشد. تابع لاگرانژین عبارت است از:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n L_i(x_i, \lambda), \quad (9.2.13)$$

در حالی که

$$L_i(x_i, \lambda) = f_i(x_i) - \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j g_{ji}(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.2.14)$$

برای هر  $\lambda$  با مینیمم سازی هر  $L_i$  نسبت به  $x_i$  به ازای تمامی مقادیر گسسته در مجموعه  $X_i$ ،  $\mathcal{L}_m(\lambda)$  را به دست می آوریم.

$$\mathcal{L}_m(\lambda) = \sum_{i=1}^n \min_{x_i \in X_i} L_i(x_i). \quad (9.2.15)$$

توجه کنید که برای هر  $x_i$ ،  $L_i$  یک تابع خطی از  $\lambda$  است. مینیمم  $L_i$  نسبت به  $X_i$  یک تابع قطعه به قطعه خطی است که این قطعات دو نقطه با  $x_i$  متفاوت را با یک خط با  $L_i$  یکسان به هم وصل می کند. اگر

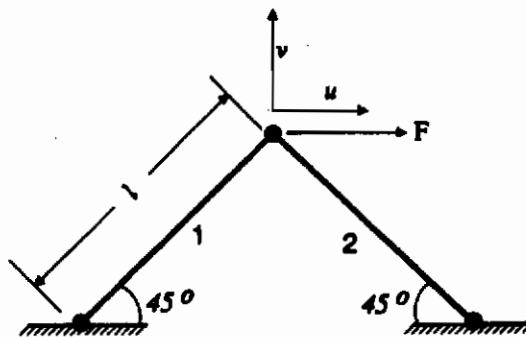
بخش ۹.۲: روشهای دوگان ۴۷۳

مجموعه  $X_i$  به طور یکتا و مرتب شده باشد و مقادیر گسسته  $x_i$  نزدیک به هم باشند، می توان انتظار داشت که این خطوط در محل تقاطعها باشند، جایی که

$$L_i(d_{ij}) = L_i(d_{i(j+1)}). \quad (9.2.16)$$

معادله (۹.۲.۱۶) مرزی را در فضای  $\lambda$  تعریف می کند که این فضا را به ناحیه هایی با  $x_i$  ثابت که یکی از مقادیر گسسته اند، تقسیم می کند. کاربرد این مرزها در حل مسأله دوگان در مثال زیر که از مرجع [18] است تشریح می شود.

مثال ۹.۲.۲



شکل ۹.۲.۱ خرابای دو میله ای

برای خرابای نشان داده شده در شکل ۹.۲.۱ لازم است وزن سازه با انتخاب مساحت های سطح مقطع  $A_i$ ,  $i = 1, 2$  از مجموعه 'گسسته مساحت های

$$A = \{1, 1.5, 2\},$$

مینیمم شود، در حالی که قیدهای تغییر مکان زیر نیز برآورده شوند.

$$u \leq 0.75(FL/E), \quad v \leq 0.25(FL/E).$$

خرپا از نظر ایستایی معین است و تغییر مکانها به شکل زیر به دست می آیند:



۴۴۴ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی و دوگان)

$$u = \frac{FL}{2E} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right), \quad v = \frac{FL}{2E} \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right).$$

بهتر است از  $y_i = 1/A_i$  به عنوان متغیرهای طراحی استفاده شود. اگر وزن را با  $W$  و چگالی وزنی را با  $\rho$  نشان دهیم، مسأله بهینه سازی را می توانیم به شکل زیر رابطه سازی کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{W}{\rho L} &= \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \\ 1.5 - y_1 - y_2 &\geq 0, & \text{را با قیود} \\ 0.5 - y_1 + y_2 &\geq 0, & \text{و} \\ y_1, y_2 &\in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1 \right\}. & \text{مینیمم کنید} \end{aligned}$$

تابع لاگرانژ به شکل زیر است

$$\mathcal{L}(y, \lambda) = 1/y_1 + 1/y_2 - \lambda_1(1.5 - y_1 - y_2) - \lambda_2(0.5 - y_1 + y_2),$$

و

$$\begin{aligned} L_1(y_1, \lambda) &= -1.5\lambda_1 - 0.5\lambda_2 + 1/y_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)y_1, \\ L_2(y_2, \lambda) &= 1/y_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)y_2. \end{aligned}$$

مرزها برای تغییر در مقادیر  $y_1$ ، از معادله (۹.۲.۱۶) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1/2} + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) &= \frac{1}{2/3} + \frac{2}{3}(\lambda_1 + \lambda_2), \\ \frac{1}{2/3} + \frac{2}{3}(\lambda_1 + \lambda_2) &= \frac{1}{1} + \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned}$$

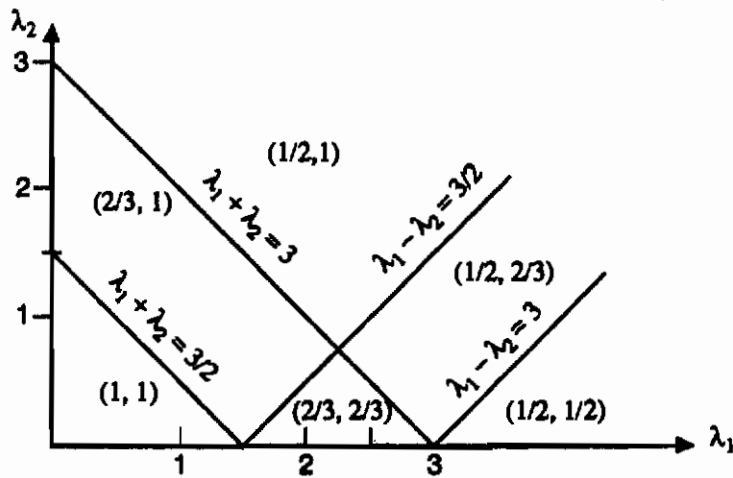
و این معادلات به شکل زیر خلاصه می شوند

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 3, \quad \text{و} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.5.$$

به شکل مشابهی مرزها برای تغییر  $y_2$  عبارت است از:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 3, \quad \text{و} \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 1.5.$$

بخش ۹.۲: روشهای دوگان ۲۷۵



شکل ۹.۲.۲ نواحی در فضای  $(\lambda_1, \lambda_2)$  برای مسأله خربای دو میله ای

این خطوط ربع مثبت صفحه  $(\lambda_1, \lambda_2)$  را به ۶ ناحیه تقسیم می کند که مقادیر  $y_1$  و  $y_2$  در هر ناحیه در شکل (۹.۲.۲) نشان داده شده است. جست و جو برای ماکزیمم  $\mathcal{L}_m$  در ناحیه را از نقطه مرکز  $\lambda = (0,0)$  شروع می کنیم. در این نقطه  $\mathcal{L}(x, \lambda) = 1/y_1 + 1/y_2$  و در نتیجه  $\mathcal{L}(x, \lambda)$  با انتخاب مقادیر گسسته  $y_1 = y_2 = 1$  می شود همان گونه که در شکل نیز دیده می شود. برای ناحیه ای که این مقادیر ثابتند، تابع دوگان عبارت است از:

$$\mathcal{L}_m = 2 + 0.5\lambda_1 - 0.5\lambda_2.$$

بدیهی است که برای ماکزیمم سازی  $\mathcal{L}_m$  مقدار  $\lambda_1$  را افزایش دهیم ( $\lambda_2$  را نمی توانیم کاهش دهیم) تا به مرز ناحیه در  $(1.5, 0)$  برسیم که  $\mathcal{L}_m = 2.75$  است. اکنون می توانیم به ناحیه ای برویم که مقادیر  $(y_1, y_2)$  برابر  $(2/3, 1)$  است، یا به ناحیه ای که مقادیر  $(2/3, 2/3)$  است. در ناحیه قبلی، تابع دوگان عبارت است از:

$$\mathcal{L}_m = 2.5 + \lambda_1/6 - 5\lambda_2/6,$$

و در ناحیه بعدی، عبارت است از:

$$\mathcal{L}_m = 3 - \lambda_1/6 - \lambda_2/2.$$

در هیچ کدام از این نواحی نمی توانیم  $\mathcal{L}_m$  را افزایش دهیم. از آن جا که  $\mathcal{L}_m$  در نقطه  $(1.5, 0)$  ماکزیمم می شود که به هر سه ناحیه تعلق دارد، برای مقادیر  $y$ ها سه امکان وجود دارد. با این وجود، تنها یک انتخاب  $y^T = (2/3, 2/3)$  قیدها را نقض نمی کند. برای این انتخاب، مقدار تابع هدف برابر 3 است که با ماکزیمم  $\mathcal{L}_m$  که 2.75 بود متفاوت است. این اختلاف که فاصله<sup>۱</sup> تهی<sup>۱</sup> دوگان نامیده می شود، یادآور این نکته است که مسأله گسسته محدب نیست و بدین سبب مطمئن نیستیم که یک مینیمم برای تابع هدف به دست آورده ایم. برای این مثال، در واقع یک مینیمم را به دست آوردیم و مینیمم دیگر  $(1/2, 1)$  است. ... برای تشریح این که این روش ممکن است گاهی جوابی که مینیمم نیست بدهد، مثال  $(1, 2, 9)$  را با شرط این که متغیرها باید صحیح باشند، بار دیگر حل می کنیم.

### مثال ۹.۲.۳

رابطه سازی مسأله عبارت است از:

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ g_1(x) &= x_1 + x_2 - 10 \geq 0, \\ g_2(x) &= x_2 + 2x_3 - 8 \geq 0. \end{aligned}$$

را با شرایط  
و این که

$x_i$  اعداد صحیح باشند مینیمم کنید.

لاگرانژین، معادلات (الف) و (ب) مسأله  $(1, 2, 9)$  است و جواب پیوسته عبارت بود از

$$\begin{aligned} x_1 &= 4\frac{2}{3}, & x_2 &= 5\frac{1}{3}, & x_3 &= 1\frac{1}{3}, & f(x) &= 52. \\ \lambda_1 &= 9\frac{1}{3}, & \lambda_2 &= 1\frac{1}{3}, & \mathcal{L}_m(\lambda) &= 52. \end{aligned}$$

برای جواب صحیح در همسایگی جواب پیوسته جست و جو می کنیم. بنابراین مرزهای ارائه شده در معادله  $(16, 2, 9)$  برای مقادیر صحیح  $x_i$  باید نزدیک بهین پیوسته باشند. برای  $x_1$  محدوده<sup>۱</sup> بین 3 و 4 و بین 4 و 5 را در نظر می گیریم. با این محدوده، معادله  $(16, 2, 9)$  را که برای  $L_1$  به کار می بریم به شکل

1) Gap

زیر در می آید:

$$9 - 3\lambda_1 = 16 - 4\lambda_1, \quad \text{و} \quad 16 - 4\lambda_1 = 25 - 5\lambda_1,$$

یا

$$\lambda_1 = 7, \quad \lambda_1 = 9.$$

برای  $x_2$  محدوده ای بین 4, 5 و بین 5, 6 در نظر می گیریم. معادله (۹.۲.۱۶) را که برای  $L_2$  به کار می بریم به شکل زیر خواهد بود:

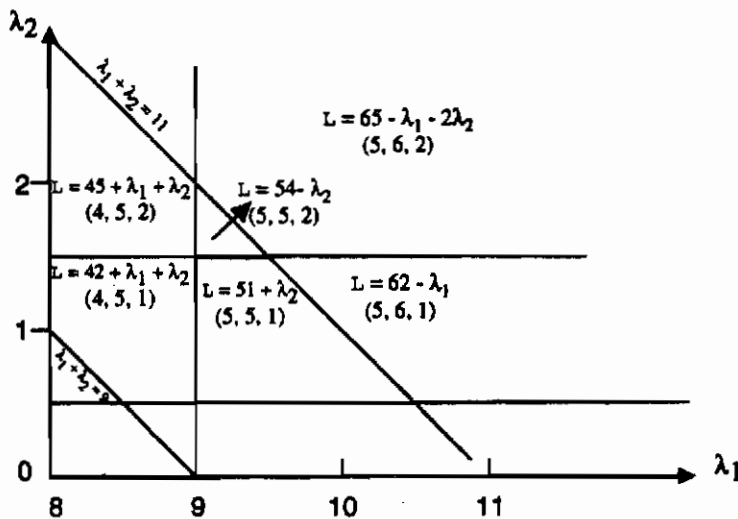
$$\lambda_1 + \lambda_2 = 9, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 11.$$

به همین ترتیب برای  $x_3$ ، معادله (۹.۲.۱۶) را که برای  $L_3$  به کار می بریم با محدوده ای بین 0, 1 و 1, 2 به شکل زیر خواهد بود:

$$\lambda_2 = 0.5, \quad \lambda_2 = 1.5.$$

این مرزها، و مقادیر  $\mathcal{L}(x, \lambda)$  در بعضی از نواحی نزدیک بهین پیوسته در شکل ۹.۲.۳ نشان داده شده اند. جست و جو را از بهین پیوسته با مقادیر  $\lambda_1 = 9\frac{1}{3}$ ,  $\lambda_2 = 1\frac{1}{3}$  شروع می کنیم. برای این ناحیه، مقادیر  $x_i$  ها که  $\mathcal{L}_m$  را ماکزیمم می سازد برابر است با (5,5,1)، و  $\mathcal{L}_m = 51 + \lambda_2$ . این عبارت نشان می دهد که  $\lambda_2$  باید افزایش یابد. در  $\lambda_2 = 1.5$  به مرز ناحیه می رسیم و  $\mathcal{L}_m = 52.5$ . مقادیر برای تمامی مرز ناحیه در شکل ۹.۲.۳ با خط پر مشخص شده است. شش ناحیه همسایه در آن مرز وجود دارد و با استفاده از عبارت  $\mathcal{L}_m$  که در شکل داده شده، می توانیم مقدار ماکزیمم  $\mathcal{L}_m = 52.5$  را به دست آوریم. اکنون برای مقادیر  $x_i$  ها شش انتخاب داریم که با شش ناحیه ای که قطاع  $\mathcal{L}_m$  ماکزیمم را در بر می گیرند نشان داده شده اند. دو ناحیه ای که در چپ ترین قسمت قرار دارند قید اول و سه ناحیه 'پایین قید دوم را نقض می کنند. از دو ناحیه ای که در ناحیه طراحی قابل قبول قرار دارند، (5,5,2) تابع هدف کمتری دارد که برابر است با  $f = 54$ . اما بهین در (4,6,1) قرار دارد با  $f = 53$ . ...

هر چند این مثال گویای این مطلب است که روش استفاده شده همگرا شدن به بهین را تضمین نمی کند،



شکل ۹.۲.۳ صفحه ۹۰۲ برای مثال ۳.۲.۹

ولی در بسیاری از کاربردها مفید واقع شده است. این روش به شکل گسترده ای توسط گرایرسون<sup>۱</sup> و همکارانش در طراحی قابهای فلزی با مقاطع استاندارد به کار گرفته شده است [19-21]. برای اطلاع بیشتر از چگونگی پیاده سازی جست و جوی خودکار در فضای  $\lambda$  برای یافتن ماکزیمم و همچنین برای حالت آمیختگی متغیرهای گسسته و پیوسته، خواننده را به مطالعه مرجع [18] توصیه می کنیم.

#### ۹.۲.۳ کاربرد در تقریبهای مرتبه اول

بیشتر تقریبهای مرتبه اول که در فصل ۶ بحث شدند، جدایی پذیرند. تقریبهای خطی و محافظه کارانه نیز مقعرند، و تقریب وارون نیز در بعضی از حالتها مقعر است. به عنوان مثال فرض کنید برای قیدها از تقریب وارون و برای تابع هدف تقریب خطی به کار گرفته شده است. یعنی مسأله بهینه سازی تقریبی عبارت است از:

$$f(\mathbf{x}) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i x_i \quad (9.2.17)$$

$$g_j(\mathbf{x}) = c_{0j} - \sum_{i=1}^n c_{ij}/x_i \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g \quad \text{را با شرایط}$$

1) Grierson

بخش ۹.۲: روشهای دوگان ۲۷۹

ثابت‌های  $c_{ij}$  در معادله (۹.۲.۱۷) از مقادیر  $f$  و  $g_j$  مشتقات آنها در نقطه  $x_0$  محاسبه می‌شوند. یعنی:

$$f_0 = f(x_0) - \sum_{i=1}^n x_{0i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \quad f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \quad (9.2.18)$$

و از معادله (۹.۲.۱۶)

$$c_{0j} = g_j(x_0) + \sum_{i=1}^n x_{0i} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_0), \quad (9.2.19)$$

$$c_{ij} = x_{0i}^2 \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_0).$$

اگر همه  $c_{ij}$  ها مثبت باشند این مسأله تقریبی محدب است. به همین شکل اگر همه  $f_i$  ها مثبت باشند مسأله بر حسب وارون متغیرهای طراحی محدب است. در هر دو حالت یک بهین تکی داریم. تابع لاگرانژین عبارت است از:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i x_i - \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j \left( c_{0j} - \sum_{i=1}^n c_{ij} / x_i \right) \quad (9.2.20)$$

اولین گام در روش دوگان این است که با مینیم کردن  $\mathcal{L}(x, \lambda)$  روی  $x$ ،  $\mathcal{L}_m(\lambda)$  را بیابیم. با مشتق‌گیری از  $\mathcal{L}(x, \lambda)$  نسبت به  $x$  داریم:

$$f_i - \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j c_{ij} / x_i^2 = 0, \quad (9.2.21)$$

بنابراین:

$$x_i = \left( \frac{1}{f_i} \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j c_{ij} \right)^{1/2}. \quad (9.2.22)$$

با جایگزینی معادله (۹.۲.۲۲) در معادله (۹.۲.۲۰) داریم:

$$\mathcal{L}_m(\lambda) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i x_i(\lambda) - \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j \left( c_{0j} - \sum_{i=1}^n c_{ij} / x_i(\lambda) \right), \quad (9.2.23)$$

که  $x_i(\lambda)$  از معادله (۹.۲.۲۲) به دست می‌آید:

ماکزیمم سازی  $\mathcal{L}_m(\lambda)$  می‌تواند به کمک روش عددی انجام شود، آن گاه به مشتقات  $\mathcal{L}_m(\lambda)$  نیاز داریم.

با استفاده از معادله (۹.۲.۲۱) داریم:

۲۸۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی و دوگان)

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \lambda_j} = -c_{0j} + \sum_{i=1}^n c_{ij}/x_i(\lambda), \quad (9.2.24)$$

و

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = - \sum_{i=1}^n (c_{ij}/x_i^2) \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k}, \quad (9.2.25)$$

یا با استفاده از معادله (۹.۲.۲۲) داریم:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{c_{ij} c_{ik}}{f_i x_i^3(\lambda)}. \quad (9.2.26)$$

اکنون که مشتقات دوم به راحتی در دسترسند، بهتر است برای ماکزیمم سازی از روش نیوتن استفاده کنیم.

در حالت کلی، هنگامی که بعضی از  $c_{ij}$  ها منفی اند، معادله (۹.۲.۲۲) ممکن است به مقادیر موهومی بینجامد. بنابراین برای اطمینان بیشتر، بهتر است از تقریب محافظه کارانه- محدب استفاده شود. این کار هنگام کاربرد روش دوگان معمولاً انجام می شود [22].

#### مثال ۹.۲.۴

خرپای سه میله ای شکل ۹.۲.۴ تحت تأثیر دو بار افقی و عمودی قرار دارد. برای این مثال، فرض می کنیم که بار عمودی دو برابر بار افقی است،  $p_H = p$ ,  $p_V = 2p$ . بار افقی می تواند هم از طرف راست و هم از طرف چپ اعمال شود، و به این سبب یک طراحی متقارن را دنبال می کنیم. خرپا باید با قید تغییر مکان در نقطه اعمال بار، که نباید از مقدار  $d$  چه در جهت افقی و چه در جهت عمودی بیشتر شود، طراحی شود. متغیرهای طراحی مساحت های سطح مقطع اعضای خرپا یعنی  $A_A, A_B$  و  $A_C$  است. به خاطر تقارن فرض می کنیم  $A_A = A_C$ . تابع هدف  $h$  انتخاب شده برای این مثال به نوعی مصنوعی است و عبارت است از:

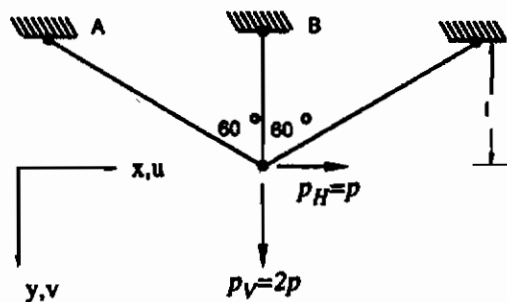
$$h = A_A + 2A_B,$$

که بر اساس این فرض که هزینه عضو B بیشتر است، نوشته شده است. قیدها عبارتند از:

$$g_1 = 1 - u/d \geq 0,$$

$$g_2 = 1 - v/d \geq 0,$$

بخش ۹.۲: روشهای دوگان ۲۸۱



شکل ۹.۲.۳ خربای سه میله ای

که  $u$  و  $v$  به ترتیب تغییر مکانهای افقی و عمودیند. با فرض این که تمامی اعضا ضریب ارتجاعی  $E$  یکسانی دارند، داریم:

$$u = \frac{4pl}{3EA_A},$$

$$v = \frac{2pl}{E(A_B + 0.25A_A)}.$$

یک مساحت مبتنا به شکل  $A_0 = 4pl/3Ed$  تعریف می کنیم و متغیرهای طراحی را نرمال سازی می کنیم. متغیرهای طراحی نرمال سازی شده عبارتند از:  $x_1 = A_A/A_0$ ,  $x_2 = A_B/A_0$  و در این صورت مسأله بهینه سازی به شکل زیر نوشته می شود:

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2$$

$$g_1(\mathbf{x}) = 1 - 1/x_1 \geq 0, \quad \text{را مشروط به فیود}$$

$$g_2(\mathbf{x}) = 1 - 1.5/(x_2 + 0.25x_1) \geq 0. \quad \text{مینیمم کنید}$$

اکنون برای تقریب  $g_2(\mathbf{x})$  حول یک نقطه طراحی اولیه  $\mathbf{x}_0^T = (1, 1)$  از تقریب وارون استفاده می کنیم.

$$g_2(\mathbf{x}_0) = -0.2,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) = \frac{0.375}{(x_2 + 0.25x_1)^2} \Big|_{\mathbf{x}_0} = 0.24,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) = \frac{1.5}{(x_2 + 0.25x_1)^2} \Big|_{\mathbf{x}_0} = 0.96.$$

در نتیجه، تقریب وارون  $g_{2R}$  عبارت است از:

$$g_{2R}(\mathbf{x}) = -0.2 + 0.24(x_1 - 1)/x_1 + 0.96(x_2 - 1)/x_2$$

$$= 1 - 0.24/x_1 - 0.96/x_2.$$



۳۸۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی و دوگان)

مسئله تقریبی عبارت است از:

$$\begin{aligned} f &= x_1 + 2x_2 \\ g_1(x) &= 1 - 1/x_1 \geq 0, \\ g_{2R}(x) &= 1 - 0.24/x_1 - 0.96/x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

را مشروط به قیود  
مینیمم کنید

با علایم استفاده شده در معادله (۹.۲.۱۷) داریم

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 2, \quad c_{11} = 1, \quad c_{21} = 0, \quad c_{12} = 0.24, \quad c_{22} = 0.96, \quad c_{01} = c_{02} = 1.$$

در این جا  $\mathcal{L}_m(\lambda)$  با استفاده از روش نیوتن و با حدس اولیه  $\lambda_0^T = (1, 1)$  ماکزیمم سازی می شود. از معادله (۹.۲.۲۲) داریم:

$$x_1 = (1.24)^{1/2} = 1.113, \quad x_2 = (0.48)^{1/2} = 0.693.$$

از معادله (۹.۲.۲۴) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \lambda_1} &= -1 + \frac{1}{1.113} = -0.1015, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \lambda_2} &= -1 + \frac{0.24}{1.113} + \frac{0.96}{0.693} = 0.60, \end{aligned}$$

و از معادله (۹.۲.۲۶) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial \lambda_1^2} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{1.113} \right)^3 = -0.3626, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{0.24}{1.113^3} \right) = -0.0870, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial \lambda_2^2} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{0.24^2}{1.113^3} + \frac{0.96^2}{2 \times 0.693^3} \right) = -0.7132. \end{aligned}$$

با استفاده از روش نیوتن برای ماکزیمم سازی  $\mathcal{L}_m$ ، داریم:

$$\lambda_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.3626 & -0.0870 \\ -0.0870 & -0.7132 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -0.1015 \\ 0.60 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.503 \\ 1.903 \end{Bmatrix},$$

در نتیجه:

## بخش ۹.۳: روشهای معیار بهینگی برای یک قید ۴۸۳

$$x_1 = (0.503 + 0.24 \times 1.903)^{1/2} = 0.980, \quad x_2 = (0.48 \times 1.903)^{1/2} = 0.956.$$

یک چرخه دیگر از روش نیوتن به نتیجه<sup>۱</sup>  $\lambda_1 = 0.356$ ،  $\lambda_2 = 2.05$ ،  $x_1 = 1.02$ ،  $x_2 = 1.17$  می رسد. همگرایی را می توانیم با توجه به مثبت بودن ضربگرهای لاگرانژ بررسی کنیم و انتظار داشته باشیم که هر دو قید بحرانی باشند. اگر  $g_1(x) = 0$  و  $g_2(x) = 0$  قرار دهیم، بهینه مسأله تقریبی به شکل  $x_1 = 1$ ،  $x_2 = 1.263$ ،  $f = 3.526$  به دست می آید. به نظر می رسد که روش نیوتن به سرعت همگرا می شود. بهین مسأله اصلی با قرار دادن  $g_1(x) = 0$  و  $g_2(x) = 0$  به دست می آید که عبارت است از  $x_1 = 1$ ،  $x_2 = 1.25$ ،  $f = 3.5$ ...

از آن جا که روش دوگان در فضای ضربگرهای لاگرانژ عمل می کند، به خصوص هنگامی که تعداد قیده‌ها به نسبت تعداد متغیرهای طراحی کم است، روش توانمندی است. روشهای معیار بهینگی که در بخش بعدی بحث خواهند شد نیز بدین گونه اند. این روشها هنگامی که تنها یک قید بحرانی داریم بسیار مناسبند.

## ۹.۳ روشهای معیار بهینگی برای یک قید

روشهای معیار بهینگی با کارهای پراگر<sup>۱</sup> و همکارانش (به عنوان مثال، [23]) برای سیستمهای پارامتر توزیعی و کار و نکایا، خات و ردی<sup>۲</sup> [24] برای سیستمهای گسسته پایه ریزی شد. آنها معیار بهینگی را مانند معیار توزیع یکنواخت انرژی که پیشتر بحث شد، رابطه سازی کردند. بعدها معیار بهینگی گسسته توسط برک، و نکایا، خات<sup>۳</sup> و دیگران (به عنوان مثال [27] - [25]) گسترش یافت تا قیده‌های تغییر مکان را به طور کلی در بر گیرد. بحث ما در این جا محدود به معیار بهینگی گسسته می شود و به میزان زیادی براساس مراجع [28] و [29] است. خوانندگان علاقمند به معیار بهینگی پیوسته را به کتاب آقای رضوانی<sup>۴</sup> [30] که در این زمینه سهم بالایی دارد، ارجاع می دهیم.

روشهای معیار بهینگی نوعاً بر اساس یک معیار بهینگی صریح که از شرایط کان تاکر به دست می آید، و یک قاعده تغییر اندازه که در عمل به طور خودجوش شکل می گیرد، قرار دارند. معمولاً می توان نشان داد که قاعده تغییر اندازه بر اساس این فرض شکل می گیرد که بارهای داخلی سازه نسبت به فرایند تغییر اندازه حساس نیست. این مانند همان فرضی است که اساس روش FSD و قاعده تغییر اندازه نسبت-تنش مربوط را تشکیل می داد. این فرض در بسیاری از موارد معادل فرض مناسب بودن تقریب وارون

1) Prager

2) Venkayya, Khot, and Reddy

3) Berke, Venkayya, Khot

4) Rozvany

## ۴۸۴ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی ودوگان)

برای قیدهای تغییر مکان است. شناخت ارتباط بین روشهای معیار بهینگی و تقریب وارون برای داشتن یک درک بهتر از رابطه بین روشهای معیار بهینگی و برنامه ریزی ریاضی سودمند است و در بخش بعدی بحث می شود.

## ۱. ۳. ۹. تقریب وارون برای یک قید تغییر مکان

بحث را با این مطلب آغاز می کنیم که نشان می دهیم در بعضی از مسائل طراحی سازه، فرض ثابت بودن بارهای داخلی معادل کاربرد تقریب وارون برای تغییر مکانهاست. معادلات تعادل سازه به شکل زیر نوشته می شود:

$$Ku = f, \quad (9.3.1)$$

که  $K$  ماتریس سختی سازه،  $u$  بردار تغییر مکان، و  $f$  بردار بار است. از آن جا که در زیر از تقریب وارون به طور گسترده ای استفاده می شود، یک بردار  $y$  از متغیرهای وارون  $y_i = 1/x_i, i = 1, \dots, n$  معرفی می کنیم. قید تغییر مکان بر حسب متغیرهای طراحی وارون به شکل زیر نوشته می شود:

$$g(u, y) = \bar{z} - z^T u \geq 0, \quad (9.3.2)$$

که  $\bar{z}$  یک تغییر مکان مجاز، و  $z^T u$  یک ترکیب خطی از مؤلفه های تغییر مکان است. برای گروه خاصی از سازه ها که ماتریس سختی یک تابع همگن خطی از متغیرهای طراحی است (به عنوان مثال، سازه های خرابایی که مساحت های سطح مقطع اعضا متغیرهای طراحی اند)، تقریب وارون بسیار مناسب است.

$$K = \sum_{i=1}^n K_i x_i = \sum_{i=1}^n K_i / y_i. \quad (9.3.3)$$

همچنین فرض می کنیم که بار مستقل از متغیرهای طراحی است. با شرط بالا نشان خواهیم داد

$$g(u) = \bar{z} + \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial g}{\partial y_i}. \quad (9.3.4)$$

یعنی چیزی که یک تقریب مرتبه اول  $g$  به نظر می رسد، در واقع دقیق است. معادله (۹.۳.۴) گواه بر

بخش ۹.۳: روشهای معیار بهینگی برای یک قید ۲۸۵

تابع خطی بودن متغیرهای طراحی نیست زیرا  $\partial g / \partial y_i$  به متغیرهای طراحی بستگی دارد. برای اثبات معادله (۹.۳.۴) از معادله (۷.۲.۸) برای مشتق یک قید استفاده می‌کنیم و به جای  $x$  کمیت  $y_i$  را می‌گذاریم. از آن جا که بردار بار مستقل از متغیرهای طراحی است، معادله (۷.۲.۸) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = -\lambda^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial y_i} \right) \mathbf{u}, \quad (9.3.5)$$

که  $\lambda$  از حل معادله (۷.۲.۷) به دست می‌آید (اما توجه کنید که  $\mathbf{z}$  در معادله (۷.۲.۷) برداری با مؤلفه‌های  $\partial g / \partial y_i$  است، در حالی که  $\mathbf{z}$  در این جا منفی این بردار است، معادله (۹.۳.۲) را ببینید، بنابراین باید در جواب  $\lambda$ ،  $\mathbf{z}$  را با  $-\mathbf{z}$  جایگزین کنیم). همچنین از معادله (۹.۳.۳) داریم:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial y_i} = -\frac{\mathbf{K}_i}{y_i^2}. \quad (9.3.6)$$

با استفاده از معادلات (۷.۲.۷)، (۹.۳.۴)، (۹.۳.۵) و (۹.۳.۶) و تقارن  $\mathbf{K}$  داریم:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i} y_i = \sum_{i=1}^n \lambda^T \frac{\mathbf{K}_i}{y_i^2} y_i = \lambda^T \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i / y_i \right) \mathbf{u} = \lambda^T \mathbf{K} \mathbf{u} = -\mathbf{z}^T \mathbf{u}. \quad (9.3.7)$$

از معادلات (۹.۳.۷) و (۹.۳.۲) می‌توان فهمید که معادله (۹.۳.۴) صحیح است.

معادله (۹.۳.۴) انگیزه استفاده از تقریب وارون برای قیود تغییر مکان است. برای سازه‌هایی که از نظر ایستایی معینند، با فرضهایی که در اثبات معادله (۹.۳.۴) بیان شد، یک نتیجه قوی‌تری داریم که مشتقات  $\partial g / \partial y_i$  ثابتند، در نتیجه تقریب وارون دقیق است. این ادعا را با نشان دادن این که اگر بارهای داخلی سازه مستقل از متغیرهای طراحی باشند، آن گاه  $\partial g / \partial y_i$  ها ثابتند، ثابت خواهیم کرد. بارهای داخلی در یک سازه‌ای که از نظر استاتیکی معین است قطعاً مستقل از متغیرهای طراحی اند که سختی را کنترل می‌کنند ولی از هندسه و بارها مستقل نیستند.

فرض می‌کنیم  $\mathbf{K}_i / y_i$  در معادله (۹.۳.۳) سهم آن بخش از سازه در ماتریس  $\mathbf{K}$  باشد که با  $\mathbf{f}_i$  متغیر طراحی کنترل می‌شود. نیرویی که روی آن قسمت از سازه اعمال می‌شود عبارت است از  $\mathbf{f}_i$

$$\mathbf{f}_i = \frac{\mathbf{K}_i}{y_i} \mathbf{u}. \quad (9.3.8)$$

۲۸۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی ودوگان)

اگر جزء  $\lambda$ ام سازه در مقابل حرکت جسم صلب مقید شده باشد، از ماتریس سختی کاهش یافته  $K'_i$  نیروی یکسانی به دست می آید و یک بردار تغییر مکان کاهش یافته  $u'_i$  وجود خواهد داشت به شکلی که

$$f_i = \frac{K'_i}{y_i} u'_i, \quad (9.3.9)$$

که  $K'_i$  از اعمال قیدهای حرکت جسم صلب بر روی  $K_i$  به دست می آید و  $u'_i$  از  $u$  با حذف مؤلفه های حرکت جسم صلب از بخشی از  $u$  که مربوط به جزء  $\lambda$ ام سازه است. با این شرایط  $K'_i$  تبدیل پذیر است، در نتیجه:

$$u'_i = y_i u_i, \quad (9.3.10)$$

که

$$u_i = (K'_i)^{-1} f_i. \quad (9.3.11)$$

با استفاده از معادلات (۹.۳.۶)، (۹.۳.۸) و (۹.۳.۹)، معادله (۹.۳.۵) را به شکل زیر می نویسیم:

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = \lambda^T \frac{K_i}{y_i^2} u = \lambda^T f_i / y_i = \lambda^T \frac{K'_i}{y_i} u_i. \quad (9.3.12)$$

بردار  $\lambda^T K'_i / y_i$  بردار نیروی داخلی در اثر بار (مجازی)  $z$  (معادله ۷.۲.۷ را ببینید) است و اگر فرض شود نیروی داخلی مستقل از متغیرهای طراحی اند، ثابت است. همچنین  $f_i$  از معادله (۹.۳.۹) و  $u_i$  از معادله (۹.۳.۱۱) ثابتند. بنابراین، در نهایت از معادله (۹.۳.۱۲) مقدار  $\partial g / \partial y_i$  ثابت است. اکنون کاربرد روشهای معیار بهینگی برای یک قید تغییر مکان را بر اساس تقریب وارون مورد مطالعه قرار می دهیم.

## ۹.۳.۲ یک قید تغییر مکان

به سبب خواص ویژه تقریب وارون برای قیدهای تغییر مکان، مسأله بهینه سازی را بر حسب متغیرهای وارون می نویسیم.

بخش ۹.۳: روشهای معیار بهینگی برای یک قید ۲۸۷

$$\begin{array}{ll} f(y) & \text{رانسبت به} \\ g(y) \geq 0. & \text{مینیم کنید} \end{array} \quad (9.3.13)$$

برای این مسأله، شرط کان-تاکر عبارت است از:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.3.14)$$

در بسیاری از موارد تابع هدف بر حسب متغیرهای طراحی اصلی خطی است یا تقریباً خطی است، و چون  $y_i = 1/x_i$ ، معادله (۹.۳.۱۴) می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$x_i^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y_i} = 0, \quad (9.3.15)$$

در نتیجه

$$x_i = \left( -\lambda \frac{\partial g / \partial y_i}{\partial f / \partial x_i} \right)^{1/2}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.3.16)$$

ضربگر لاگرانژ  $\lambda$  از این اصل به دست می‌آید که قید فعال باقی خواهد ماند (با یک قید تغییر مکان نامساوی، معمولاً می‌توان فرض کرد که قید فعال است). با برابر صفر قرار دادن تقریب وارون قید داریم:

$$g_R = g(y_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i} (y_i - y_{0i}) = c_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{1}{x_i} = 0, \quad (9.3.17)$$

که

$$c_0 = g(y_0) - \sum_{i=1}^n y_{0i} \frac{\partial g}{\partial y_i} = g(x_0) + \sum_{i=1}^n x_{0i} \frac{\partial g}{\partial x_i}. \quad (9.3.18)$$

با جایگزینی از معادله (۹.۳.۱۶) در معادله (۹.۳.۱۷) داریم:

$$\lambda = \left[ \frac{1}{c_0} \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} \right)^{1/2} \right]^2. \quad (9.3.19)$$

معادلات (۹.۳.۱۹) و (۹.۳.۱۶) اکنون می‌توانند به عنوان یک الگوریتم تغییر اندازه چرخه‌ای برای سازه مورد استفاده قرار گیرند.

فرایند با محاسبه قید تغییر مکان و مشتقات آن شروع می‌شود و آن‌گاه  $\lambda$  از معادله (۹.۳.۱۹) محاسبه

## ۲۸۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی و دوگان)

می شود و اندازه های جدید از معادله (۹.۳.۱۶) به دست می آیند. چرخه تکرار می شود و اگر  $\partial f / \partial x_i$  و  $\partial g / \partial y_i$  خیلی ناپایدار نباشند، فرایند همگرا می شود.

در بیشتر موارد طراحی افزون بر قید تغییر مکان، حد بالا و پایین روی متغیرهای طراحی نیز داریم و الگوریتم تغییر اندازه باید کمی بهبود یابد. ابتدا معادله (۹.۳.۱۶) با معرفی کرانهای بالا و پایین کامل می شود که اگر این حدود را نقض کند، متغیر طراحی مربوط را برابر آن حد قرار می دهیم. آن گاه، مجموعه متغیرهای طراحی که در حدود بالا پایین خود قرار دارند را مجموعه غیر فعال<sup>۱</sup> نامیده و با  $I_p$  نشان می دهیم و مجموعه متغیرهای باقی مانده را مجموعه فعال نامیده و با  $I_a$  نشان می دهیم. معادله (۹.۳.۱۷) به شکل زیر در می آید:

$$c_0^* + \sum_{i \in I_a} \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{1}{x_i} = 0, \quad (9.3.20)$$

که

$$c_0^* = c_0 + \sum_{i \in I_p} \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{1}{x_i}. \quad (9.3.21)$$

معادله (۹.۳.۱۹) برای  $\lambda$  به طور مشابهی به شکل زیر بهبود می یابد.

$$\lambda = \left[ \frac{1}{c_0^*} \sum_{i \in I_a} \left( -\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} \right)^{1/2} \right]^2. \quad (9.3.22)$$

فرایند تغییر اندازه ای که در این بخش تشریح شد کترلی از نظر اندازه گام ندارد. یعنی در محاسبه مشتقات  $f$  و  $g$  معادله (۹.۳.۱۶) ممکن است به تغییرات بسیار زیاد متغیرهای طراحی نسبت به مقادیر اولیه شان بینجامد. فرایند را می توان برای داشتن کترلی روی میزان تغییرات طراحی بهبود بخشید که در بخشهای بعدی بحث می شود. خات [28] با اعمال چنان کترلی نشان داد که روش معیار بهینگی بحث شده در این جا، دقیقاً معادل روش تصویر گرادیان است که با تقریب وارون به کار رفته باشد.

## مثال ۹.۳.۱

مثال ۹.۲.۲ را بار دیگر با تنها یک قید روی تغییر مکان عمودی تکرار می کنیم. با استفاده از متغیرهای

## بخش ۹.۳: روشهای معیار بهینگی برای یک قید ۲۸۹

طراحی نرمال شده، رابطه سازی ریاضی مسأله به صورت زیر خواهد بود:

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 \quad \text{رانسبت به}$$

$$g(\mathbf{x}) = 1 - 1.5/(x_2 + 0.25x_1) \geq 0. \quad \text{مینیمم کنید}$$

همچنین حد پایین  $x_1 \geq 0.5$  و  $x_2 \geq 0.5$  را نیز در نظر می گیریم.

مشتقات مورد نیاز در فرایند تغییر اندازه عبارت است از:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2, \quad \frac{\partial g}{\partial y_1} = -x_1^2 \frac{\partial g}{\partial x_1} = -\frac{0.375x_1^2}{(x_2 + 0.25x_1)^2},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_2} = -x_2^2 \frac{\partial g}{\partial x_2} = -\frac{1.5x_2^2}{(x_2 + 0.25x_1)^2};$$

$$c_0 = g(\mathbf{y}) + \frac{\partial g}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2} y_2$$

$$= 1 - \frac{1.5}{(x_2 + 0.25x_1)} + \frac{0.375x_1}{(x_2 + 0.25x_1)^2} + \frac{1.5x_2}{(x_2 + 0.25x_1)^2} = 1.$$

با طراحی اولیه  $\mathbf{x}_0 = (1, 1)^T$  شروع می کنیم. فرایند چرخه در جدول ۹.۳.۱ خلاصه شده است.

جدول ۹.۳.۱

معادله (۹.۳.۱۶)							
$x_1$	$x_2$	$\partial g / \partial y_1$	$\partial g / \partial y_2$	$c_0^*$	$\lambda$	$x_1$	$x_2$
1.0	1.0	-0.24	-0.96	1.0	3.518	0.92	1.30
0.92	1.30	-0.136	-1.083	1.0	3.387	0.68	1.35
0.68	1.35	-0.0751	-1.183	1.0	3.284	0.496	1.39
0.50	1.39	-0.0408	-1.263	0.918	2.997	0.350	1.376
0.50	1.376	-0.0416	-1.261	0.917	2.999	0.353	1.375

طراحی به سرعت به  $x_1 = 0.5$  (کران پایین) و  $x_2 = 1.375$  همگرا می شود، هر چند مشتق قید نسبت به  $y_1$  از ثابت بودن فاصله دارد. تغییرات زیاد مشتقات نسبت به  $y_1$  به این حقیقت بر می گردد که خرابای سه میله ای بسیار زیادتر از اندازه عضو دارد. این که یک عضو زیادی باشد تا اندازه ای مورد قبول است ولی آنچه در این جا داریم این است که سازه ۵۰٪ بیشتر از نیاز عضو دارد. ...

همچنان که در مثال دیدیم، روش معیار بهینگی برای مسائل تک قیدی خوب کار می کند. در واقع، یافتن روشهایی مناسبتر برای این گونه مسائل دشوار است.



۲۹۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی و دوگان)

۹.۳.۳. عمومیت دادن برای قیدهای نوع دیگر

روش معیار بهینگی که در بخش گذشته بحث شد، بسیار شبیه روش دوگان است. به ویژه، معادله (۹.۲.۲۲) حالت خاصی از معادله (۹.۳.۱۶) است. هر چند انگیزه تدوین و به دست آوردن آن هماهنگی بین قیود تغییر مکان و تقریب وارون بود، ولی بدیهی است که این روش برای هر قیدی که بتوان آن را با تقریب وارون به شکل قابل قبولی تقریب زد، مناسب خواهد بود. در این بخش ما روش بخش قبلی را تعمیم می دهیم و کاربرد روش را برای حالات عمومی تر قیود بحث می کنیم. معیار بهینگی برای یک قید تکی

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.3.23)$$

را می توان به شکل زیر نوشت

$$\lambda = \frac{\partial f / \partial x_i}{\partial g / \partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.3.24)$$

طرف راست معادله (۹.۳.۲۴) معیاری است از هزینه تأثیر  $i$  امین متغیر طراحی در متأثر ساختن قید. صورت کسر میزانی از اثر  $x_i$  روی قید است، و مخارج کسر میزانی از هزینه مربوط به آن. معادله (۹.۳.۲۴) به ما می گوید که در بهین تمامی متغیرهای طراحی در تغییر قیود به طور یکسان اثر هزینه ای دارند. دورتر از بهین، بعضی از متغیرهای طراحی ممکن است اثر هزینه ای بیشتری نسبت به دیگران داشته باشند. یک فن تغییر اندازه باید به گونه ای باشد که میزان استفاده از متغیرهای مؤثرتر را افزایش داده و متغیرهای کم اثرتر را کاهش دهد. به عنوان مثال در حالت ساده ای که  $x_i$ ،  $\partial f / \partial x_i$  و  $\partial g / \partial x_i$  همه مثبت باشند، یک قاعده تغییر اندازه عبارت خواهد بود از:

$$x_i^{\text{جدید}} = x_i^{\text{قدیمی}} (\lambda e_i)^{1/\eta}, \quad (9.3.25)$$

که

$$e_i = (\partial g / \partial x_i) / (\partial f / \partial x_i), \quad (9.3.26)$$

اثر  $i$  امین متغیر و  $\eta$  پارامتر اندازه گام است. مقدار بزرگ  $\eta$  تغییرات کوچکی در متغیرهای طراحی را به

## بخش ۹.۳: روشهای معیار بهینگی برای یک قید ۴۹۱

دنبال خواهد داشت، که برای مسائلی با تغییرات سریع مشتقات مناسب است. مقدار کوچک  $\eta$  می تواند در هنگامی که مشتقات تقریباً ثابتند همگرایی را شتاب بخشد. برای تخمین ضریبگر لاگرانژ می توانیم بگوییم که قیود باید در طراحی با اندازه های جدید بحرانی باشند. با استفاده از تقریب وارون، معادله (۹.۳.۱۷)، و جایگزینی  $x_i$  از معادله (۹.۳.۲۵) در آن، داریم:

$$\lambda = \left[ \frac{1}{c_0} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial g}{\partial x_i} e_i^{-\frac{1}{\eta}} \right]^{\eta}, \quad (9.3.27)$$

که  $c_0$  از معادله (۹.۳.۱۸) به دست می آید. از این قاعده تغییر اندازه در برنامه FASTOP [31] برای طراحی سازه بال تحت قید لرزش استفاده شده است.

## مثال ۹.۳.۲

یک مخزن رو باز باید دست کم  $125\text{m}^3$  حجم داشته باشد. قیمت تمام شده دیواره های جانبی مخزن ۱۰ دلار به ازای هر متر مربع است، در صورتی که قیمت تمام شده دیواره های جلو و عقب و کف ۱۵ دلار به ازای هر متر مربع است. اندازه های بهین مخزن را بیابید. عرض، طول و ارتفاع مخزن را به ترتیب  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$  می نامیم، آن گاه مسأله طراحی به شکل زیر رابطه سازی می شود:

$$\begin{aligned} f &= 20x_2x_3 + 30x_1x_3 + 15x_1x_2 & \text{رانسبت به} \\ g &= x_1x_2x_3 - 125 \geq 0. & \text{مینیم کنید} \end{aligned}$$

$e_i$  های سه متغیر طراحی به شکل زیر خواهند بود

$$\begin{aligned} e_1 &= x_2x_3/(30x_3 + 15x_2), \\ e_2 &= x_1x_3/(20x_3 + 15x_1), \\ e_3 &= x_1x_2/(20x_2 + 30x_1). \end{aligned}$$

با یک طراحی اولیه مکعب  $x_1 = x_2 = x_3 = 5\text{m}$ ،  $f = \$1625$  شروع می کنیم و مقادیر زیر را به دست می آوریم.  $\partial g/\partial x_1 = \partial g/\partial x_2 = \partial g/\partial x_3 = 25$ ،  $c_0 = 375$ ،  $e_1 = 1/9$ ،  $e_2 = 1/7$ ،  $e_3 = 1/10$ . با انتخاب  $\eta = 2$  از معادله (۹.۳.۲۷) داریم  $\lambda = 8.62$ ، و با استفاده از معادله (۹.۳.۲۵) داریم:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5(8.62/9)^{1/2} = 4.893, \\ x_2 &= 5(8.62/7)^{1/2} = 5.549, \end{aligned}$$

۴۴۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی و دوگان)

$$x_3 = 5(8.62/10)^{1/2} = 4.642.$$

با متغیرهای طراحی جدید داریم  $e_1 = 0.1158$ ،  $e_2 = 0.1366$ ،  $e_3 = 0.1053$ ،  $f = 1604$ ،  $g = 1.04$ ،  $\lambda = 8.413$ . آن گاه چرخه بعدی عبارت است از:

$$x_1 = 4.893(8.413 \times 0.1158)^{1/2} = 4.829,$$

$$x_2 = 5.549(8.413 \times 0.1366)^{1/2} = 5.949,$$

$$x_3 = 4.642(8.413 \times 0.1053)^{1/2} = 4.370.$$

سرانجام در این مقادیر متغیرهای طراحی، تأثیر پذیری ها عبارتند از  $e_2 = 0.1320$ ،  $e_3 = 0.1089$ ،  $e_1 = 0.1180$  و  $g = 0.54$  و  $f = 1584$ . می بینیم که بیشترین اختلاف بین  $e_i$  ها که از 43 درصد شروع می شد اکنون 21 درصد است. با ادامه فرایند چرخه، به طراحی بهین  $x_1 = 4.8075$ ،  $x_2 = 7.2112$ ،  $x_3 = 3.6056$  و  $f = 1560$  دست می یابیم. در بهین  $e_1 = e_2 = e_3 = 0.120$ . گرچه متغیرهای طراحی از آن چه بعد از دو چرخه به دست آمد تغییر بسیاری کرده اند، ولی تابع هدف کمتر از دو درصد تغییر یافته و این قابل انتظار بود، زیرا مقادیر اولیه  $e_i$  ها بسیار نزدیک به هم بودند.

### ۳. ۳. ۳ تغییر اندازه مقیاس مبنا

همان گونه که در بخش قبل یادآوری شد، معادله (۳. ۳. ۲۴) بیانگر این است که در بهین تمامی متغیرها (که در کرانه های بالا و پایین خود نیستند) از نظر اثر هزینه ای یکسانند و اثر هزینه ای آنها برابر  $1/\lambda$  است. بنابراین، این امکان وجود دارد که  $\lambda$  را به عنوان یک مقدار متوسط از وارون اثر هزینه ای تخمین زد. ونکاپا [29]،  $\lambda$  را به شکل زیر تخمین زد:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n a_i e_i}, \quad (9.3.28)$$

که  $a_i$  ها ثابت های وزنی اند (مانند  $\partial f / \partial x_i$ ). آن گاه معادله (۳. ۳. ۲۸) را می توان همراه با یک قاعده تغییر اندازه مانند معادله (۳. ۳. ۲۵) به کار برد.

متأسفانه، ترکیب معادله (۳. ۳. ۲۸) با یک قاعده تغییر اندازه، هیچ گونه ساز و کاری را برای فعال نگه داشتن قیود در بر ندارد و در نتیجه فرایند چرخه ممکن است به ناحیه قابل قبول یا غیر قابل قبول هدایت شود. بنابراین، تخمین  $\lambda$  از معادله (۳. ۳. ۲۸) باید با یک گام دیگر همراه باشد، تا این اطمینان حاصل

## بخش ۹.۳: روشهای معیار بهینگی برای یک قید ۳۹۳

شود که طراحی در مرز قید باقی می ماند. یک ساز و کار ساده که به طور وسیعی در رابطه سازی معیار بهینگی به کار می رود مقیاس بندی متغیر طراحی است. یک دلیل شهرت مقیاس بندی این است که برای حالت ساده ای که توسط معادله (۹.۳.۳) نشان داده می شود، به راحتی قابل انجام است. به راحتی می توان از معادلات (۹.۳.۱) و (۹.۳.۳) دریافت که مقیاس بندی بردار متغیر طراحی با یک عدد اسکالر  $\alpha$  به  $\alpha x$  بردار تغییر مکان را به شکل  $u(1/\alpha)$  مقیاس بندی می کند. ونکایا [29] روش زیر را برای حالت های کلی تر پیشنهاد کرد. قید  $g$  را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$g(x) = \bar{z} - z(x) \geq 0, \quad (9.3.29)$$

که  $z(x)$  یک نوع کمیت پاسخ است مانند مؤلفه تغییر مکان، و  $\bar{z}$  کران بالای  $z$  است. اگر در طراحی جاری  $0 \neq g$  باشد، می خواهیم  $\alpha$  را چنان انتخاب کنیم که:

$$z(\alpha x) = \bar{z}. \quad (9.3.30)$$

با تقریب خطی  $z(\alpha x)$  حول  $x$  داریم:

$$z(\alpha x) \approx z(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} (\alpha - 1) x_i = \bar{z}, \quad (9.3.31)$$

یا

$$\alpha = 1 + \frac{\bar{z} - z}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} x_i} = 1 - \frac{g}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} x_i}. \quad (9.3.32)$$

اگر برای معادله (۹.۳.۳۱) تقریب وارون را به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} x_i}{g + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} x_i}. \quad (9.3.33)$$

برای حالت خاصی مانند معادله (۹.۳.۳)، اگر کمیت پاسخ  $z$  یک مؤلفه تنش یا تغییر مکان باشد، مقیاس وارون دقیق است. افزون بر این  $z(\alpha x) = (1/\alpha)z(x)$ ، در نتیجه معادله (۹.۳.۳۳) می تواند با عبارت زیر جایگزین شود.

$$\alpha = z/\bar{z} = 1 - g/\bar{z}. \quad (9.3.34)$$

۲۹۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی و دوگان)

ونکایا پیشنهاد کرد که معادله (۹.۳.۳۲) وقتی استفاده شود که:

$$\frac{1}{z} \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} x_i \geq 0, \quad (9.3.35)$$

در غیر این صورت باید معادله (۹.۳.۳۳) استفاده شود. به سادگی می توان دید که معادلات مقیاس بندی برای  $\alpha$  بر حسب  $g$  برای قیود کران پایین به شکل  $\bar{z} - z \geq 0$  نیز معتبر است.

در ترکیب مرحله 'تغییر اندازه'، معادله (۹.۳.۲۵)، با مرحله مقیاس بندی، باید توجه کنیم که آیا برای این دو عمل مشتقات جدید را محاسبه می کنیم. اگر مشتقات را محاسبه می کنیم، آن گاه تعداد بارهایی که مشتقات محاسبه می شوند به ازای هر چرخه دو برابر افزایش می یابد. در موارد بسیاری این کار ضرورتی ندارد. می توان با استفاده از مشتقات به دست آمده قبل از مقیاس بندی، ضربگر لاگرانژ را محاسبه کرد، مگر این که مقیاس بندی به تغییرات زیاد در متغیرهای طراحی بینجامد.

### مثال ۹.۳.۳

بار دیگر مسأله مخزن مثال (۹.۳.۲) را در نظر بگیرید. این مسأله را با استفاده از معادله (۹.۳.۲۸) برای تخمین  $\lambda$  و به کارگیری مقیاس بندی، بار دیگر حل می کنیم.

با همان متغیر اولیه ای که در مثال (۹.۳.۲) شروع کردیم، یعنی  $x_1 = x_2 = x_3 = 5m$  شروع می کنیم. برای این طراحی  $g = 0$ ، در نتیجه به مقیاس بندی نیاز نیست. داریم  $e_2 = 1/7$ ،  $e_3 = 1/10$ ، در نتیجه معادله (۹.۳.۲۸) با یک قرار دادن تمامی وزنهای، رابطه زیر را به دست می دهد.

$$\lambda = \frac{3}{1/9 + 1/7 + 1/10} = 8.475,$$

آن گاه، با استفاده از معادله (۹.۳.۲۵) با  $\eta = 2$  داریم:

$$x_1 = 5(8.475/9)^{1/2} = 4.852,$$

$$x_2 = 5(8.475/7)^{1/2} = 5.502,$$

$$x_3 = 5(8.475/10)^{1/2} = 4.603.$$

برای مقادیر جدید متغیرهای طراحی  $\partial g / \partial x_1 = 25.325$ ،  $\partial g / \partial x_2 = 22.334$ ،  $\partial g / \partial x_3 = 26.695$ ، در مسأله ما  $f = 1577$  و  $g = -2.12$ ،  $e_1 = 0.1148$ ،  $e_2 = 0.1355$ ،  $e_3 = 0.1044$

## بخش ۹.۴: قیدهای متعدد ۴۹۵

و به راحتی می توان دید که معادله (۹.۳.۳۵) برآورده شده است، در نتیجه برای مقیاس بندی از معادله (۹.۳.۳۲) استفاده می کنیم.

$$\alpha = 1 - \frac{-2.12}{25.325 \times 4.852 + 22.334 \times 5.502 + 26.695 \times 4.603} = 1.00576.$$

با مقیاس بندی متغیرهای طراحی داریم  $x_1 = 4.880$ ,  $x_2 = 5.533$ ,  $x_3 = 4.630$ . برای این متغیرهای مقیاس شده،  $g = 0.015$  که نشان دهنده این است که مقیاس بندی کار می کند. برای این طراحی مقیاس شده  $f = 1595$  که یک میزان واقعی تر از بهبود است نسبت به  $f = 1577$  طراحی مقیاس نشده، زیرا قید نقض نشده. اکنون  $\lambda$  را به دست می آوریم

$$\lambda = \frac{3}{0.1148 + 0.1355 + 0.1044} = 8.457.$$

و با تغییر اندازه داریم

$$x_1 = 4.880(8.457 \times 0.1148)^{1/2} = 4.808.$$

$$x_2 = 5.533(8.457 \times 0.1355)^{1/2} = 5.923.$$

$$x_3 = 4.628(8.457 \times 0.1044)^{1/2} = 4.351.$$

برای این طراحی  $\partial g / \partial x_3 = 28.481$ ,  $\partial g / \partial x_2 = 20.921$ ,  $\partial g / \partial x_1 = 25.772$ ,  $f = 1570$ ,  $g = -1.08$ .  $e_3 = 0.1084$ ,  $e_2 = 0.1315$ ,  $e_1 = 0.1175$  ضریب مقیاس بندی  $\alpha$  عبارت است از

$$\alpha = 1 - \frac{-1.08}{25.772 \times 4.808 + 20.921 \times 5.923 + 28.481 \times 4.351} = 1.0029.$$

با مقیاس بندی متغیرهای طراحی داریم  $x_1 = 4.822$ ,  $x_2 = 5.941$ ,  $x_3 = 4.364$ . برای این مقادیر  $f = 1579$  و  $g = 0.018$ . توجه کنید که همگرایی از مثال (۹.۳.۲) سریعتر است.

## ۹.۴ قیدهای متعدد

۱. ۹.۳ روش مبتنی بر تقریب وارون

بار دیگر با مسأله بهینه سازی بر حسب متغیرهای وارون شروع می کنیم

۲۹۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی و دوگان)

$$\begin{array}{ll} \text{را نسبت به} & f(y) \\ \text{مینیمم کنید} & g_j(y) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \end{array} \quad (9.4.1)$$

در نتیجه، شرایط کان-تاکر عبارتند از:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.4.2)$$

مانند حالت تک قیدی فرض می کنیم که  $f$  بر حسب  $x$  تقریباً خطی است، بنابراین مشتق نسبت به  $y$  را با مشتق نسبت به  $x$  جایگزین می کنیم و داریم:

$$x_k^2 f_k - \sum_{j=1}^{n_g} c_{kj} \lambda_j = 0, \quad (9.4.3)$$

که

$$f_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad c_{kj} = -\frac{\partial g_j}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (9.4.4)$$

این معادله را می توان برای به دست آوردن  $x_k$  استفاده کرد.

$$x_k = \left( \frac{1}{f_k} \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j c_{kj} \right)^{1/2}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (9.4.5)$$

با این وجود، برای استفاده از معادله (۹.۴.۳) روشهای مختلف دیگری پیشنهاد و استفاده شده است. یک قاعده تغییر اندازه، که قاعده نمایی نامیده می شود، بر اساس بازنویسی معادله (۹.۴.۳) به شکل زیر قرار دارد:

$$x_k^{1+\eta} = x_k \left( \frac{1}{x_k^2 f_k} \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j c_{kj} \right)^{1/\eta}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (9.4.6)$$

که مقدار قبلی  $x_k$  در طرف راست استفاده می شود تا یک تخمین جدید برای  $x_k$  به وجود آید. با استفاده از بسط بینم<sup>۱</sup> می توان یک شکل خطی از معادله (۹.۴.۶) به دست آورد

$$x_k^{1+\eta} = x_k + \Delta x_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (9.4.7)$$

که

1) Binomial

$$\Delta x_k = \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{x_k^2 f_k} \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j c_{kj} - 1 \right) x_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (9.4.8)$$

از شکل دو معادله اخیر روشن است که  $\eta$  یک استهلاک یا پارامتر اندازه گام است. مقادیر بالای  $\eta$  تصحیح فعلی را کاهش می دهد و از نوسان جلوگیری می کند، ولی نزدیک شدن به طراحی نهایی را ممکن است کند سازد. در معادله (۹.۴.۵) در واقع  $\eta = 2$  است.

مشکل اصلی در مورد قیدهای چندگانه محاسبه ضربگرهای لاگرانژ است. این امکان وجود دارد که روش دوگان را به کاربرد و ضربگرهای لاگرانژ را با استفاده از روش نیوتن محاسبه کرد. راه دیگر محاسبه آنها از شرط بحرانی ماندن قیدهای بحرانی است، شبیه معادله (۹.۳.۱۷). به عنوان مثال، فرض کنید که تعداد  $n_g$  قید همگی بحرانی اند. آن گاه ضربگرهای لاگرانژ از شرایط زیر به دست می آیند.

$$g_l(x^{*}) = 0, \quad l = 1, \dots, n_g, \quad (9.4.9)$$

یا

$$g_l(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_l}{\partial x_k} \Delta x_k = g_l(x) + \sum_{k=1}^n \frac{c_{kl}}{x_k^2} \Delta x_k = 0, \quad l = 1, \dots, n_g. \quad (9.4.10)$$

با استفاده از معادله (۹.۴.۸) برای  $\Delta x_k$  داریم:

$$\sum_{j=1}^{n_g} \sum_{k=1}^n \frac{c_{kl} c_{kj}}{x_k^3 f_k} \lambda_j = \sum_{k=1}^n \frac{c_{kl}}{x_k} - \eta g_l(x), \quad l = 1, \dots, n_g. \quad (9.4.11)$$

معادله (۹.۴.۱۱) یک دستگاه معادلات خطی بر حسب  $\lambda$  است. گاهی جواب بعضی از ضربگرهای لاگرانژ مقدار منفی است که نشانگر آن است که قید مربوط نباید فعال در نظر گرفته می شد. شاید برای یافتن یک مجموعه ضربگرهای لاگرانژ مثبت چندین چرخه از مجموعه های قیدهای فعال باید در نظر گرفته شده و آزمایش گردد. برای مقادیر شروع در حل به روش دوگان نیز از معادله (۹.۴.۱۱) می توان استفاده کرد.

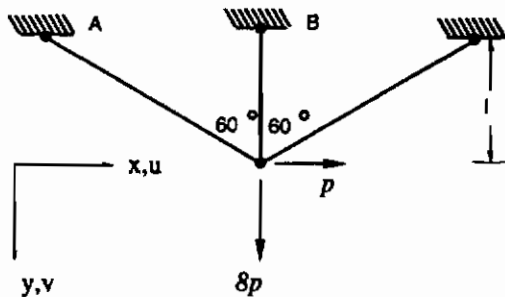
در مورد قیود تنش نیز می توان از روش بالا استفاده کرد. با این وجود در بسیاری از روشهای معیار بهیمنی، برای این کار فن نسبت تنش را به کار می گیرند. آن گاه اندازه اعضا که از فن نسبت تنش به دست می آید برای چرخه بعدی معیار بهیمنی به عنوان حد پایین در نظر گرفته می شود. دو روش در مثال زیر با



هم مقایسه می شوند.

### مثال ۹.۴.۱

خرپای شکل ۹.۴.۱ را به گونه ای طراحی کنید که جرم آن مینیمم باشد و تغییر مکان عمودی کمتر از  $d = 0.001l$  و تنشها کمتر از  $\sigma_0$  باشند. متغیرهای طراحی مساحت های سطح مقطع اعضا  $A_A$ ,  $A_B$  و  $A_C$  است که به سبب تقارن  $A_A = A_C$  است. تمامی اعضا از یک نوع مصالح ساخته شده اند با ضریب ارتجاعی  $E$ ، چگالی  $\rho$  و تنش تسلیم  $\sigma_0 = 0.002E$ . بعد از به دست آوردن طراحی بهین می خواهیم اثر افزایش تغییر مکان مجاز به  $1.25d$  را حدس بزنیم.



شکل ۹.۴.۱ خرپای سه میله ای

خرپا در مثال ۶.۱.۲ تحلیل شد و تغییر مکان عمودی و تنش اعضا به شکل زیر به دست آمد:

$$v = \frac{8pl}{E(A_B + 0.25A_A)},$$

$$\sigma_A = p \left( \frac{\sqrt{3}}{3A_A} + \frac{2}{A_B + 0.25A_A} \right),$$

$$\sigma_B = \frac{8p}{A_B + 0.25A_A},$$

$$\sigma_C = p \left( -\frac{\sqrt{3}}{3A_A} + \frac{2}{A_B + 0.25A_A} \right).$$

مسأله طراحی به شکل زیر نوشته می شود:

$$m = \rho l(A_B + 4A_A) \text{ رانست به قیود}$$

$$g_1 = 1 - \frac{v}{0.001l} \geq 0$$

بخش ۹.۴: قیدهای متعدد ۴۹۹

$$\begin{aligned} g_2 &= 1 - \frac{\sigma_A}{\sigma_0} \geq 0, & g_3 &= 1 - \frac{\sigma_B}{\sigma_0} \geq 0, \\ g_4 &= 1 - \frac{\sigma_C}{\sigma_0} \geq 0, & g_5 &= 1 + \frac{\sigma_C}{\sigma_0} \geq 0. \end{aligned}$$

مینیم کنید

که قید دوم روی  $\sigma_C$  به این خاطر لازم است که ممکن است  $\sigma_C$  منفی باشد. با تعریف متغیرهای طراحی  
بی بعد داریم:

$$x_1 = A_A \sigma_0 / p, \quad \text{و} \quad x_2 = A_B \sigma_0 / p,$$

مسئله را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= 4x_1 + x_2 \quad \text{را با قیود زیر} \\ g_1(\mathbf{x}) &= 1 - \frac{16}{(x_2 + 0.25x_1)} \geq 0, \\ g_2(\mathbf{x}) &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3x_1} - \frac{2}{(x_2 + 0.25x_1)} \geq 0, \\ g_3(\mathbf{x}) &= 1 - \frac{8}{(x_2 + 0.25x_1)} \geq 0, \\ g_4(\mathbf{x}) &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{3x_1} - \frac{2}{(x_2 + 0.25x_1)} \geq 0, \\ g_5(\mathbf{x}) &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3x_1} + \frac{2}{(x_2 + 0.25x_1)} \geq 0. \end{aligned}$$

مینیم کنید

بدیهی است که همواره  $g_1$  از  $g_3$  و  $g_2$  از  $g_4$  یا  $g_5$  بحرانی تر است، در نتیجه تنها لازم است  $g_1$  و  $g_2$  را در نظر  
بگیریم. ابتدا مسئله را با استفاده از فن نسبت تنش همراه با معیار بهینگی برای قید تغییر مکان حل می کنیم.  
با استفاده از فن نسبت تنش، مساحتها را به شکل زیر تغییر می دهیم:

$$\begin{aligned} (A_A)_{\text{جدید}} &= \left( \frac{\sigma_A}{\sigma_0} \right) (A_A)_{\text{قدیم}}, \\ (A_B)_{\text{جدید}} &= \left( \frac{\sigma_B}{\sigma_0} \right) (A_B)_{\text{قدیم}}, \end{aligned}$$

یا بر حسب متغیرهای بی بعد

$$\begin{aligned} (x_1)_{\text{جدید}} &= [1 - g_2(\mathbf{x})] x_1, \\ (x_2)_{\text{جدید}} &= [1 - g_3(\mathbf{x})] x_2. \end{aligned}$$

۵۰۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی و دوغان)

اکنون این مقادیر به عنوان مقادیر حداقل در روش معیار بهینگی به کار می روند که تنها در مورد  $g_1$  و در رابطه های (۹.۳.۱۹) و (۹.۳.۱۶) اعمال می شود. برای محاسبات، مشتقات زیر را نیاز داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial y_1} &= -x_1^2 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} = -\frac{4x_1^2}{(x_2 + 0.25x_1)^2}, \\ \frac{\partial g_1}{\partial y_2} &= -x_2^2 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = -\frac{16x_2^2}{(x_2 + 0.25x_1)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 4, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1, \\ c_0 &= g(y) - \frac{\partial g}{\partial y_1} y_1 - \frac{\partial g}{\partial y_2} y_2 \\ &= 1 - \frac{16x_2^2}{(x_2 + 0.25x_1)} + \frac{4x_1}{(x_2 + 0.25x_1)^2} + \frac{16x_2^2}{(x_2 + 0.25x_1)} = 1.\end{aligned}$$

از  $\mathbf{x}_0^T = (1, 10)$  استفاده می کنیم و داریم:

$$g_2 = 0.2275, \quad g_3 = 0.2195, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y_1} = -0.03807, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y_2} = -15.23.$$

با کاربرد فن نسبت تنش داریم  $(x_1)_{جدید} = 0.7725$ ،  $(x_2)_{جدید} = 7.805$ . به سبب اختلاف زیاد در مشتقات  $g_1$  نسبت به  $y_1$  و  $y_2$ ، انتظار داریم که روش معیار بهینگی  $x_1$  را بیشتر کاهش دهد، در نتیجه مقدار به دست آمده از فن نسبت تنش به یک قید حداقل خواهد انجامید. بنابراین،  $x_1$  به عنوان یک متغیر طراحی غیر فعال (یعنی  $x_1 \in I_p$ ) در نظر گرفته می شود. آن گاه از معادله (۹.۳.۲۰) و (۹.۳.۲۱) داریم:

$$c_0^* = 1 - 0.03807 = 0.9619, \quad \lambda = \left( \frac{\sqrt{15.23}}{0.9619} \right)^2 = 16.46.$$

در نهایت از معادله (۹.۳.۱۶) داریم  $x_1 = 0.356$ ،  $x_2 = 15.83$ ، که فرض این که  $x_1$  با قید تنش کنترل می شود را تأیید می کند. چرخه ها در جدول ۹.۴.۱ آمده است.

جدول ۹.۴.۱

	$x_1$	$x_2$	$(x_1)_{جدید}$	$(x_2)_{جدید}$	$c_0^*$	$\lambda$	$x_1$	$x_2$
1	1.	10.	0.7725	7.805	0.9619	16.46	0.356	15.83
2	0.7725	15.83	0.6738	7.904	0.9880	16.00	0.193	15.81
3	0.6738	15.81	0.6617	7.916	0.9894	16.00	0.169	15.83

اکنون این مسأله را با فن معیار بهینگی برای هر دو قید حل می کنیم. برای محاسبه ضربگرهای لاگرانژ

## بخش ۹.۴: قیدهای متعدد ۵۰۱

از معادله (۹.۴.۱۱) و برای به روز کردن متغیرهای طراحی از معادله (۹.۴.۸) با  $\eta = 2$  استفاده می‌کنیم. تاریخچه چرخه‌ها در جدول ۹.۴.۲ آمده است.

جدول ۹.۴.۲

چرخه	$x_1$	$x_2$	$g_1$	$g_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\Delta x_1$	$\Delta x_2$
1	1.	10.	-0.5610	0.2275	11.70	0.	-0.4443	3.906
2	0.5557	13.906	-0.1392	-0.1814	15.00	2.648	0.0897	1.694
3	0.6434	15.600	-0.0152	-0.0243	15.63	2.826	0.0160	0.231

توجه کنید که جدولهای ۹.۴.۱ و ۹.۴.۲ همگرایی به یک طراحی یکسان را نشان می‌دهند، که  $\lambda$  در جدول ۹.۴.۱ و  $\lambda_1$  در جدول ۹.۴.۲ به ۱۶ همگرا می‌شود. این مقدار «هزینه»  $g_1$  است. در طراحی بهین  $g_1 = 0$  یا  $v = d$ . اگر تغییر مکان مجاز را به  $1.25d$  افزایش دهیم،  $g_1 = 0.2$ ، و میزان کاهش مورد انتظار در تابع هدف تقریباً  $3.2 = 0.2 \times 16$  خواهد بود. ...

## ۹.۴.۲ روش مقیاس-مبتنا

شرایط کان-تاکر، معادله ۹.۴.۵، را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j e_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.4.12)$$

که

$$e_{ij} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} / \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n_g, \quad (9.4.13)$$

پارامتر تأثیر متغیر طراحی  $i$ ام نسبت به  $z$  امین قید است. معادله (۹.۴.۱۲) نشان می‌دهد که در بهین، تمامی متغیرهای طراحی، که با ضربگرهای لاگرانژ وزن دار شده‌اند، تأثیر یکسانی دارند. این نوع وزن دهی منطقی به نظر می‌رسد زیرا ضربگرهای لاگرانژ میزان اهمیت قیدها از نظر اثرشان روی مقدار بهین تابع هدف را بیان می‌کند. ونکایا [29] معادله (۹.۴.۲۵) را برای تغییر اندازه متغیرهای طراحی به شکل زیر تعمیم داد:

$$x_i^{\text{جدید}} = x_i^{\text{مهم}} \left( \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j e_{ij} \right)^{1/\eta}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.4.14)$$

## ۵۰۴ مبانی بهینه سازی سازه‌ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی ودوگان)

او برای ارزیابی ضربگرهای لاگرانژ پیشنهاد کرد که از تخمینی بر اساس یک قید استفاده شود، یعنی معادله (۹.۳.۲۸)، که مقدار زیر را به دست می دهد:

$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n a_i e_{ij}}, \quad j = 1, \dots, n_g. \quad (9.4.15)$$

ضربگرهای لاگرانژ تنها برای بحرانی ترین قیود محاسبه می شوند، و برای سایر قیود مقدار آن ها را صفر در نظر می گیرند. در نهایت باید یادآور شد که مقیاس بندی بر اساس بحرانی ترین قید طراحی استفاده می شود. این روش با تکرار مثال قبلی تشریح می شود.

### مثال ۹.۴.۲

مسأله بهینه سازی که در نظر می گیریم عبارت است از:

$$\begin{aligned} \text{را با قیود} \quad & f(\mathbf{x}) = 4x_1 + x_2 \\ & g_1(\mathbf{x}) = 1 - \frac{16}{(x_2 + 0.25x_1)^2} \geq 0, \\ \text{مینیمم کنید.} \quad & g_2(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3x_1} - \frac{2}{(x_2 + 0.25x_1)^2} \geq 0. \end{aligned}$$

این مسأله را با فرض این که قید در صورتی بحرانی در نظر گرفته می شود که مقدار آن بعد از مقیاس بندی کمتر از 0.15 باشد، حل می کنیم. با شروع از  $x_1 = 1$ ،  $x_2 = 10$ ، داریم،  $g_2 = 0.2275$ ،  $g_1 = -0.5610$ ، در نتیجه باید بر اساس اولین قید مقیاس بندی کنیم. برای این قید داریم

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = \frac{4}{(x_2 + 0.25x_1)^2} = 0.03807, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{16}{(x_2 + 0.25x_1)^2} = 0.1523.$$

$$e_{11} = \frac{\partial g_1 / \partial x_1}{\partial f / \partial x_1} = 0.009518, \quad e_{21} = \frac{\partial g_1 / \partial x_2}{\partial f / \partial x_2} = 0.1523.$$

برای این حالت  $z = 1 - g$  و آزمایش مقیاس بندی، معادله (۹.۳.۳۵)، به شکل زیر است.

$$\frac{1}{z} \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} x_i = \frac{-1}{1-g} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} x_i = \frac{-1}{1.561} (0.03807 \times 1 + 0.1523 \times 10) \leq 0.$$

بنابراین مقیاس بندی وارون را استفاده می کنیم، معادله (۹.۳.۳۳)،

بخش ۹.۴: قیدهای متعدد ۵۰۳

$$\alpha = \frac{0.03807 \times 1 + 0.1523 \times 10}{-0.561 + 0.03807 \times 1 + 0.1523 \times 10} = 1.561.$$

متغیرهای مقیاس بندی شده عبارتند از  $x_1 = 1.561$ ،  $x_2 = 15.61$ . اگر قیدها را بررسی کنیم می بینیم که  $g_1 = 0.5051$ ،  $g_2 = 0.2604$ ، در نتیجه مقیاس بندی دقیق است. دلیل دقیق بودن آن این است که سازه معادله (۹.۳.۳) را برآورده می سازد و می توانیم معادله (۹.۳.۳۴) را استفاده کنیم که در این جا به شکل  $\alpha = 1 - g$  ساده می شود. اکنون  $\lambda$  را از معادله (۹.۳.۲۸) با استفاده از  $a_1 = a_2 = 1$  به دست می آوریم:

$$\lambda = \frac{2}{0.009518 + 0.1523} = 12.36.$$

سپس متغیرهای طراحی را با استفاده از معادله (۹.۳.۲۴) با  $\eta = 2$  تغییر اندازه می دهیم و داریم:

$$x_1 = 1.561(12.36 \times 0.009518)^{1/2} = 0.5354, \quad x_2 = 15.61(12.36 \times 0.1523)^{1/2} = 21.42$$

تغییر زیاد در متغیرهای طراحی نشان می دهد که مقدار  $\eta = 2$  را که استفاده کرده ایم بسیار پایین بوده، در نتیجه آن را به ۴ افزایش داده و تغییر اندازه را تکرار می کنیم  $x_1 = 1.561(12.36 \times 0.009518)^{1/4} = 0.9142$ ،  $x_2 = 15.61(12.36 \times 0.1523)^{1/4} = 18.28$ . برای این مقادیر جدید متغیرهای طراحی داریم  $g_1 = 0.1357$ ،  $g_2 = 0.2604$ . انتظار داریم که بعد از مقیاس بندی  $g_2$  زیر ۰.۱۵ باشد، در نتیجه هر دو قید بحرانی خواهند بود. بنابراین مشتقات را برای هر دو قید محاسبه می کنیم.

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 0.01167, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = 0.04669, \quad e_{11} = 0.00292, \quad e_{21} = 0.04669,$$

و

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{3}}{3x_1^2} + \frac{0.5}{(x_2 + 0.25x_1)^2} = 0.6923, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = \frac{2}{(x_2 + 0.25x_1)^2} = 0.00584,$$

$$e_{12} = 0.1731, \quad e_{22} = 0.00584.$$

ابتدا تغییر اندازه می دهیم و مقادیر زیر را به دست می آوریم:

$$\alpha = 1 - g_1 = 0.8643, \quad x_1 = 0.7901, \quad x_2 = 15.80.$$

آن گاه ضریب‌های لاگرانژ را محاسبه می کنیم.

۵۰۴ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی و دوگان)

$$\lambda_1 = 2/(0.00292 + 0.04669) = 40.32, \quad \lambda_2 = 2/(0.1731 + 0.00584) = 11.18,$$

و با استفاده از معادله (۹.۴.۱۴) با  $\eta = 4$  (بر اساس تجربه از چرخه قبلی) تغییر اندازه می دهیم

$$x_1 = 0.7901(0.00292 \times 40.32 + 0.1731 \times 11.18)^{1/4} = 0.9457,$$

$$x_2 = 15.80(0.04669 \times 40.32 + 0.00584 \times 11.18)^{1/4} = 18.67.$$

چند چرخه اول در جدول ۹.۴.۳ خلاصه شده است. جواب از مثال ۹.۴.۱ بیشتر نوسان می کند، و به نظر می رسد که وقتی به بهین  $x_1 = 0.6598$ ,  $x_2 = 15.83$  نزدیک می شود منحرف می شود. ضربگرهای لاگرانژ به مقادیر صحیح خود همگرا نمی شوند، زیرا آنها بر اساس تقریب یک قیدند. ...

جدول ۹.۴.۳

مقیاس بندی شده		تغییر اندازه داده شده					
$x_1$	$x_2$	$g_1$	$g_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$x_1$	$x_2$
1.5610	15.61	0	0.5051	12.36	0	0.9142	18.28
0.7901	15.80	0	0.1443	40.32	11.18	0.9457	18.67
0.8004	15.80	0	0.1537	42.04	0	0.4688	18.51
0.6277	24.78	0.3584	0	0	3.017	0.7448	9.000
1.2974	15.68	0	0.4300	9.927	0	0.7598	18.36
0.6593	15.93	0.006	0	40.49	7.807	0.7910	18.77
0.6672	15.83	0	0.0096	42.34	8.453	0.8003	18.66
0.6789	15.83	0	0.0246	41.85	8.646	0.8143	18.66

۹.۴.۳ رابطه سازه های دیگر

برای روش های معیار بهینگی رابطه سازه های متعدد دیگری نیز وجود دارد. اغلب آنها برای قیدهای ویژه ای به وجود آمده اند. به عنوان مثال خات در [32] قیدهای پایداری را در نظر گرفته است. مسأله مقدار ویژه پایداری معمولاً به شکل زیر نوشته می شود:

$$[K - \mu_k K_G] u_k = 0, \quad (9.4.16)$$

که  $K$  ماتریس سختی،  $K_G$  ماتریس سختی هندسی،  $\mu_k$  مقدار ویژه کماتش، و  $u_k$  بردار ویژه مربوط یا مود کماتش است. فرض می کنیم مودها چنان نرمال سازی شوند که

$$u_k^T K_G u_k = 1, \quad (9.4.17)$$

و آن گاه مقدار ویژه  $\mu_k$  عبارت است از:

بخش ۹.۴: قیدهای متعدد ۵۰۵

$$\mu_k = \mathbf{u}_k^T \mathbf{K} \mathbf{u}_k. \quad (9.4.18)$$

قیدهای مقدار ویژه در مرجع [32] به شکل زیر است:

$$g_j = \mu_j - \bar{\mu}_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g. \quad (9.4.19)$$

مشتق  $g_j$  نسبت به متغیر طراحی  $x_i$  از معادله (۷.۳.۵) به شکل زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} = \mathbf{u}_j^T \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} - \mu_j \frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial x_i} \right] \mathbf{u}_j. \quad (9.4.20)$$

جمله دوم طرف راست معادله (۹.۴.۲۰) در صورتی که بارهای داخلی کمانش، و بنابراین  $\mathbf{K}_G$ ، به متغیرهای طراحی وابسته نباشند، صفر است. حتی وقتی جمله دوم صفر نیست، موارد زیادی وجود دارد که می توان از آن چشم پوشی کرد. خات عبارت زیر را تعریف می کند.

$$b_{ij} = x_i^2 \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} = x_i^2 \mathbf{u}_j^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u}_j. \quad (9.4.21)$$

اگر ماتریس سختی یک ترکیب خطی از متغیرهای طراحی باشد،

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} x_i. \quad (9.4.22)$$

آن گاه از معادلات (۹.۴.۱۸) و (۹.۴.۲۱) داریم:

$$\mu_j = \sum_{i=1}^n \frac{b_{ij}}{x_i}, \quad (9.4.23)$$

و از معادله (۹.۴.۲۱) داریم:

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} = \frac{b_{ij}}{x_i^2}. \quad (9.4.24)$$

معادلات (۹.۴.۲۳) و (۹.۴.۲۴) با هم نشان می دهند که  $b_{ij}$  نمی تواند به طور تقریبی ثابت باشد (اگر می توانست ثابت باشد باید یک علامت منفی در یکی از این معادلات می داشتیم). با این وجود، می توانیم به همان روش که در قیدهای تغییر مکان عمل شد، عمل کنیم. شرایط بهینگی به صورت زیر خواهد بود:



۵۰۶ سانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۹: روشهای معیار بهینگی و دوگان)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j \frac{b_{ij}}{x_i^2} = 0, \quad (9.4.25)$$

در نتیجه

$$x_i = \left( \frac{1}{f_i} \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j b_{ij} \right)^{1/2}, \quad (9.4.26)$$

که  $f_i = \partial f / \partial x_i$  می توانیم با توجه به معادله (۹.۴.۶) از یک شکل کلی تر استفاده کنیم

$$x_i^{opt} = x_i \left( \frac{1}{x_i^2 f_i} \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j b_{ij} \right)^{1/n}. \quad (9.4.27)$$

آن گاه برای محاسبه ضربگرهای لاگرانژ از یکی از روشهای ارائه شده در این بخش استفاده می شود. در [32] روشی که به معادله (۹.۴.۱۱) می انجامد استفاده شده است. برای مثال خریا در [32]، روش به خوبی همگرا می شود، گرچه انتظار می رود ضرایب  $b_{ij}$  با تغییر طراحی، تغییر عمده ای داشته باشند. برای پایان دادن به این فصل یادآور می شویم که این فصل روی ارتباط بین روشهای معیار بهینگی، روشهای دوگان و مفاهیم تقریب تاکید داشت. روشهای دیگر معیار بهینگی نیز هم برای قیدهای خاص و هم برای قیدهای عمومی وجود دارد. برای مروری بر کارهای دیگر، در زمینه روشهای معیار بهینگی، خواننده را به مراجع [32-34] ارجاع می دهیم.

## ۹.۵ تمرینها

۱. ثابت کنید برای حالت خطی، دوگان فالتک به رابطه سازی دوگان مطرح شده در فصل ۳ می انجامد.
۲. خریای شکل ۹.۲.۴ باید برای قیدهای تنش و کمانش اولری با دو شرط بارگذاری زیر طراحی شود: یک بار افقی به میزان  $p$ ، و یک بار عمودی به میزان  $2p$ . تنش تسلیم عبارت است از  $\sigma_0 = \alpha E$  که  $E$  ضریب ارتجاعی و  $\alpha$  یک ثابت نسبت است. فرض کنید گشتاور ماند هر عضو  $I = \beta A^2$  که  $\beta$  یک عدد ثابت و  $A$  مساحت سطح مقطع است. برنامه ای بنویسید که برای خریای یک طراحی تمام تنیده را به ازای مقادیر مختلف  $E$ ،  $p$ ،  $\beta$ ،  $\alpha$ ،  $l$  بدهد، با فرض این که عضو  $A$  و  $C$  یکسانند. طراحی را با فرض  $\alpha = 10^{-3}$ ،  $\beta = 1.0$  و  $\sigma_0 l^2 / p = 10^5$  بدست آورید.

۳. قاعده تغییر اندازه FSD را برای یک صفحه با ضخامت  $t$  و تحت تأثیر بارهای صفحه ای

## بخش ۹.۵: تمرینها ۵۰۷

$n_x, n_y, n_{xy}$  و گشتاورهای خمشی  $m_x, m_y, m_{xy}$  (تمامی آنها بر واحد طول)، با استفاده از معیار تسلیم ترسکا<sup>۱</sup> (تنش برش ماکزیمم) به دست آورید.

۴. با استفاده از روش دوگان مینیم  $f = x_1 + x_2x_3 + x_4^2$  را با قیدهای  $x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4$  و  $10 - 1/x_1^2 - 2x_2x_3 - 1/x_4 \geq 0$  به دست آورید.

۵. برای حل مثال ۹.۲.۴ یک برنامه رایانه ای بنویسید. چرخه ها را تا به دست آوردن طراحی بهین تا سه رقم اعشار دقت، ادامه دهید.

۶. مثال ۹.۲.۳ را برای حالتی که  $x_1$  و  $x_2$  تنها مقادیر صحیح زوج را بتوانند داشته باشند و  $x_3$  بتواند تغییرات پیوسته داشته باشد، تکرار کنید.

۷. برنامه ای رایانه ای بنویسید که مثال ۹.۳.۱ را با فرض قرینه نبودن حل کند. بنابراین سه متغیر طراحی وجود خواهد داشت. عضو C تحت قید مینیمم اندازه نیست، ولی اعضای A و B قید مینیمم اندازه دارند.

۸. ببینید تا چه اندازه می توان مقدار  $\gamma$  در مثال ۹.۳.۲ را کوچکتر در نظر گرفت، بدون این که باعث واگرایی جواب گردد.

۹. مثال ۹.۴.۱ را با اضافه کردن قید دیگری که تغییر مکان افقی از  $d = 0.0005l$  تجاوز نکند بار دیگر حل کنید.

۱۰. برای مثال ۹.۴.۱ جداول ۹.۴.۱ و ۹.۴.۲ را به دست آورید.

۱۱. خرابای شکل ۹.۴.۲ را با استفاده از روش معیار بهینگی چنان طراحی کنید که بسامد اصلی حدود ۱ هرتز، و بسامد دوم بالای ۳ هرتز باشد. فرض کنید خواص مصالح اعضا یکسان است.

- [1] Mitchell, A.G.M., "The Limits of Economy of Material in Framed Structures," Phil. Mag., 6, pp. 589-597, 1904.
- [2] Cilly, F.H., "The Exact Design of Statically Determinate Frameworks, and Exposition of its Possibility, but Futility," Trans. ASCE, 43, pp. 353-407, 1900.
- [3] Schmit, L.A., "Structural Design by Systematic Synthesis," Proceedings 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, New York, pp. 105-132, 1960.
- [4] Reinschmidt, K., Cornell, C.A., and Brothie, J.F., "Iterative Design and Structural Optimization," J. Strct. Div. ASCE, 92, ST6, pp. 281-318, 1966.
- [5] Razani, R., "Behavior of Fully Stressed Design of Structures and its Relationship to Minimum Weight Design," AIAA J., 3 (12), pp. 2262-2268, 1965.
- [6] Dayaratnam, P. and Patnaik, S., "Feasibility of Full Stress Design," AIAA J., 7 (4), pp. 773-774, 1969.
- [7] Lansing, W., Dwyer, W., Emerton, R. and Ranalli, E., "Application of Fully-Stressed Design Procedures to Wing and Empennage Structures," J. Aircraft, 8 (9), pp. 683-688, 1971.
- [8] Giles, G.L., Blackburn, C.L. and Dixon, S.C., "Automated Procedures for Sizing Aerospace Vehicle Structures (SAVES)," AIAA Paper 72-332, presented at the AIAA/ASME/SAE 13th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 1972.
- [9] Berke, L. and Khot, N.S., "Use of Optimality Criteria for Large Scale Systems," AGARD Lecture Series No. 170 on Structural Optimization, AGARD-LS-70, 1974.
- [10] Adelman, H.M., Haftka, R.T. and Tsach, U., "Application of Fully Stressed Design Procedures to Redundant and Non-isotropic Structures," NASA TM-81842, July 1980.
- [11] Adelman, H.M. and Narayanaswami, R., "Resizing procedure for structures under combined mechanical and thermal loading," AIAA J., 14 (10), pp. 1484-1486, 1976.
- [12] Venkayya, V.B., "Design of Optimum Structures," Comput. Struct., 1, pp. 265-309, 1971.
- [13] Siegel, S., "A Flutter Optimization Program for Aircraft Structural Design," Proc. AIAA 4th Aircraft Design, Flight Test and Operations Meeting, Los Angeles, California, 1972.
- [14] Stroud, W.J., "Optimization of Composite Structures," NASA TM-84544, August 1982.
- [15] Falk, J.E., "Lagrange Multipliers and Nonlinear Programming," J. Math. Anal. Appl., 19, pp. 141-159, 1967.

- [16] Fleury, C., "Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 14 (12), pp. 1761-1783, 1979.
- [17] Schmit, L.A., and Fleury, C., "Discrete-Continuous Variable Structural Synthesis using Dual Methods," *AIAA J.*, 18 (12), pp. 1515-1524, 1980.
- [18] Schmit, L.A., and Fleury, C., "Discrete-Continuous Variable Structural Synthesis using Dual Methods," Paper 79-0721, Proceedings of the AIAA/ASME/AHS 20th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, St. Louis, MO, April 4-6, 1979.
- [19] Grierson, D.E., and Lee, W.H., "Optimal Synthesis of Steel Frameworks Using Standard Sections," *J. Struct. Mech.*, 12(3), pp. 335-370, 1984.
- [20] Grierson, D.E., and Lee, W.H., "Optimal Synthesis of Frameworks under Elastic and Plastic Performance Constraints Using Discrete Sections," *J. Struct. Mech.*, 14(4), pp. 401-420, 1986.
- [21] Grierson, D.E., and Cameron, G.E., "Microcomputer-Based Optimization of Steel Structures in Professional Practice," *Microcomputers in Civil Engineering*, 4 (4), pp. 289-296, 1989.
- [22] Fleury C., and Braibant, V., "Structural Optimization: A New Dual Method Using Mixed Variables," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 23, pp. 409-428, 1986.
- [23] Prager, W., "Optimality Criteria in Structural Design," *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 61 (3), pp. 794-796, 1968.
- [24] Venkayya, V.B., Khot, N.S., and Reddy, V.S., "Energy Distribution in an Optimum Structural Design," *AFFDL-TR-68-156*, 1968.
- [25] Berke, L., "An Efficient Approach to the Minimum Weight Design of Deflection Limited Structures," *AFFDL-TM-70-4-FDTR*, 1970.
- [26] Venkayya, V.B., Khot, N.S., and Berke, L., "Application of Optimality Criteria Approaches to Automated design of Large Practical Structures," *Second Symposium on Structural Optimization*, AGARD-CP-123, pp. 3-1 to 3-19, 1973.
- [27] Gellatly, R.A., and Berke, L., "Optimality Criteria Based Algorithm," *Optimum Structural Design*, R.H. Gallagher and O.C., Zienkiewicz, eds., pp. 33-49, John Wiley, 1972.
- [28] Khot, N.S., "Algorithms Based on Optimality Criteria to Design Minimum Weight Structures," *Eng. Optim.*, 5, pp. 73-90, 1981.
- [29] Venkayya, V.B., "Optimality Criteria: A Basis for Multidisciplinary Optimization," *Computational Mechanics*, Vol. 5, pp. 1-21, 1989.
- [30] Rozvany, G.I.N., *Structural Design via Optimality Criteria: The Prager Approach to Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland, 1989.
- [31] Wilkinson, K. et al. "An Automated Procedure for Flutter and Strength Analysis and Optimization of Aerospace Vehicles," *AFFDL-TR-75-137*, December 1975.

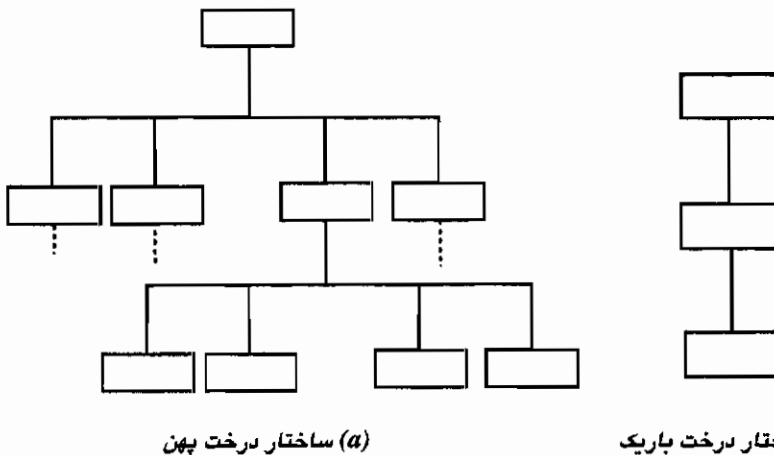
- [32] Khot, N.S., "Optimal Design of a Structure for System Stability for a Specified Eigenvalue Distribution," in New Directions in Optimum Structural Design (E. Atrek, R.H., Gallagher, K.M., Ragsdell and O.C. Zienkiewicz, editors), pp. 75-87, John Wiley, 1984.
- [33] Venkayya, V.B., "Structural Optimization Using Optimality Criteria: A Review and Some Recommendations," Int. J. Num. Meth. Engng., 13, pp. 203-228, 1978.
- [34] Berke, L., and Khot, N.S., "Structural Optimization Using Optimality Criteria," Computer Aided Structural Design: Structural and Mechanical Systems (C.A. Mota Soares, Editor), Springer Verlag, 1987.

## ۱۰.۱ رابطه بین رابطه سازی تجزیه ای و چند سطحی

معمولاً با افزایش ابعاد مسأله بهینه سازی منابع مورد نیاز برای حل آن با یک نرخ بیشتر از خطی افزایش می یابد. یعنی، اگر تعداد متغیرهای طراحی را در یک مسأله دو برابر کنیم، هزینه حل آن معمولاً از دو برابر بیشتر می شود. مسائل بزرگ نیز به حافظه رایانه ای حجمی نیاز دارند. بدین سبب، ما اغلب به دنبال راههای شکستن یک مسأله بزرگ بهینه سازی به تعدادی مسأله کوچکتر هستیم.

یکی از روشهای مشهور نائل شدن به شکستن مسأله، تجزیه است. فرآیند تجزیه تشکیل شده از شناسایی رابطه های بین متغیرهای طراحی و قیدهایی که به ما این اجازه را می دهند تا آنها را به گروههایی تقسیم کنیم که گروهها ارتباط داخلی ضعیفی دارند. هنگامی که فرایند تجزیه انجام شد، باید یک روش بهینه سازی را شناسایی کنیم که از مزیت این گروه بندی استفاده کرده و طراحی کلی را با تعدادی از بهینه سازی های تک تک گروهها جایگزین کند و به بهینه سازی کل سیستم بینجامد.

فرایند جهت دهی به شکلی که بهینه سازی گروهها به بهینه سازی کل مسأله بینجامد اغلب توسط یک الگوریتم انجام می شود و آن گاه کل مسأله بهینه سازی یک فرایند بهینه سازی دو سطحی می شود. به سطح جهت دهی معمولاً سطح بالا و به مسائل بهینه سازی کوچک سطح زیر جهت دهی می گویند. البته، شکستن هر گروه از سطح زیر جهت دهی به زیر گروههای دیگر امکان پذیر است، و یک بهینه سازی سه سطحی خواهیم داشت و به همین ترتیب. ساختار چند سطحی که از فرایند تجزیه حاصل می شود، معمولاً با تعداد زیادی زیر مسأله در سطوحهای پایینی شناخته می شود. وقتی فرآیند تجزیه به شکل نمایشی نشان داده شود (به شکل ۱۰.۱.۱۲ مراجعه کنید)، شکل حاصل یک ساختار درخت پهن (چند شاخه) خواهد بود.



شکل ۱۰.۱.۱ ساختار مسائل چند سطحی

بهینه سازی چند سطحی تنها از تجزیه به وجود نمی آید. بعضی از مسائل، ساختار چند سطحی طبیعی با تنها یک یا چند زیر سطح دارند، یعنی آنها یک ساختار درخت باریک دارند (به شکل ۱۰.۱.۱b). در این حالتها می توان تحلیل سازه را با مینیمم سازی انرژی پتانسیل کل سازه به عنوان یک فرایند بهینه سازی رابطه سازی کرد. در این حالت مسئله طراحی را می توان به عنوان یک مسئله بهینه سازی دو سطحی در نظر گرفت که تحلیل یک زیر سطح منفرد است. مثال دیگر، بهینه سازی با انواع مختلف متغیرهای طراحی است مانند متغیرهای اندازه ای و شکلی، که بهتر است آنها را در سطوح مختلف مورد بحث قرار داد. در نهایت، در بهینه سازی با موضوعها و زمینه های چندگانه ممکن است حالتی داشته باشیم که در آنها زیر سطحهای مربوط به هر زمینه بهینه سازی با هم تشکیل یک درخت بدهند.

از آن جا که فنون بهینه سازی چند سطحی نیز نواقصی دارد (که در زیر بحث می شود)، طبیعی است که دنبال روشهایی باشیم که بعضی از مسائل چند سطحی (به ویژه مسائل درخت باریک) را به یک ساختار تک سطحی تبدیل کند. به عنوان مثال، در مسائل طراحی که تحلیل به عنوان یک بهینه سازی سطح دو انجام می شود، استفاده از یک رابطه سازی تک سطحی ممکن است بهتر باشد. این رابطه سازی تک سطحی تحلیل و طراحی همزمان نامیده می شود، و همراه سایر مسائل چند سطحی درخت باریک در بخش ۱۰.۵ بحث می شود.

## ۱۰.۲ تجزیه

فرایند تجزیه با شناسایی گروههایی از متغیرهای طراحی که در هر گروه با هم ارتباط قوی داشته و با بقیه متغیرهای طراحی ارتباط ضعیفی دارند شروع می شود (قوت و ضعف ارتباط بین متغیرها به زودی تعریف می شود). فرض می شود که  $s$  تا از این گروهها داریم. بردار متغیر طراحی  $x$  به شکل زیر نوشته می شود:

$$x^T = (x_1, \dots, x_s)^T. \quad (10.2.1)$$

وقتی تابع هدف بر حسب گروهها جداپذیر است، گروههای متغیرهای طراحی به هیچ وجه ارتباط ندارند، یعنی:

$$f(x) = \sum_{i=1}^s f(x_i), \quad (10.2.2)$$

و هر قید تنها به متغیرهای یک گروه بستگی دارد. یعنی، اگر بردار قیدهای مربوط به  $x_i$  را با  $g_i$  نشان دهیم، قید را می شود به شکل زیر نوشت:

$$g_i(x_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (10.2.3)$$

این ساختار مسأله ساده در شکل ۱۰.۲.۱a نمایش داده شده است. سطرهای نمودار نشانگر تابع هدف و قیدهایند، و ستونها نشانگر متغیرهای طراحی اند. علامت 'x' در جعبه نشانگر این است که تابع

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$f$	X	X	X	X
$g_1$	X			
$g_2$		X		
$g_3$			X	
$g_4$				X

(a)

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$f$	X	X	X	X
$g_1$	X			
$g_2$	X	X		
$g_3$	X		X	
$g_4$	X			X

(b)

شکل ۱۰.۲.۱ ساختارهای جعبه ای قطری و جعبه ای زاویه ای



هدف و یا قید مربوط به سطر جعبه به بردار متغیرهای طراحی مربوط به ستون آن جعبه بستگی دارند. برای یک مسأله جعبه ای قطری، حل به طور طبیعی به تعدادی مسأله به شکل زیر شکسته می شود.

$$(۱۰.۲.۴) \quad \begin{array}{ll} \text{تابع} & f_i(x_i) \\ \text{را با شرط} & g_i(x_i) \geq 0, \end{array} \quad \text{مینیمم کنید}$$

که می تواند برای  $i = 1, \dots, s$  به طور مستقل حل شود (یعنی، مسأله جداپذیر است، به بخش ۹.۲.۲ مراجعه کنید). این یک موقعیت مطلوب است، زیرا حل یک مسأله بزرگ را با تعدادی مسأله کوچکتر جایگزین می کنیم بدون این که نیازی به جهت دهی زیر مسائل باشد. این ساده ترین مثال تجزیه مسأله نیز هست.

به ندرت اتفاق می افتد که با مسائلی سروکار داشته باشیم که یک ساختار جعبه ای قطری ساده داشته باشند، ولی در بسیاری از حالتها مسائل بهینه سازی داریم که ارتباط بین گروههای متغیرها بسیار ضعیف است. ارتباط بین گروههای متغیرها یعنی این که بعضی از چهار گوشهای غیر قطری خالی در شکل (۱۰.۲.۱) پر باشند. یک ارتباط ضعیف یعنی مشتقات داخل مربعات غیر قطری در مقایسه با مشتقات داخل مربعات قطری کوچکند. در حالتی که ارتباط ضعیف است، می شود مسأله را جعبه ای قطری پنداشت و به پیش رفت. اما به جای این که هر گروه از متغیرها تنها یک دفعه بهینه شوند، باید فرایند را به خاطر ارتباط ضعیف بین گروهها چندین بار تکرار کنیم. به عنوان مثال، طراحی سازه های خریا را که مقید به قیدهای تنش و کمانش موضعی هستند در نظر بگیرید. با فرض ثابت ماندن نیروی اعضا می توانیم پارامتر سطح مقطع هر عضو خریا را به طور جداگانه طراحی کنیم چنان که قیدهای تنش و کمانش موضعی برآورده شده باشند. البته در خریای از نظر ایستایی نامعین، نیروهای اعضا تغییر می کنند و ما باید فرایند را تکرار کنیم. این رویکرد یک حالت تعمیم یافته فن اندازه نسبت تنش برای طراحی تمام تنیده است که در فصل ۹ بحث شد و آن را می توان برای تک تک اعضا و زیر سازه ها به کاربرد (به مرجع گیلز<sup>۱</sup> و سوبیتزسکی<sup>۲</sup> و لوندورف<sup>۳</sup> مراجعه کنید). افزون بر این، مانند فن نسبت تنش، ممکن است فرایند به یک طرح غیر بهین (هر چند معمولاً نزدیک بهین) همگرا شود.

یک حالت معمولتر دیگر، هنگامی است که زیر مسائل تنها با تعداد کمی از متغیرهای طراحی با هم ارتباط دارند. بردار متغیر طراحی که در ارتباط بین گروههاست را با  $y$  نشان می دهیم. بنابراین مسأله

بهینه سازی به شکل زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} f_0(y) + \sum_{i=1}^s f_i(x_i, y) & \quad \text{تابع} \quad (10.2.5) \\ g_0(y) & \geq 0, \quad \text{رانسبت به قیود} \\ g_i(x_i, y) & \geq 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad \text{مینیم کنید} \end{aligned}$$

که در آن  $g_0$  بردار قیود فراگیر است. ماتریس ارتباط در شکل ۱۰.۲.۱b نشان داده شده است، و به آن شکل جعبه ای زاویه ای می گویند. متغیرهای زیر سیستم،  $x_i$ ، را اغلب متغیرهای محلی نامیده، در حالی که متغیرهای ارتباط،  $y$ ، را متغیرهای فراگیر می نامند. افزون بر مسائل سازه ای جعبه ای قطری و جعبه ای زاویه ای حالت های دیگری نیز وجود دارد که برای تجزیه مناسبند. برای بحث کاملی از مسائل سازه ای که تجزیه در موردشان به کار می رود خواننده را به مرجع بارثلمی<sup>۱</sup> [3] ارجاع می دهیم.

یک حالت که در آن ساختار مسأله جعبه ای زاویه ای به طوری طبیعی به دست می آید، طراحی حد سازه های تحت بارگذاریهای مختلف است (به بخش ۳.۱ مراجعه کنید). یک خرپا با ۳ عضو را در نظر بگیرید که از یک جنس ساخته شده و تحت اثر  $s$  حالت بارگذاری است که به صورت بردارهای بارگره ای  $p^i, i = 1, \dots, s$  داده شده است. معادلات تعادل برای این بارگذاری به شکل زیر نوشته می شود:

$$E n^i = p^i, \quad i = 1, \dots, s, \quad (10.2.6)$$

که در آن  $n^i$  بردار نیروی عضو برای  $i$ امین حالت بارگذاری، و  $E$  ماتریس کسینوسهای هادی است. برای مسأله طراحی حد خرپا لازم است قیدهای تسلیم برای هر بارگذاری را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$A_j \sigma_C \leq n_j^i \leq A_j \sigma_T, \quad j = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, s, \quad (10.2.7)$$

که در آن  $\sigma_C$  و  $\sigma_T$  به ترتیب تنشهای تسلیم در کشش و فشار،  $A_j$  مساحت سطح مقطع عضو  $j$ ام، و  $n_j^i$  نیروی عضو  $j$  در حالت بارگذاری  $i$ ام است. مسأله طراحی حد برای طراحی کمترین وزن خرپا را می توان به شکل زیر رابطه سازی کرد:

$$\begin{aligned} m &= \sum_{j=1}^r \rho A_j L_j & \text{رابطه} & \quad (10.2.8) \\ E n^i &= p^i, & \text{را مشروط به} & \\ A_j \sigma_C &\leq n_j^i \leq A_j \sigma_T, & \text{مینیم کنید} & \end{aligned}$$

1) Barthelemy

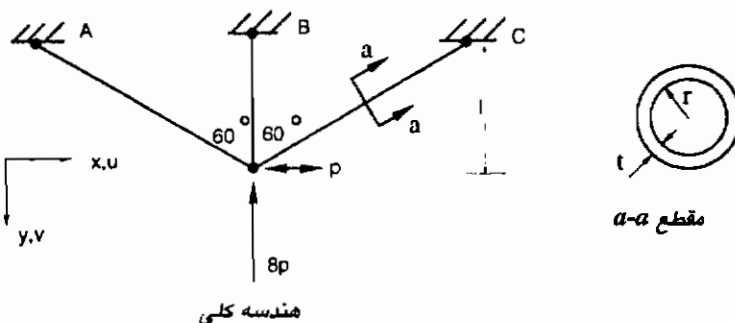
### ۵۱۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۰: بهینه سازی تجزیه ای و چند سطحی)

که در آن  $p$  و  $L_i$  به ترتیب چگالی و طول زامین عضوند. در این مسأله نیروهای اعضا و مساحت‌های سطح مقطع متغیرهای طراحی اند. در این حالت نیروهای اعضا برای زامین حالت بارگذاری،  $n^i$ ، نقش بردارهای متغیرهای محلی  $x_i$  را بازی می کنند زیرا  $n^i$  تنها در قیدهای زامین حالت بارگذاری ظاهر می شود. مساحت‌های سطح مقطع نقش بردار جفت کننده  $y$  را بازی می کند زیرا آنها در تابع هدف و قیدهای تمامی شرایط بارگذاری ظاهر می شوند.

#### مثال ۱۰.۲.۱

خرپای سه میله ای شکل ۱۰.۲.۲ باید برای داشتن مینیمم جرم چنان طراحی شود که در اثر دو سیستم بارگذاری: یک بار عمودی به مقدار  $8p$  و یک بار افقی به مقدار  $p$  فرو نریزد. فرض می کنیم که خرپا نه تنها در اثر تسلیم، بلکه در اثر کماتش اوپلری عضوهای فشاری نیز فرو می ریزد. فرض می شود رفتار بعد از کماتش یکدست باشد (یعنی بار ثابت با تغییر شکل فزاینده)، بنابراین در معادله (۱۰.۲.۷) برای اعضای فشاری، تنش کماتش را می توان به جای تنش تسلیم جایگزین کرد. متغیرهای طراحی مساحت‌های سطح مقطع و گشتاورهای ماند اعضا باید (که فرض می شود مستقلند).

بار افقی هم می تواند به طرف راست باشد و هم به طرف چپ، بنابراین یک طراحی متقارن مورد نظر است، و داریم  $A_A = A_C$  و  $I_A = I_C$ . فرض می کنیم خواص مصالح اعضا یکسان است و در اثر بار افقی، عضو B در کشش بحرانی نخواهد بود. اگر دو بارگذاری را با اندیسهای بالایی  $H$  و  $V$  نشان دهیم، مسأله طراحی حد را به شکل زیر رابطه سازی می کنیم:



شکل ۱۰.۲.۲ خرپای سه میله ای لوله ای فشاری

## بخش ۱۰.۲: تجزیه ۵۱۷

$$\begin{aligned}
 m &= \rho l(4A_A + A_B) && \text{رابطه} \\
 0.866(n_A^H - n_C^H) &= p, && \text{را مشروط به} \\
 n_B^H + 0.5(n_A^H + n_C^H) &= 0, \\
 n_A^H &\leq \sigma_T A_A, \quad -n_B^H \leq \frac{\pi^2 EI_B}{l^2}, \quad -n_C^H \leq \frac{\pi^2 EI_A}{4l^2}, \\
 0.866(n_A^V - n_C^V) &= 0, && \text{و} \\
 n_B^V + 0.5(n_A^V + n_C^V) &= -8p, \\
 -n_A^V &\leq \frac{\pi^2 EI_A}{4l^2}, \quad -n_B^V \leq \frac{\pi^2 EI_B}{l^2}, \quad -n_C^V \leq \frac{\pi^2 EI_A}{4l^2}.
 \end{aligned}$$

مینیم کنید

نمودار جعبه‌ای مسأله در شکل ۱۰.۲.۳ نشان داده شده است که در (a) نمودار متغیر به متغیر و در (b) نمودار گروهی متغیرها آمده است. نمودار نشان می‌دهد که مسأله بهینه‌سازی یک شکل جعبه‌ای زاویه‌ای دارد که خواص سطح مقطعها متغیرهای جفت‌کننده و نیروهای اعضا برای هر بارگذاری متغیرهای محلی اند. . . .

یک شکل جعبه‌ای زاویه‌ای را می‌توان از راههای مختلفی به کار برد، که در آینده بحث می‌شود، تا مسأله بهینه‌سازی کلی را با تعدادی از مسائل کوچکتر جایگزین کرد. یک شکل جعبه‌ای زاویه‌ای افزون بر ارزشی که در تجزیه دارد، از نظر محاسباتی نیز مزایایی دارد. مزیت اصلی این است که محاسبات مشتقها بر هزینه نیست، زیرا قیدها تنها به تعداد محدودی از متغیرهای طراحی بستگی دارند. بنابراین، انتخاب مناسب متغیرهای طراحی به شکلی که یک ساختار جعبه‌ای زاویه‌ای به وجود بیاید به نوبه خود با ارزش است، حتی اگر برای حل مسأله از یک الگوریتم بهینه‌سازی استاندارد استفاده کنیم. این موضوع در مثال بعدی تشریح می‌شود.

## مثال ۱۰.۲.۲

اکنون خرپای سه میله‌ای شکل ۱۰.۲.۲ باید با تغییر شعاع و ضخامت اعضا، در محدوده ارتجاعی چنان طراحی شود که وزن آن مینیمم شود. فرض می‌شود دوباره به طور همزمان اعمال می‌شوند، بنابراین ما تنها یک حالت بارگذاری در نظر می‌گیریم. به سبب وجود تقارن فرض می‌کنیم اعضای A و C یکسانند، بنابراین متغیرهای طراحی عبارتند از  $t_A, r_B, t_B, r_A$ . فرض می‌کنیم ضخامت لوله‌ها در مقایسه با شعاع کوچکند، بنابراین مساحت‌های سطح مقطعها به شکل زیر تقریب زده می‌شوند.

(a)

		$A_A$	$I_A$	$A_B$	$I_B$	$n_A^H$	$n_B^H$	$n_C^H$	$n_A^V$	$n_B^V$	$n_C^V$
	جرم	x		x							
بار افقی	تعادل افقی					x		x			
	تعادل عمودی					x	x	x			
	تسلیم A	x				x					
	کمانش B			x	x		x				
	کمانش C		x					x			
بار عمودی	تعادل افقی								x		x
	تعادل عمودی								x	x	x
	کمانش A		x						x		
	کمانش B			x	x					x	
	کمانش C		x								x

(b)

	متغیرهای مساحت‌های سطح مقطع	$n_A^H$	$n_B^H$	$n_C^H$	$n_A^V$	$n_B^V$	$n_C^V$
جرم	x						
قیدهای بار افقی	x	x					
قیدهای بار عمودی	x				x		

شکل ۱۰.۲.۳ نمودار جعبه ای مثال ۱۰.۲.۱

$$A_A = A_C = 2\pi r_A t_A \quad A_B = 2\pi r_B t_B$$

قیدهای تغییر مکان، تنش و کمانش اعمال می شوند. تغییر مکان عمودی  $v$  باید کمتر از 0.001  $l$  باشد. تنش در هر عضو باید کمتر از  $\sigma_0 = 0.002E$  باشد که در آن  $E$  ضریب ارتجاعی، و  $\sigma_0$  تنش تسلیم در کشش و فشار است و داریم  $\sigma_0 = 10^3 p/l^2$ . افزون بر این، اعضا نباید کمانش کنند. این محدودیت یعنی تنش در هر عضو باید کمتر از تنش کمانش پوسته ای  $0.605Et/r$  باشد که در آن  $r$  شعاع عضو و  $t$  ضخامت

## بخش ۱۰.۲: تجزیه ۵۱۹

است و همچنین تنش باید کمتر از تنش کماتش اولیه  $\pi^2 E t^2 / 2L^2$  باشد که در آن  $L$  طول عضو است. خریا در مثال ۱۰.۲ برای یک نیروی کششی عمودی تحلیل شده است و به راحتی می توان علامت آن نیرو را عوض کرد و داریم

$$v = -\frac{8pl}{E(A_B + 0.25A_A)},$$

$$\sigma_A = p \left( \frac{\sqrt{3}}{3A_A} - \frac{2}{A_B + 0.25A_A} \right),$$

$$\sigma_B = -\frac{8p}{A_B + 0.25A_A},$$

$$\sigma_C = -p \left( \frac{\sqrt{3}}{3A_A} + \frac{2}{A_B + 0.25A_A} \right).$$

فرض می کنیم که تنش تسلیم در فشار و کشش یکی است، و عضو  $C$  همیشه بحرانی تر از عضو  $A$  خواهد بود، بنابراین مسأله طراحی به شکل زیر نوشته می شود:

$$m = \rho l(A_B + 4A_A)$$

$$1 + \frac{v}{0.001l} \geq 0, \quad 1 + \frac{\sigma_B}{\sigma_0} \geq 0, \quad \text{تابع را چنان مینیم کنید که}$$

$$\frac{0.605Et_B}{r_B\sigma_0} + \frac{\sigma_B}{\sigma_0} \geq 0, \quad \frac{\pi^2 E t_B^2}{2l^2\sigma_0} + \frac{\sigma_B}{\sigma_0} \geq 0,$$

$$1 + \frac{\sigma_C}{\sigma_0} \geq 0, \quad \frac{0.605Et_A}{r_A\sigma_0} + \frac{\sigma_C}{\sigma_0} \geq 0,$$

$$\frac{\pi^2 E t_A^2}{8l^2\sigma_0} + \frac{\sigma_C}{\sigma_0} \geq 0.$$

همچنان که دیده می شود مسأله به طور کامل جفت شده است زیرا هر قید به تمامی چهار متغیر طراحی وابسته است (توجه کنید که تنشهای اعضا به مساحت ها بستگی دارند و بنابراین به ضخامت ها و شعاعهای اعضا وابسته اند). با این همه، با تعویض متغیرهای طراحی، جداسازی اعضا و ساختن یک ساختار جعبه ای زاویه ای کار ساده ای است. مساحت های سطح مقطع را به عنوان متغیرهای جفت کننده ( $y$ ) انتخاب می کنیم، آن گاه شعاع یا ضخامت اعضا می توانند متغیرهای محلی یا سیستم فرعی باشند. در این مثال، تنها دو شعاع را به عنوان متغیرهای محلی استفاده می کنیم. آن گاه ضخامتها را می توان از شعاعها و مساحت های سطح مقطع به دست آورد. متغیرهای مساحت بی بعد را به شکل زیر تعریف می کنیم.

۵۴۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۰: بهینه سازی تجزیه ای و چند سطحی)

$$y_1 = A_A \sigma_0 / p, \quad \text{و} \quad y_2 = A_B \sigma_0 / p,$$

آن گاه جرم، تغییر مکان، و تنشها را می توان تنها بر حسب  $y_1$  و  $y_2$  نوشت. قیدهای کمانش نیز به شعاع نیاز دارند. شعاع بی بعد را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$x_1 = r_A / l, \quad x_2 = r_B / l,$$

می توانیم حدود تنش کمانش برای عضو  $B$  را به شکل زیر بنویسیم:

$$\frac{0.605 E t_B}{r_B} = \frac{0.605 E A_B}{2\pi r_B^2} = \frac{0.605 E}{2\pi} \frac{p}{\sigma_0 \sigma_0 l^2} \frac{y_2}{x_2^2} \sigma_0 = 4.814 \times 10^{-4} \frac{y_2}{x_2^2} \sigma_0.$$

و

$$\frac{\pi^2 E r_B^2}{2l^2} = \frac{\pi^2 E}{2 \sigma_0} \sigma_0 x_2^2 = 2467 \sigma_0 x_2^2.$$

با استفاده از عبارت مشابهی برای عضو  $C$ ، اکنون می توانیم مسأله طراحی را به شکل زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} m &= (\rho l p / \sigma_0) (4y_1 + y_2) \\ g_1(y) &= 1 - \frac{16}{y_2 + 0.25y_1} \geq 0, & \text{تابع} & \text{را چنان مینیمم کنید که (تغییر مکان)} \\ g_2(y) &= 1 - \frac{8}{y_2 + 0.25y_1} \geq 0, & & \text{(تنش در B)} \\ g_3(y) &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3y_1} - \frac{2}{y_2 + 0.25y_1} \geq 0, & & \text{(تنش در C)} \\ g_{11}(x_1, y) &= 4.814 \times 10^{-4} \frac{y_1}{x_1^2} - \frac{\sqrt{3}}{3y_1} - \frac{2}{y_2 + 0.25y_1} \geq 0, & & \text{(کمانش پوسته ای C)} \\ g_{12}(x_1, y) &= 616.9x_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{3y_1} - \frac{2}{y_2 + 0.25y_1} \geq 0, & & \text{(کمانش اوپلری C)} \\ g_{21}(x_2, y) &= 4.814 \times 10^{-4} \frac{y_2}{x_2^2} - \frac{8}{y_2 + 0.25y_1} \geq 0, & & \text{(کمانش پوسته ای B)} \\ g_{22}(x_2, y) &= 2467x_2^2 - \frac{8}{y_2 + 0.25y_1} \geq 0. & & \text{(کمانش اوپلری B)} \end{aligned}$$

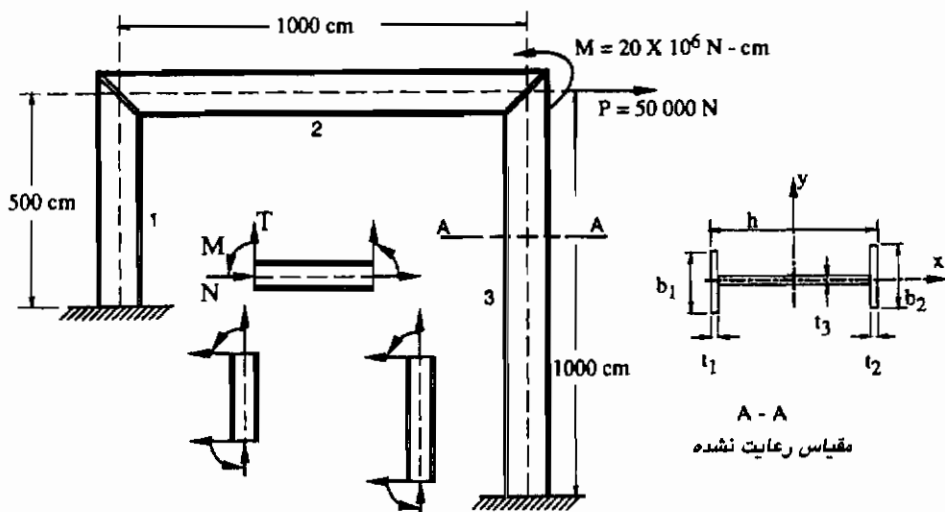
اکنون مسأله ساختار جعبه ای زاویه ای لازم را دارد. ...

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که سازه خرابا پیچیده تر باشد و از  $s$  عضو لوله ای تشکیل شده باشد که باید برای مینیمم شدن جرم طراحی شود در حالی که مقید به قیدهای تنش، تغییر مکان، و کمانش محلی

## بخش ۱۰.۲: تجزیه ۵۲۱

است. تنشها از یک مدل اجزای محدود محاسبه خواهند شد. برای بهینه سازی به مشتقات تنشها نسبت به متغیرهای طراحی نیاز داریم که محاسبه این مشتقات هزینه اصلی فرایند بهینه سازی است، به ویژه اگر این مشتقات از روش تفاضل محدود محاسبه شوند. اگر شعاع و ضخامتهای اعضا به عنوان متغیرهای طراحی به کار روند، آن گاه مسأله کاملاً جفت شده است که در آن تغییر در یکی از متغیرهای طراحی ممکن است تنشهای تمامی اعضا را تحت تأثیر قرار دهد. مشتقات تنشهای اعضا نسبت به ۲۵ متغیر طراحی باید محاسبه شود. از طرف دیگر، اگر از رهیافت تجزیه که در خریای سه میله ای به کار گرفته شد استفاده کنیم، مساحتهای سطح مقطع و شعاعها متغیرهای طراحی اند. مشتقات جزئی تنشها نسبت به شعاع اعضا با ثابت در نظر گرفتن مقادیر سطح مقطعیهای مربوط به دست می آید (این کار به سبب این که ضخامتها مشخص نشده اند امکان پذیر است). بنابراین مشتقات تنشها نسبت به شعاعها صفر است، و ما تنها به محاسبه  $S$  مشتق جزئی تنشها نسبت به مساحتها نیاز داریم.

از یک رهیافت مشابه می توان برای سازه های قاب شکل استفاده کرد. به عنوان مثال قاب سردری نشان داده شده در شکل ۱۰.۲.۴ توسط سویسکی<sup>۱</sup> و دیگران [۴] برای تشریح مفاهیم بهینه سازی چند سطحی ارائه شده است. هر سه تیر سطح مقطع I شکل دارند که با ۶ متغیر طراحی تعریف می شود. روی



شکل ۱۰.۲.۴ تجزیه قاب سردری



تنشها و تغییر مکانهای ایجاد شده در اثر بارهای نشان داده شده در شکل، قیدهای اعمال می شود. اگر متغیرهای طراحی جزئی (محلی) استفاده شود، قیدهای تنش و تغییر مکان کاملاً جفت شده اند که در آن همه آنها با هر یک از ۱۸ متغیر طراحی متأثر می شوند. اما اگر مساحت سطح مقطع  $A$  و گشتاور ماند  $I$  هر تیر را به عنوان متغیر طراحی انتخاب کنیم می توانیم از هر تیر ۲ متغیر طراحی محلی حذف کنیم. اکنون تمامی قیدها به مساحتها و گشتاورهای ماند بستگی دارند و چهار متغیر دیگر برای هر تیر تنها روی تنشهای همان تیر تأثیر می گذارند. به کار بردن رهیافت مشابهی برای قابهای صفحه ای با عضو امکان پذیر است که در آن صورت 28 متغیر طراحی جفت کننده (Y) و 5 سیستم فرعی خواهیم داشت.

در مسائل خرپا و قابی که ارائه شدند، با توجه به این که اثر یک عضو روی بقیه سازه می توانست بر حسب تعداد کمی از پارامترها (سطح مقطعها برای خرپا، سطح مقطعها و گشتاورهای ماند برای قاب صفحه ای) بیان شود، کار تجزیه انجام شد. این پارامترها «فراگیر» یا متغیرهای جفت کننده می شوند، و برای حذف همان تعداد متغیر محلی به کار می روند.

ثارجا و هفتکه<sup>۱</sup> [5] برای یک تابلو ساخته شده از مواد مرکب یک رهیافت مشابه به کار بردند که سختی غشای تابلو را به عنوان متغیرهای فراگیر در نظر گرفتند. با این همه، برای سازه های معمولی دیگر، انتخاب متغیرهای فراگیری که مسأله طراحی را تجزیه کند ممکن است آسان نباشد.

مشکل دیگر در رابطه با تجزیه حذف متغیرهای محلی و بیان آنها بر حسب متغیرهای فراگیر است. برای مسأله تابلو، و همچنین خرپاها و قابهای با شکل سطح مقطع پیچیده، پیدا کردن عبارت تحلیلی بیان متغیرهای محلی بر حسب متغیرهای معمولی ناممکن است. می شود متغیرهای محلی و فراگیر را نگه داشت و قیدهای تساوی که ارتباط بین متغیرهای محلی و فراگیر را بیان می کند به مسأله اضافه کرد. اما این رهیافت اغلب مسأله بهینه سازی را بدخیم تر می سازد و تعداد متغیرهای طراحی را افزایش می دهد (به عنوان مثال به مرجع [6] مراجعه کنید). در بسیاری از حالات حذف متغیرهای طراحی محلی و بیان آنها بر حسب متغیرهای فراگیر امکان پذیر است، حتی اگر عبارت تحلیلی برای این حذف وجود نداشته باشد.

به عنوان مثال، حالتی کلی خرپا و قاب را در نظر بگیرید که هر سیستم فرعی مجموعه ای از متغیرهای فراگیر دارد و برای حذف تعدادی از متغیرهای سیستم فرعی به کار می روند. برای سادگی بحث یک

1) Thareja and Haftka

بخش ۱۰.۲: تجزیه ۵۲۳

سیستم فرعی در نظر می گیریم و اندیس آن را حذف می کنیم. یعنی فرض می کنیم  $x$  بردار متغیرهای سیستم فرعی (مانند شعاع و ضخامت اعضای لوله ای شکل خرپا)، و  $y$  بخشی از بردار متغیر فراگیر مربوط به آن سیستم فرعی (مانند مساحت سطح مقطع اعضای خرپا) باشد. فرض می کنیم می توانیم یک زیر مجموعه از  $x$  را شناسایی کنیم که می تواند بر حسب  $y$  بیان شده و حذف شود و آن را با  $x_E$  نشان می دهیم، و بقیه متغیرهای محلی (که نگاه داشته می شوند) را با  $x_R$  نشان می دهیم. ارتباط بین  $y$ ،  $x_E$  و  $x_R$  به شکل زیر خواهد بود.

$$h(y, x_E, x_R) = 0. \quad (10.2.9)$$

این رابطه نمی تواند همیشه به شکل تحلیلی حل شود و برای  $x_E$  عبارتی بر حسب  $y$  و  $x_R$  بدهد، اما به شکل عددی (به عنوان مثال، روش نیوتن) می تواند حل شود. یافتن جواب عددی  $x_E$  معمولاً پرهزینه نیست زیرا معادله (۱۰.۲.۹) یک سیستم کوچک از معادلات جبری است. با این همه، انتخاب  $x_E$  چنان که سیستم دارای جواب باشد یعنی ژاکوبین  $\partial h / \partial x_E$  غیر منفرد باشد از اهمیت بالایی برخوردار است.

اگر  $x$  را با  $y$  و  $x_R$  جایگزین کنیم که این متغیرهای طراحی برای متغیرهای حذف شده عبارت تحلیلی نداشته باشند، مشکل اصلی ما محاسبه مشتقات تابع هدف و قیدها نسبت به مجموعه جدید متغیرهای طراحی است. به عنوان مثال یک تابع قید مانند زیر در نظر بگیرید.

$$g(x) = g(x_R, x_E) = \bar{g}(x_R, y). \quad (10.2.10)$$

می خواهیم مشتقات  $\bar{g}$  را بدون داشتن عبارت صریحی برای آن محاسبه کنیم. این کار به سادگی با دیفرانسیل گیری ضمنی امکان پذیر است. با دیفرانسیل گیری از معادله (۱۰.۲.۱۰) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_R} &= \frac{\partial g}{\partial x_R} + \frac{\partial g}{\partial x_E} \frac{\partial x_E}{\partial x_R}, \\ \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial x_E} \frac{\partial x_E}{\partial y}. \end{aligned} \quad (10.2.11)$$

به اختلاف بین  $\partial \bar{g} / \partial x_R$  و  $\partial g / \partial x_R$  توجه کنید. اولی مشتق قید با ثابت در نظر گرفتن  $x_E$  است، در حالی که دومی مشتق قید با ثابت بودن  $y$  است.

۵۴۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۰: بهینه سازی تجزیه ای و چند سطحی)

برای آن که بتوان از معادله (۱۰.۲.۱۱) مشتقها را ارزیابی کرد، نیاز به مشتقات  $\partial x_E / \partial x_R$  و  $\partial x_E / \partial y$  داریم. این دو با مشتق گیری از معادله (۱۰.۲.۹) به دست می آیند. داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x_E} \frac{\partial x_E}{\partial y} &= 0. \\ \frac{\partial h}{\partial x_R} + \frac{\partial h}{\partial x_E} \frac{\partial x_E}{\partial x_R} &= 0.\end{aligned}\quad (10.2.12)$$

که می توان از آن مشتقات را به شکل زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_E}{\partial y} &= - \left[ \frac{\partial h}{\partial x_E} \right]^{-1} \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial x_E}{\partial x_R} &= - \left[ \frac{\partial h}{\partial x_E} \right]^{-1} \frac{\partial h}{\partial x_R}.\end{aligned}\quad (10.2.13)$$

این فرایند در مثال زیر تشریح می شود.

### مثال ۱۰.۲.۳

این بار نیز قاب سردر شکل (۱۰.۲.۴) را در نظر بگیرید. متغیرهای فراگیر طبیعی مساحت های سطح مقطع و لنگرهای ماند هستند. اگر مساحت و لنگر ماند مقطع هر عضو را به ترتیب با  $A$  و  $I$  نشان دهیم و فرض کنیم ضخامت نسبت به سایر ابعاد بسیار کوچکتر است، از معادله (۱۰.۲.۹) داریم:

$$\begin{aligned}h_1 &= b_1 t_1 + b_2 t_2 + H t_3 - A = 0, \\ h_2 &= t_3 H^3 / 12 + (b_1 t_1 + b_2 t_2) H^2 / 4 - (b_1 t_1 - b_2 t_2)^2 H^2 / 4 A - I = 0.\end{aligned}\quad (a)$$

فرض می کنیم یک قید محلی داریم که (برای غیر منطقی نبودن هندسی) ایجاب می کند مساحت جان حداقل ۲۰ درصد سطح کل باشد، یعنی:

$$g = H t_3 - 0.2 A = 0.8 H t_3 - 0.2 (b_1 t_1 + b_2 t_2) \geq 0. \quad (b)$$

همچنین فرض می کنیم بتوان از مساحت و لنگر ماند برای حذف متغیرهای  $t_1$  و  $t_3$  استفاده شود. یعنی،

## بخش ۱۰.۲: تجزیه ۵۲۵

در این جا  $t_1$  و  $t_3$  مؤلفه های  $\mathbf{x}_E$  و  $b_1$ ،  $b_2$ ،  $t_2$  و  $H$  مؤلفه های  $\mathbf{x}_R$  محسوب می شوند. بعد از حذف دو متغیر محلی، قید را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\bar{g}(A, I, b_1, b_2, t_2, H) \geq 0.$$

می خواهیم این مطلب را گوشزد کنیم که لازم نیست برای ارزیابی  $\bar{g}$  و مشتق آن شکل صریح آن را داشته باشیم. برای ارزیابی  $\bar{g}$  برای مجموعه ای از شناسه هایش، ابتدا از معادلات  $(a)$ ،  $t_1$  و  $t_3$  را به دست می آوریم و آن گاه از  $(b)$ ،  $g$  را ارزیابی می کنیم و توجه داریم که:

$$\bar{g}(A, I, b_1, b_2, t_2, H) = g(b_1, t_1, b_2, t_2, H, t_3).$$

به عنوان مثال به مشتق  $\bar{g}$  نسبت به مساحت  $A$  توجه کنید.

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial A} = \frac{\partial g}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial A} + \frac{\partial g}{\partial t_3} \frac{\partial t_3}{\partial A} = 0.8H \frac{\partial t_3}{\partial A} - 0.2b_1 \frac{\partial t_1}{\partial A}.$$

$\partial t_1 / \partial A$  و  $\partial t_3 / \partial A$  را با مشتق گیری از معادله  $(a)$  نسبت به  $A$  به دست می آوریم

$$b_1 \frac{\partial t_1}{\partial A} + H \frac{\partial t_3}{\partial A} - 1 = 0, \quad (c)$$

$$\left( \frac{b_1 H^2 - 2(b_1 t_1 - b_2 t_2) H^2 / A}{4} \right) \frac{\partial t_1}{\partial A} + \frac{H^3}{12} \frac{\partial t_3}{\partial A} + \frac{(b_1 t_1 - b_2 t_2)^2 H^2}{4A^2} = 0.$$

به عنوان مثال یک طراحی نمونه با  $t_1 = t_2 = t_3 = t$  و  $b_1 = b_2 = H$  را در نظر بگیرید. برای این طراحی اولیه داریم  $A = 3Ht$ ،  $I = 7tH^3/12$  و  $g = 0.4Ht$ . در شروع کار از حل معادلات  $(c)$   $\partial t_1 / \partial A$  و  $\partial t_3 / \partial A$  را به دست می آوریم.

$$\frac{\partial t_1}{\partial A} = \frac{-1}{2H}, \quad \frac{\partial t_3}{\partial A} = \frac{3}{2H}$$

و آن گاه

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial A} = 1.3.$$

به عنوان یک آزمایش می توانیم مساحت را به اندازه 'کوچک  $\Delta A$  تغییر دهیم، بدون آن که شناسه های

## ۵۴۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۰: بهینه سازی تجزیه ای و چند سطحی)

دیگر  $\bar{q}$  را تغییر دهیم. این کار می تواند با تغییر  $t_1$  به  $\Delta A = -0.5 \Delta A / H$  و تغییر  $t_3$  به  $\Delta A = 1.5 \Delta A / H$  انجام شود. آن گاه می بینیم که لنگر ماند  $I$  تغییری نمی کند (با مرتبه اول  $\Delta A$ )، و  $g$  تقریباً به میزان  $1.3 \Delta A$  تغییر می کند. ...

هنگامی که حذف متغیرهای محلی با استفاده از متغیرهای فراگیر مشکل است، ممکن است بخواهیم از هر دو نوع متغیر استفاده کنیم. همچنان که پیش تر گفته شد، استفاده از قیدهای مساوی برای ایجاد سازگاری بین متغیرهای محلی و فراگیر ممکن است به شرایط بدخیمی بینجامد. به جای این کار اسمیت<sup>۱</sup> و همکارانش (به عنوان مثال در مرجع [7]) از تابع هدف مسائل سطح پایین تر برای ایجاد سازگاری استفاده کرده اند. آن تابع هدف چنان ساخته شد که معیاری از اختلاف بین متغیرهای سطح پایین و سطح بالا باشد. این رهیافت (مانند استفاده از قیود تساوی)، مسأله سازگاری بین متغیرهای سطح پایین و سطح بالا را از مرحله رابطه سازی یا تجزیه به مرحله حل انتقال می دهد. حل یک مسأله تجزیه شده در بخشهای بعدی بحث می شود.

### ۱۰.۳ جهت دهی و بهینه سازی چند سطحی

هنگامی که یک مسأله تبدیل شده یک شکل جمعه ای زاویه ای داشته باشد، می بینیم که صرفه جویی قابل توجهی در هزینه محاسبات مشتقات حساسیت به وجود آمده است. با این وجود، اگر از روش بهینه سازی خاصی که برای مسأله مورد نظر تدوین شده استفاده گردد، ممکن است صرفه جویی بیشتری نیز حاصل شود.

یک رهیافت طبیعی برای مسأله استفاده از یک روش بهینه سازی تودرتو<sup>۲</sup> یا دو سطحی است که در آن بهینه سازی متغیر سیستم  $x$ ، داخل یک بهینه سازی سطح بالایی متغیر فراگیر،  $y$  است. در بعضی از موارد دو سطح بهینه سازی می تواند بدون جهت دهی باشد، به این صورت که فرایند بهینه سازی بین بهینه سازی سطح بالا و پایین رفت و برگشت نماید. اگر تغییرات متغیرهای فراگیر قیدهای محلی را به میزان کمی متأثر کند، این فرایند می تواند به سرعت همگرا شود (ولی نه لزوماً به بهین). به عنوان مثال، کیرش<sup>۳</sup> یک روش بهینه سازی سه سطحی برای سازه های بتن مسلح ارائه کرد که بر اساس رهیافت چرخه ای قرار داشت.

1) Schmit

2) Nested

3) Kirsch

## بخش ۱۰.۳: جهت دهی و بهینه سازی چند سطحی ۵۲۷

با این وجود، در بسیاری از موارد، فرایند بهینه سازی در دو سطح باید جهت دهی شود. برای مسائل خطی دانتزیگ و ولف<sup>۱</sup> [9] و [10] و روزن<sup>۲</sup> [11] و [12] برای مسأله شکل جعبه ای زاویه ای، معادله (۵.۲.۱۰)، الگوریتمهای دو سطحی تدوین کردند. برای مسائل غیر خطی یک رهیافت دیگر به نام روش جهت دهی مدل به کار می رود. در این جا شکلی از آن را که بر اساس مشتقات بهین های سیستم فرعی نسبت به متغیرهای سطح بالاست شرح می دهیم. مسأله جعبه ای زاویه ای معادله (۵.۲.۱۰) را در نظر بگیرید. آن را با مسأله دو سطحی زیر جایگزین می کنیم.

$$\begin{aligned} f_0(y) + \sum_{i=1}^s f_i^*(y) & \quad \text{عبارت} \\ g_0(y) \geq 0, & \quad \text{را چنان مینیمم کنید که} \\ f_i^*(y) = \min_{x_i} f_i(x_i, y) & \quad \text{که در آن} \\ g_i(x_i, y) \geq 0. & \quad \text{آن چنان که} \end{aligned}$$

این مسأله می تواند در دو مرحله حل شود. ابتدا یک مقدار حدسی برای  $y$  در نظر گرفته می شود، و هر یک از زیر سطح ها برای  $x_i$  خودش بهینه می شود. آن گاه، حساسیت بهینه های هر یک از زیر سطح ها نسبت به تغییرات  $y$  محاسبه می شود (آن چنان که در بخش ۵.۴ شرح آن داده شد). در نهایت، در یک یا چند چرخه از این حساسیتها برای تغییر جفت ها یا متغیرهای سطح بالای  $(y)$  استفاده می شود.

یکی از مشکلات مربوط به چنین رهیافت دو سطحی این است که برای بعضی از مقادیر  $y$  ممکن است جواب قابل قبولی برای بعضی از مسائل سطح پایین وجود نداشته باشد. برای مسائل برنامه ریزی خطی، الگوریتم روزن [12] با یافتن یک جواب قابل قبول شروع می شود. برای مسائل غیر خطی، اطمینان از این که برای یک مقدار مشخص از بردار  $y$  تمامی مسائل فرعی جواب قابل قبولی دارند به سختی حاصل می شود، هر چند با افزودن قیودی به مسأله سطح بالا این امکان وجود دارد که از غیر قابل قبول شدن مسأله سطح پایین جلوگیری شود (به مرجع کیرش [13] مراجعه کنید). افزون بر این، استفاده از حساسیتهای سیستمهای فرعی به متغیرهای سطح بالا یک اشکال اساسی دارد: این حساسیتها ممکن است پیوسته نباشند (به مرجع بارنلمی و سویسکی [14] مراجعه کنید). این مطلب در مثال بعدی تشریح می شود.

1) Dantzig and Wolfe

2) Rosen

۵۲۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۰: بهینه سازی تجزیه ای و چند سطحی)

### مثال ۱۰.۳.۱

دوباره خرپای سه میله ای مثال ۱۰.۲.۱ را در نظر بگیرید. همان طور که در آن مثال نشان داده شده، مسأله یک شکل جعبه ای زاویه ای دارد که مساحتها و لنگرهای مانند متغیرهای طراحی فراگیر، و نیروی اعضا متغیرهای محلی اند. بهینه سازی سطح بالاتر در یک رهیافت دو سطحی برای این مسأله می تواند به شکل زیر رابطه سازی شود.

$$\begin{aligned} m &= \rho l(4A_A + A_B) && \text{عبارت} \\ p_c^H - p &\geq 0, && \text{را چنان مینیمم کنید که} \\ p_c^V - p &\geq 0, \end{aligned}$$

که در آن  $p_c^H$  و  $p_c^V$  به ترتیب مقادیر فرو ریختگی  $p$  برای حالت های بار افقی و عمودی است. این مقادیر فرو ریختگی از حل مسائل بهینه سازی زیر سطحی به دست آمده اند. برای بار افقی، مسأله زیر را حل می کنیم:

$$\begin{aligned} p_c^H & \text{مقدار} \\ 0.866(n_A^H - n_C^H) &= p_c^H, && \text{را چنان ماکزیمم کنید که} \\ n_B^H + 0.5(n_A^H + n_C^H) &= 0, \\ n_A^H \leq \sigma_T A_A, \quad -n_B^H \leq \frac{\pi^2 EI_B}{l^2}, \quad -n_C^H \leq \frac{\pi^2 EI_A}{4l^2}. \end{aligned}$$

به شکل مشابهی برای بار عمودی مسأله زیر را حل می کنیم:

$$\begin{aligned} p_c^V & \text{مقدار} \\ 0.866(n_A^V - n_C^V) &= 0, && \text{را چنان ماکزیمم کنید که} \\ n_B^V + 0.5(n_A^V + n_C^V) &= -8p_c^V, \\ -n_A^V \leq \frac{\pi^2 EI_A}{4l^2}, \quad -n_B^V \leq \frac{\pi^2 EI_B}{l^2}, \quad -n_C^V \leq \frac{\pi^2 EI_A}{4l^2}. \end{aligned}$$

برای بهینه سازی مسأله سطح بالا، به مشتقات دو بار فرو ریختگی نسبت به مساحت های سطح مقطع و لنگر های مانند نیاز داریم. تنها مشتقات بار فرو ریختگی افقی  $p_c^H$  را مورد توجه قرار می دهیم. مسأله بسیار ساده است، جواب بار فرو ریختگی می تواند بایک بررسی به دست آید. اگر  $I_B$  به اندازه کافی بزرگ باشد، که در آن صورت  $B$  بحرانی نیست، آن گاه زمانی فرو ریختگی به وجود می آید که اعضای  $A$  و  $C$  به ماکزیمم بار خود (تسلیم یا کماتش) برسند، و از معادله تعادل افقی داریم:

بخش ۱۰.۴: رهیافتهای تابع جریمه و پوش ۵۴۹

$$p_c^H = 0.866 \left( \sigma_T A_A + \frac{\pi^2 E I_A}{4l^2} \right).$$

آن گاه از معادله 'تعادل عمودی می توانیم ببینیم که در این بار عضو  $B$  زیر بار شکست خود قرار دارد اگر

$$I_B > I_{B0} = \frac{\sigma_T A_A l^2}{2\pi^2 E} - \frac{I_A}{8}.$$

از طرف دیگر، اگر  $I_B < I_{B0}$  باشد. آن گاه اعضای  $C$  و  $B$  ابتدا به ماکزیمم خود می رسند. و با استفاده از دو معادله 'تعادل داریم

$$p_c^H = \frac{0.866\pi^2 E}{l^2} (2I_B + 0.5I_A).$$

به راحتی می توان دید هنگامی که  $I_B = I_{B0}$  است دو عبارت بار فرو ریختگی نتیجه های یکسانی می دهند، آن چنان که  $p_c^H$  یک تابع پیوسته از  $I_B$  است. از طرف دیگر مشتق  $p_c^H$  نسبت به  $I_B$  پیوسته نیست. هنگامی که  $I_B < I_{B0}$  است، این مشتق صفر است، زیرا وقتی عضو  $B$  بحرانی نیست، بار فرو ریختگی از خواص عضو  $B$  مستقل است. برای  $I_B > I_{B0}$  داریم

$$\frac{\partial p_c^H}{\partial I_B} = \frac{1.732\pi^2}{l^2}.$$

این ناپیوستگی در مشتقها در بیشتر الگوریتمهای بهینه سازی می تواند مشکل ساز باشد، به ویژه اگر طراحی بهین در نزدیکی  $I_B = I_{B0}$  باشد. ...

#### ۱۰.۴ رهیافتهای تابع جریمه و پوش

یکی از راههای دوری جستن از مشکلات رهیافت دو سطحی که در بالا بحث شد، استفاده از روش تابع جریمه خارجی یا جریمه 'داخلی' تعمیم یافته (به بخش ۵.۷ مراجعه کنید) برای تابع هدف در سطحهای پایین تر است. رهیافت تابع جریمه به ما این امکان را می دهد که سطح بالاترهای (متغیرهای  $y$ ) را قبول کنیم که جوابهای قابل قبول سطح پایین تر (متغیرهای  $x$ ) ندارند. در واقع، جریمه 'مربوط به نقض قید در سطوح پایین تر سبب می شود تا متغیرهای سطح بالاتر از ناحیه هایی که جوابهای قابل قبول سطح پایین تر ندارند استخراج شوند. همچنین، تابع جریمه تعمیم یافته، ناپیوستگی های مربوط به مشتقات بهینه های



۵۳۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۰: بهینه سازی تجزیه ای و چند سطحی)

سطح پایتیر را هموار می کنند، به ویژه زمانی که بهینه سازی سطح پایین تر با مقادیر فرین پارامترهای جریمه انجام نشده باشد. در نهایت، استفاده از تابع جریمه مشکلی که هنگام عدم دخالت متغیرهای سطح پایین تر در تابع هدف به وجود می آید را حل می کند.

مسئله جعبه ای زوایه ای تشریح شده با معادله (۱۰.۲.۵) را در نظر بگیرید. با استفاده از یک رهیافت تابع جریمه در واقع مسئله مقید را با مسئله زیر جایگزین می کنیم.

$$\Phi(y, x, r) = f_0(y) + p_v[g_0(y), r] + \sum_{i=1}^s (f_i(x_i, y) + p_v[g_i(x_i, y), r]), \quad (10.4.1)$$

که در آن  $p_v$  جریمه مربوط به بردار قیود است. به عنوان مثال، اگر  $g$  یک بردار قید با  $m$  مؤلفه باشد، ما اغلب از یک تابع جریمه تجمعی استفاده می کنیم.

$$p_v(g, r) = \sum_{j=1}^m p(g_j, r), \quad (10.4.2)$$

که در آن  $p$  تابع جریمه ای مانند تابع جریمه داخلی تعمیم یافته است (به بخش ۵.۷ مراجعه کنید)

$$p(g_j, r) = \begin{cases} 1/g_j & \text{for } g_j \geq g_0 \\ 1/g_0[3 - 3(g_j/g_0) + (g_j/g_0)^2] & \text{for } g_j < g_0 \end{cases} \quad (10.4.3)$$

پارامتر انتقال  $g_0$  به شکل زیر به  $r$  بستگی دارد،

$$g_0 = g_{00} r^{1/2}, \quad (10.4.4)$$

که در آن  $g_{00}$  یک عدد ثابت است. مسئله ای که با معادله (۱۰.۴.۱) بیان شد، برای یک رشته از مقادیر  $r$  به شکلی که  $r \rightarrow 0$  میل کند حل می شود. یک شکل چند سطحی از این رابطه سازی عبارت است از:

$$f_0(y) + p_v[g_0(y, r)] + \sum_{i=1}^s \phi_i(y, r) \quad \text{مقدار عبارت} \quad (10.4.5)$$

$$\phi_i(y, r) = \min_{x_i, r_i} \{f_i(x_i, y) + p_v[g_i(x_i, y), r_i]\} \quad \text{را مینیمم کنید در حالی که}$$

رشته مقادیر پارامترهای جریمه سیستمهای فرعی  $r_i$  با پارامتر جریمه فراگیر  $r$  به سمت صفر میل می کنند. روش تغییر پارامترهای جریمه سیستمهای فرعی الگوریتمهای چند سطحی خاصی را تعریف می کنند.

## بخش ۱۰.۴: رهیافتهای تابع جریمه و پوز ۵۳۱

یک رهیافت جالب این است که هر بهینه سازی سطوح فرعی برای یک متغیر  $r$  انجام شود؛ یادآور می شود که لزومی ندارد قبل از این که متغیرهای سطح بالاتر به مقادیر نهایی شان نزدیک شوند یک بهین سطح پایین دقیق به دست آید. آن مقدار تکین پارامتر جریمه برای هر سیستم فرعی می تواند با پیشرفت فرایند بهینه سازی به تدریج به طرف صفر کاهش یابد. مرجع [15] نشان می دهد زمانی که تمامی سیستمهای فرعی پارامتر جریمه یکسانی استفاده کنند، بهینه سازی چند سطحی کاملاً معادل رهیافت یک سطحی است.

این موضوع بدین معنی است که در راه بهین نهایی، تعدادی طراحی میانی یکسانی به دست می آید و محاسبات می تواند آن چنان انجام شود که یکسان باشد. فرایند می تواند به عنوان یک بهینه سازی دو سطحی انگاشته شود، یا یک بهینه سازی یک سطحی که در آن از شکل جعبه ای زاویه ای برای کاهش محاسبات و عملیات موازی استفاده شده است.

دقت کنید حتی زمانی که فنون دیگری برای حل مسأله بهینه سازی چند سطحی استفاده شود روش معمول این است که از حلهای تقریبی یا نیمه همگرا برای بهینه سازی های زیر سطحها استفاده شود.

## مثال ۱۰.۴.۱

رابطه سازی طراحی ارتجاعی خربای سه میله ای مثال ۲.۲.۱۰ را در نظر بگیرید. برای این مثال ساده، راحت تر این است که از یک تابع جریمه برداری  $p_v$  که مساوی با جریمه مربوط به بحرانی ترین قید است، استفاده گردد.

$$p_v(\mathbf{g}, r) = p[\min(g_i), r].$$

در حالت کلی این رهیافت جریمه ممکن است زمانی که بحرانی ترین قید تغییر ماهیت می دهد مشکل ناپیوستگی به بار آورد؛ گرچه در مسأله ما این اتفاق نمی افتد. بنابراین رابطه سازی تابع جریمه به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \phi &= m(\mathbf{y}) + p_v[g_1(\mathbf{y}), g_2(\mathbf{y}), g_3(\mathbf{y}), r] + \phi_1(\mathbf{y}, r) + \phi_2(\mathbf{y}, r) \quad \text{تابع} \\ \phi_1(\mathbf{y}, r) &= \min_{x_1} p_v[g_{11}(x_1, \mathbf{y}), g_{12}(x_1, \mathbf{y}), r], \quad \text{را مینیمم کنید که در آن} \\ \phi_2(\mathbf{y}, r) &= \min_{x_2} p_v[g_{21}(x_2, \mathbf{y}), g_{22}(x_2, \mathbf{y}), r], \end{aligned} \quad (10.4.6)$$

و توابع جرم و قید در مثال ۲.۲.۱۰ داده شده است. توجه کنید که متغیرهای محلی  $x_1$  و  $x_2$  در جرم

### ۵۳۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۰: بهینه سازی تجزیه ای و چند سطحی)

دخالتی ندارند، بنابراین رابطه سازی معادله (۱۰.۳.۱) تابع هدفی در سطح پایین تر ندارد، و مسائل سطح پایین تر تنها لازم است که یک جواب قابل قبول بیابند.

با این رابطه سازی تابع جریمه، توابع هدف سطح پایین تر  $\phi_1$  و  $\phi_2$  هر یک با دو قید سروکار دارند. از آن جا که جریمه بر اساس بحرانی ترین قید قرار دارد، بهین سطح پایین تر هنگامی اتفاق می افتد که هر دو قید به یک اندازه بحرانی باشند. برای اولین سیستم فرعی داریم  $g_{11} = g_{12}$  و به موجب آن خواهیم داشت:

$$x_1 = 0.02972y_1^{1/4}.$$

برای سیستم فرعی دوم، داریم  $g_{21} = g_{22}$  یا:

$$x_2 = 0.02102y_2^{1/4}.$$

با این روابط اکنون می توانیم مسأله سطح بالاتر را به عنوان یک مسأله بهینه سازی تک سطحی حل کنیم. ....

به جای تابع جریمه، می شود از یک تابع پوش استفاده کرد که یک بردار از قیود را با یک قید پوش ترکیب جایگزین می کند. سویسکی و همکارانش برای رابطه سازی های چند سطحی از قیدهای پوش کرسل میر- استینهوسر<sup>۱</sup> (KS) (به فصل ۵ مراجعه کنید) به طور وسیعی استفاده کرده اند (به عنوان مثال به مرجع سویسکی و دیگران [16] مراجعه کنید). قید پوش KS بردار قید  $g$  را با  $KS(g)$  جایگزین می کند در حالی که

$$KS(g) = -g_{min} - (1/\rho) \log \left[ \sum_i \exp[\rho(g_{min} - g_i)] \right],$$

که در آن  $g_i$  مؤلفه های  $g$ ،  $\rho$  ضریبی است که نقشی مانند پارامتر جریمه را بازی می کند و  $g_{min}$  بحرانی ترین قید است. به آسانی می توان نشان داد که:

$$g_{min} \geq KS(g) \geq g_{min} - (1/\rho) \log(m), \quad (10.4.7)$$

1) Kresselmeier- Steinhöuser

بخش ۱۰.۵: مسایل چند سطحی درخت باریک ۵۳۳

که در آن  $m$  تعداد قیدها (مؤلفه های  $g$ ) است. با افزایش  $p$ ،  $K^*S(g)$  به مقدار  $g_{min}$  میل می کند. از منفی  $K^*S$  می توان به جای  $p_v$  در رابطه سازی جریمه استفاده کرد.

## ۱۰.۵ مسائل چند سطحی درخت باریک

در حالی که در بسیاری از موارد، هدف تجزیه تولید یک مسأله با چند زیر سطح است (شکل ۱۰.۱.۱۵)، موارد بسیار دیگری وجود دارد که ما با یک ساختار درخت باریک با تعداد اندکی زیر سطح مواجهیم (شکل ۱۰.۱.۱۶). در بعضی از موارد بهتر است از بهینه سازی چند سطحی برای حل استفاده کرد. با این وجود، در حالت های دیگر تبدیل مسأله چند سطحی به یک تک سطحی ممکن است بهتر باشد.

### ۱۰.۵.۱ تحلیل و طراحی همزمان

در زمینه تحلیل و طراحی همزمان سازه ها، اهمیت تبدیل یک مسأله بهینه سازی دو سطحی به یک مسأله تک سطحی به شکل ویژه ای نمایان می شود. رهیافت تحلیل و طراحی همزمان (SAND) رهیافت تودرتوی معمول در بهینه سازی سازه ها را دگرگون می سازد. در رهیافت تودرتو، سازه برای یک طراحی آزمایشی تحلیل می شود، آن گاه حساسیت پاسخ نسبت به اندازه های سازه محاسبه می شود، و سپس اندازه ها بر اساس این حساسیتها بهبود می یابند و طراحی آزمایشی جدید به دست می آید. تحلیل سازه ای در داخل روش بهینه سازی گنجانده می شود، و برای یک رشته از طراحیهای آزمایشی چندین بار تکرار می شود. رهیافت SAND تحلیل و طراحی را به عنوان یک مسأله انجام می دهد. این کار با افزودن متغیرهای پاسخ به سایر اندازه های سازه به عنوان مجهول انجام می شود که با همه آنها به یک شیوه برخورد می شود.

دو سطحی بودن رهیافت تودرتوی معمولی در مسائلی که تحلیل سازه می تواند به عنوان یک مسأله بهینه سازی رابطه سازی شود بدیهی است. به عنوان مثال، طراحی حد سازه ها را می توان به عنوان مینیم سازی وزن که مشروط به قید بارهای فرو ریختگی است رابطه سازی کرد. این بارهای فرو ریختگی جواب مسأله ماکزیمم سازی است. در مثال ۱۰.۳.۱ یک شکل دو سطحی از یک مسأله طراحی حد را دیدیم که در مثال ۱۰.۲.۱ به عنوان یک مسأله تک سطحی رابطه سازی شده بود. در رابطه سازی تک سطحی

۵۳۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۰: بهینه سازی تجزیه ای و چند سطحی)

مساحت‌های سطح مقطع (اندازه های سازه) و نیروهای اعضا (پاسخهای سازه) به عنوان متغیرهای طراحی بودند. در حالت طراحی حد، رابطه سازی تک سطحی، که رهیافت تحلیل و طراحی همزمان (SAND) است، روشی است که در کار مهندسی می توان آن را انتخاب کرد. اما در محدوده 'ارتجاعی رهیافت تودرتوی معمول است. مسأله' طراحی کمترین وزن مشروط به قیدهای تغییر مکان و تنش در محدوده' ارتجاعی را می توان به شکل زیر رابطه سازی کرد:

$$(10.5.1) \quad \begin{array}{ll} \text{تابع} & W(x) \\ \text{مشروط به} & g_j(u, x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ \text{را} & \text{مینیم کنید} \end{array}$$

که در آن میدان تغییر مکان  $u$  را می توان از جواب مینیم سازی انرژی پتانسیل  $U$  که بر حسب ماتریس سختی  $K$  و بردار بار  $f$  بیان می شود بدست آورد.

$$U = (1/2)u^T K(x)u - u^T f. \quad (10.5.2)$$

رهیافت معمول این است که مسأله را به عنوان یک مسأله بهینه سازی دو سطحی حل کرد زیرا حل مسأله مینیم سازی انرژی به سادگی از حل معادلات تعادل  $Ku = f(x)$  به دست می آید.

در سال ۱۹۶۰ رهیافت SAND در استفاده از معادلات تعادل به عنوان قیدهای تساوی و در نظر گرفتن اندازه های سازه و تغییر مکانها به عنوان متغیرهای طراحی با استفاده از فن گردایان مزدوج (CG) بهینه سازی توسط فاکس و اشمیت<sup>۱</sup> [17] به کار گرفته شد. با این همه، روش CG نمی تواند به شکل مؤثری با قیدهای تساوی معادلات تعادل برخورد کند زیرا ماتریس سختی که توسط مدل اجزای محدود ساخته می شود، معمولاً بدخیم است. فنون حذفی گوسی وقتی در مورد معادلات بدخیم به کار روند دقت خود را از دست می دهند؛ ولی این مسأله را می توان با بالا بردن تعداد اعشار در محاسبات رایانه جبران کرد (بیشتر محاسبات اجزای محدود با دقت مضاعف انجام می شود). اثر بدخیمی در روشهای تکراری مانند CG کاهش سرعت همگرایی است.

پیشرفتهای اخیر در روشهای بهینه سازی مانند ارائه روشهای CG پیش شرط دار، کارایی رهیافت SAND را بهبود می بخشند و آن را برای مسائل سه بعدی که به ماتریسهای سختی از نظر پهنای نوار قطری

1) Fox and Schmit

## بخش ۱۰.۵: مسائل چند سطحی درخت باریک ۵۳۵

ضعیف می‌انجامد قابل رقابت می‌سازد. در نتیجه، رهیافت SAND مورد اقبال بیشتری قرار گرفته است (به مراجع هفته<sup>۱</sup> [18]، شموی و اشمیت<sup>۲</sup> [19]، رینگرتز<sup>۳</sup> [20]، و هفتکه و کامات<sup>۴</sup> [21] مراجعه کنید). در مجموع، روش SAND نیاز به تحلیل مجدد همزمان سازه را در ازای حل یک مسأله بهینه سازی بزرگتر (با در نظر گرفتن تغییر مکانها به عنوان متغیرهای طراحی) مرتفع می‌سازد. بنابراین، بهتر است که از SAND در مسائلی استفاده شود که تعداد متغیرهای طراحی سازه زیاد باشد و اضافه کردن متغیرهای طراحی تغییر مکان اثر کمی روی تعداد کل متغیرهای طراحی داشته باشد.

هنگامی که حالت‌های بارگذاری زیاد باشد از روش SAND استفاده نمی‌شود زیرا در آن حالت تعداد متغیرهای طراحی تغییر مکان بسیار زیاد می‌شود. با این وجود، چیبانی<sup>۵</sup> [22]، در این حالت نیز با استفاده از یک رهیافت دو سطحی و برنامه ریزی هندسی برای کاهش بار محاسباتی رایانه، SAND را به کار گرفت. این روش در بهینه سازی ساختار نیز بسیار سودمند است، زیرا رهیافت تودرتوی معمول در هنگام حذف قسمتهایی از سازه که ممکن است ماتریس سختی سازه را منفرد سازد، مشکل پیدا می‌کند (به مرجع بندسو<sup>۶</sup> و دیگران [23] مراجعه نمایید).

تبدیل یک مسأله دو سطحی به تک سطحی همیشه امکان پذیر نیست. به عنوان مثال مسأله ماکزیمم سازی پایین ترین بسامد  $\omega_1$  یک سازه که نباید وزن آن  $W$  از یک حد  $W_u$  تجاوز کند را در نظر بگیرید. رابطه سازی دو سطحی مسأله به شکل زیر است:

$$(۱۰.۵.۳) \quad \begin{array}{ll} \text{تابع} & \omega_1(x) \\ \text{را مشروط به} & W_u - W(x) \geq 0, \end{array} \quad \text{ماکزیمم کنید}$$

که در آن  $\omega_1$  حل مینیمم سازی سطح پایین تر نسبت ریلی

$$\omega_1^2 = \min_u \frac{u^T K u}{u^T M u}, \quad (۱۰.۵.۴)$$

است و  $M$  ماتریس جرم و  $u$  بردار ویژه مربوط به  $\omega_1$  است. جایگزین کردن این مسأله دو سطحی با مسأله تک سطحی

$$(۱۰.۵.۵) \quad \begin{array}{ll} x \text{ و } u \text{ را برای ماکزیمم سازی} & \omega_1^2 = \frac{u^T K u}{u^T M u} \\ \text{مشروط به} & W_u - W(x) \geq 0, \end{array} \quad \text{بیابید.}$$

### ۵۳۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۰: بهینه سازی تجزیه ای و چند سطحی)

ناممکن است، زیرا در رابطه سازی بالا، بهینه سازی بردار ویژه مربوط به بالاترین بسامد را انتخاب خواهد کرد و نه پایین ترین بسامد. هر چند با استفاده از شرایط کان تاکر مسئله می توان مسئله ماکزیمم سازی بسامد را به یک رهیافت تک سطحی SAND تبدیل کرد [24]، اما فرایند از رهیافت تودرتوی معادلات (۱۰.۵.۳) و (۱۰.۵.۴) بسیار پیچیده تر و از نظر هزینه های محاسباتی بالاتر است.

#### ۱۰.۵.۲ کاربردهای دیگر

یکی از کاربردهای معمول رهیافت چند سطحی در مسائل به شکل درخت باریک عبارت است از ترکیب بهینه سازی اندازه و هندسی. معمولاً متغیرهای طراحی هندسی به عنوان متغیرهای سطح بالاتر انتخاب می شوند و متغیرهای اندازه ای به عنوان متغیرهای سطح پایین تر. انگیزه کاربرد این رهیافت این است که طبیعت این دو دسته از متغیرها متفاوت است و اگر با آنها به عنوان یک دسته منفرد از متغیرهای طراحی برخورد شود، ممکن است مشکلات عددی به وجود آید. کاربردهای معمول در مسائل طراحی خرابها (به عنوان مثال مراجع [25-28] و قابها (به عنوان مثال مراجع [29-31]) بوده است.

#### ۱۰.۶ تجزیه در محاسبات پاسخ و حساسیت

سیستمهایی که از نظر مسائل بهینه سازی طراحی ساختار جعبه ای زاویه ای دارند، معمولاً در مسئله تحلیل ساختار مشابهی دارند. یعنی، اگر پاسخ زیر سیستمها را با  $u_i, i = 1, \dots, s$  نشان دهیم، اغلب می توانیم یک مجموعه از متغیرهای پاسخ فراگیر  $w$  پیدا کنیم که محاسبات پاسخ (یعنی تحلیل) را از زیر سیستمها جدا سازد. یعنی معادلات حاکم بر پاسخ سیستم را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} r_0(u_1, \dots, u_s, w) &= 0, \\ r_i(u_i, w) &= 0, \quad i = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (10.6.1)$$

از مزایای این ساختار جعبه ای زاویه ای می توانیم در روش حل استفاده کنیم. به عنوان مثال، استفاده از روش نیوتن در حل مسئله را در نظر بگیرید. با فرض یک حدس اولیه برای جواب، یک تصحیح برای آن حدس را از بسط سری تیلور مرتبه اول محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} r_0 + r_{0,1}\Delta u_1 + \dots + r_{0,s}\Delta u_s + r_{0,0}\Delta w &= 0, \\ r_i + r_{i,i}\Delta u_i + r_{i,0}\Delta w &= 0, \quad i = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (10.6.2)$$

## بخش ۱۰.۶: تجزیه در محاسبات پاسخ و حساسیت ۵۳۷

که در آن  $i$  با یک کاما قبل از آن نشان دهنده 'مشتق نسبت به  $u_i$  و صفر با یک کاما قبل از آن نشان دهنده 'مشتق نسبت به  $w$  است. به عنوان مثال،  $r_{0,i}$  نشانگر ماتریسی است که سطر زام آن مشتقهای مؤلفه های زام  $r_0$  نسبت به مؤلفه های  $u_i$  است. تمامی کمیتها در حدس اولیه ارزیابی می شوند. بازنگری معادله (۱۰.۶.۲)، نشان می دهد که می توانیم ابتدا  $\Delta u_i$  را بر حسب  $\Delta w$  بیان کنیم

$$\Delta u_i = -r_{i,i}^{-1}(r_i + r_{i,0}\Delta w), \quad (10.6.3)$$

و سپس آن را در معادله (۱۰.۶.۲) جایگزین کنیم. داریم:

$$\left(r_{0,0} - \sum_{i=1}^s r_{i,i}^{-1} r_{i,0}\right) \Delta w = -r_0 + \sum_{i=1}^s r_{i,i}^{-1} r_i. \quad (10.6.4)$$

یعنی، مسأله می تواند به حل دستگاه معادلات (۱۰.۶.۴) از مرتبه  $w$  بینجامد و آن گاه پاسخهای زیر سیستمهای،  $u_i$ ، در صورتی که نیاز باشد، می تواند از معادله (۱۰.۶.۳) محاسبه گردد. روش مشابهی را می توان برای محاسبه حساسیتهای پاسخ نسبت به متغیرهای طراحی به کاربرد. اکنون فرض کنید که سیستم به یک متغیر طراحی دیگر  $x$  نیز وابسته باشد. یعنی داریم:

$$\begin{aligned} r_0(u_1, \dots, u_s, w, x) &= 0, \\ r_i(u_i, w, x) &= 0, \quad i = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (10.6.5)$$

با مشتق گیری از سیستم نسبت به  $x$  داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_0}{\partial x} + r_{0,1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \dots + r_{0,s} \frac{\partial u_s}{\partial x} + r_{0,0} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\ r_i + r_{i,i} \frac{\partial u_i}{\partial x} + r_{i,0} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \quad i = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (10.6.6)$$

اکنون می توانیم  $\partial u_i / \partial x$  را بر حسب  $\partial w / \partial x$  بیان کنیم و مسأله را به یک دستگاه با مرتبه ای مانند مرتبه  $w$  تبدیل کنیم.

مثال نمونه 'رهیافت فوق سازه های زیر مجموعه اند. در رابطه سازی اجزای محدود بر اساس تغییر مکانها،  $w$  بردار درجه آزادی مرزها و  $u_i$  بردار درجه آزادی داخل 'امین سازه' زیر مجموعه است. مثال مهم دیگر در زمینه 'طراحی چند منظوره ای است. هر سیستم فرعی ممکن است یک تحلیل خاص متفاوت از سیستم باشد.  $u_i$  ها پاسخهای زمینه 'خاصی هستند که اثری روی تحلیل زمینه های دیگر ندارند در



## ۵۳۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۰: بهینه سازی تجزیه ای و چند سطحی)

حالی که شامل کلیه کمیت‌های پاسخ می شوند که بیش از یک زمینه خاص را متأثر می کنند. در این حالت، مؤلفه های  $w$  می تواند نشانگر یک زمینه یا زمینه های دیگر باشد، بنابراین بهتر است  $w$  را به زیر بردارهای  $w_i, i = 1, \dots, s$  تقسیم کنیم که در آن  $w_i$  شامل متغیرهای پاسخ  $i$  امین زمینه ای باشد که محاسبات پاسخ یک چند زمینه را متأثر می سازد.

سویسکی [32] روش زیر را برای محاسبه حساسیت سیستم ها چند منظوره ای نسبت به متغیرهای طراحی ارائه کرد و آن را معادله حساسیت فراگیر (GSE) نامید. در تشریح روش GSE فرض می کنیم محاسبات پاسخ در هر زمینه با چند جعبه تحلیل یا نرم افزار (یا جعبه سیاه) یا حتی ابزار تجربی انجام می شود که می تواند به شکل زیر بیان شود:

$$w_i = r_i(w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_s, x), \quad u_i = t_i(w_1, \dots, w_s, x). \quad (10.6.7)$$

یعنی،  $r_i$  روشی است برای محاسبه  $w_i$  که پاسخ زمینه های دیگر را می دهد و  $x$  بردار متغیرهای طراحی است. به طور مشابه  $t_i$  روشی است برای محاسبه پاسخ  $u_i$ . معادله (10.6.7) یک دستگاه معادلات جفت شده غیر خطی بر حسب  $w_i, i = 1, \dots, s$  را نشان می دهد. این دستگاه را می توان به عنوان مثال از روش نیوتن حل نمود، بنابراین با تخمین اولیه  $w_i$  برای  $w_i$  ها می توان تصحیح  $\Delta w_i$  را با حل معادله زیر بدست آورد.

$$J \Delta w = \Delta r, \quad (10.6.8)$$

که در آن

$$J = \begin{bmatrix} I & -r_{1,2} & \dots & \dots & -r_{1,s} \\ -r_{2,1} & I & \dots & \dots & -r_{2,s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -r_{s,1} & -r_{s,2} & \dots & \dots & I \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_s \end{bmatrix}, \quad \Delta r = \begin{bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \vdots \\ \Delta r_s \end{bmatrix}, \quad (10.6.9)$$

و در آن

$$\Delta r_i = w_i^0 - r_i(w_1^0, \dots, w_{i-1}^0, w_{i+1}^0, \dots, w_s^0, x). \quad (10.6.10)$$

بخش ۱۰.۶: تجزیه در محاسبات پاسخ و حساسیت ۵۳۹

بعد از همگرایی به جواب  $w$  می توان از معادله (۷. ۶. ۱۰)،  $u_i$  را به دست آورد. محاسبه حساسیتها نسبت به یک پارامتر طراحی نیز می تواند به شکل مشابهی انجام شود. با دیفرانسیل گیری از معادله (۷. ۶. ۱۰) نسبت به یک مؤلفه  $x$  داریم:

$$J \frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad (11. 6. 10)$$

ساختار خاص ژاکوبین  $J$  به ما این امکان را می دهد که با حذف یکی از  $w_i$  ها مرتبه دستگاه معادلات را کاهش دهیم. این کار در مثال زیر تشریح می شود.

رهیافت GSE به مشتقات پاسخهای هر زمینه نسبت به ورودی زمینه های دیگر نیاز دارد. هزینه این محاسبات هنگامی که سطح تداخل بین زمینه ها بزرگ باشد بسیار زیاد است. در مقایسه هزینه های رهیافت GSE و هزینه های محاسبات تفاضل محدود مشتقها، پارامتر کلیدی تعداد متغیرهای طراحی است. اگر تعداد متغیرهای طراحی زیاد باشد، روش GSE کاراتر است و در صورتی که تعداد متغیرهای طراحی کم باشد، تفاضل محدود کم هزینه تر است. برای بحث بیشتر در مورد هزینه و همچنین تشخیص حالتی که در آنها ماتریس GSE ممکن است منفرد شود، خوانندگان می توانند به مرجع [32] مراجعه کنند.

همچنان که قبلاً یادآوری شد، شکل اصلی استفاده از فنون چند سطحی یافتن راهی برای تجزیه مسأله است به شکلی که ساختار سلسله مراتبی لازم را داشته باشد. تجزیه موفق، مسأله را به اجزایی می شکند که سطح تداخل باریکی دارند. در تحلیل چند زمینه ای و حساسیت ما به دنبال یافتن راههایی برای باریک کردن سطح تداخل بین زمینه هاییم. در مثال زیر که تحلیل آئرو دینامیکی یک بال و محاسبه حساسیتهاست، استفاده از یک روش کاهشی برای رسیدن به این هدف تشریح می شود.

#### مثال ۱۰.۶.۱

تحلیل آئرو الاستیکی یک بال هواپیما را در نظر بگیرید. میدان جریان اطراف بال بر اساس شکل بال محاسبه شده است. آن گاه از سرعتهای جریان فشارها و بارها محاسبه شده اند و با استفاده از آنها تغییر مکانهای سازه ای محاسبه می شوند که به نوبه خود روی شکل بال نیز تأثیر می گذارند. حل این مسأله جفت شده اغلب به شکل چرخه ای انجام می شود، با یک میدان جریان در اطراف بال صلب شروع کرده و بارها و تغییر مکانهای مربوط به این میدان جریان محاسبه می شود و سپس بر اساس این تغییر مکانها،

۵۴۰ سیانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۰: بهینه سازی تجزیه ای و چند سطحی)

شکل بار روز آمد می شود و این چرخه تکرار می شود. چنین رهیافتی، که چرخه ای نقطه ثابت نامیده می شود، در صورتی که محاسبات ژاکوبین پر هزینه باشد نسبت به روش نیوتن مزیت دارد. با این وجود، اگر به حساسیت پاسخ آتروالاستیک نیاز داشته باشیم، ممکن است روش نیوتن از روش چرخه ای نقطه ثابت بهتر باشد. این که از روش نیوتن استفاده بشود یا نشود به عرض سطح تداخل بستگی دارد. برای تمرکز روی سؤال سطح تداخل ما بدون توجه به متغیرهای طراحی شروع به حل تعامل آتروالاستیکی می کنیم.

فرض می کنیم که یک «جعبه سیاه» آترو دینامیکی داریم که با دادن شکل بال که با بردار شکل  $s$  نشان داده می شود میدان جریان مثلاً بردار سرعت،  $v$ ، را محاسبه می کند.

$$v = b_a(s), \quad (a)$$

که در آن  $b_a$  نشانگر کاربرد جعبه سیاه آترو دینامیکی است. آن گاه فرض می کنیم یک جعبه سیاه نیرو داریم که سرعتهای جریان را به نیروهای آترو دینامیکی  $f_a$  تبدیل می کند که می تواند در تحلیل سازه استفاده شود.

$$f_a = b_f(v). \quad (b)$$

جعبه سیاه بعدی بسته تحلیل سازه ای است که نیروهای آترو دینامیکی را با نیروهای مانند ترکیب کرده و بردار تغییر مکان  $u$  را محاسبه می کند.

$$u = b_s(f_a). \quad (c)$$

و در نهایت فرض می کنیم یک جعبه سیاه میان یابی داریم که شکل بال را بر اساس میدان تغییر شکل روزآمد می کند.

$$s = b_I(u). \quad (d)$$

در نگاه اول، سیستمی که با معادلات (a) تا (d) تشریح شد، کاملاً جفت شده به نظر می رسد. حل این دستگاه به روش نیوتن غیر عملی به نظر می رسد زیرا ابعاد ژاکوبین بسیار بزرگ است. بردار میدان جریان

بخش ۱۰.۶: تجزیه در محاسبات پاسخ و حساسیت ۵۲۱

$v$  و بردار تغییر مکان  $u$  معمولاً هزاران و یا دهها هزار مؤلفه دارند. اما بردارهای  $f_a$  و  $s$  می توانند تعداد کمی مؤلفه داشته باشند، و می توانیم ابعاد مسأله را با ترکیب دو جعبه سیاه اول و دو جعبه سیاه آخر بسیار کوچک کنیم. اولین ترکیب به ما نیروهای آترو دینامیکی را بر حسب شکل بال می دهد.

$$f_a = r_1(s) = b_f[b_s(s)], \quad (e)$$

و ترکیب دوم به ما شکل بال را به عنوان تابعی از نیروهای آترو دینامیکی می دهد.

$$s = r_2(f_a) = b_f[b_s(f_a)]. \quad (f)$$

به این نکته توجه داریم که متغیر  $f_a$  و  $s$  نقش  $w_1$  و  $w_2$  را در معادله (۷. ۶. ۱۰) بازی می کنند، در حالی که  $v$  و  $u$  نقش  $u_1$  و  $u_2$  را بازی می کنند.

در رهیافت بالا که تنها از  $f_a$  و  $s$  به عنوان متغیرهای تعامل استفاده می شود به کاهش قابل توجهی در تعداد مشتقاتی که باید محاسبه گردد می انجامد. با این همه، تعداد مؤلفه های  $f_a$  و  $s$  اغلب چندین دوجین می شود و محاسبه ژاکوبین هنوز می توان بسیار پر هزینه باشد. با استفاده از فن کاهشی در بیان تغییر مکانها در تشریح تعامل آتروالاستیکی کاهش بیشتر تعداد مشتقات لازم امکان پذیر است. فرض می شود بردارهای تغییر مکان را بتوان با ترکیب خطی شکلهای مود (اغلب مودهای ارتعاشی) بیان کرد.

$$u = Uq, \quad (g)$$

در حالی که  $U$  ماتریس مودها و  $q$  بردار دامنه 'مودهاست. مرتبه 'بردار  $q$  معمولاً به مراتب کوچکتر از  $u$  و حتی  $f_a$  است. افزون بر این، برای تحلیل سازه ای کاهشی اکنون دیگر نیازی به  $f_a$  نداریم و به جای آن به بردار بار تعمیم یافته  $f_a^*$  که به شکل زیر است نیازمندیم (به معادله (۷. ۴. ۳۰) مراجعه کنید).

$$f_a^* = U^T f_a. \quad (h)$$

اکنون جعبه سیاه تحلیل سازه ای (مودال) کاهشی را می توان به شکل مجازی زیر نشان داد:

$$q = b_s^*(f_a^*). \quad (i)$$

اگر سلسله مراتب چهار جعبه سیاه را کمی تغییر دهیم تا  $f_a^*$  و  $q$  را متغیرهای تعامل بسازیم کارآیی سیستم

## ۵۲۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۰: بهینه سازی تجزیه ای و چند سطحی)

بسیار بالا می رود. یعنی نیروهای آئرو دینامیکی تعمیم یافته بر حسب دامنه های مدال به شکل زیر بیان شوند:

$$\mathbf{f}_a^* = \mathbf{r}_1^*(q) = \mathbf{U}^T \mathbf{b}_f \{ \mathbf{b}_a [\mathbf{b}_f(\mathbf{U}q)] \}, \quad (j)$$

و  $\mathbf{r}_2^*$  نیز برابر  $\mathbf{b}_s^*$  خواهد بود.

برای چرخه نیوتن، معادله (۸. ۶. ۱۰)، نیاز به محاسبه  $\partial \mathbf{r}_1^* / \partial q$  و  $\mathbf{J}_{12} = \partial \mathbf{r}_2^* / \partial \mathbf{f}_a^*$  داریم. این ها مشتقات دوسویی اند یعنی مشتقات نیروهای آئرو دینامیکی نسبت به تغییرات شکل در اثر تغییر مکانهای سازه ای، و مشتقات تغییرات شکل در اثر تغییر مکانهای سازه ای نسبت به نیروهای آئرو دینامیکی.  $\mathbf{J}_{21}$  و  $\mathbf{J}_{12}$  ماتریسند و بهتر است که آنها را با  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{S}$  نشان دهیم. درایه های  $\mathbf{a}_{ij}$  ماتریس  $\mathbf{A}$  مشتقات  $i$ امین درایه های  $\mathbf{f}_a^*$ ، نسبت به  $j$ امین درایه  $q$ ،  $\mathbf{f}_{ai}^*$ ، نسبت می باشد. به طور مشابه، درایه های  $\mathbf{s}_{ij}$  ماتریس  $\mathbf{S}$  مشتقات  $j$ امین نسبت به  $\mathbf{f}_{ai}^*$  است. این مشتقات اغلب به کمک تفاضل محدود محاسبه می شوند به عنوان مثال، اگر در  $q_j$  اختلالی ایجاد کنیم و از معادله (j) مجدداً  $\mathbf{f}_a^*$  را محاسبه کنیم، می توانیم  $j$ امین ستون ماتریس  $\mathbf{A}$  را برابر با اختلاف  $\mathbf{f}_a^*$  تقسیم بر اختلال در  $q_j$  حدس بزنیم. اکنون معادله (۸. ۶. ۱۰) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{f}_a^* \\ \Delta q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1^* \\ \Delta \mathbf{r}_2^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a^{*0} - \mathbf{r}_1^*(q^0) \\ \mathbf{q}^0 - \mathbf{r}_2^*(\mathbf{f}_a^{*0}) \end{Bmatrix}. \quad (k)$$

به دلیل ساختار ویژه معادله (k) می توانیم  $\Delta q$  یا  $\Delta \mathbf{f}_a^*$  را حذف کنیم. به عنوان مثال اگر  $\Delta \mathbf{f}_a^*$  درایه های بیشتری از  $\Delta q$  دارد، شاید بهتر این باشد که، با استفاده از اولین سطر معادله (k)،  $\Delta \mathbf{f}_a^*$  را حذف کنیم.

$$\Delta \mathbf{f}_a^* = \mathbf{A} \Delta q + \Delta \mathbf{r}_1^*, \quad (l)$$

و با جایگزین کردن آن در سطر دوم داریم:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{S}\mathbf{A}) \Delta q = \Delta \mathbf{r}_2^* + \mathbf{S} \Delta \mathbf{r}_1^*. \quad (m)$$

حل تعامل آئروالاستیک به روش نیوتن عبارت خواهد بود از حل معادله (m) برای به دست آوردن  $\Delta q$ ، و محاسبه  $\Delta \mathbf{f}_a^*$  از معادله (l)، و آن گاه روز آمد کردن  $q$  و  $\mathbf{f}_a^*$  محاسبه  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{S}$  جدید برای تکرار چرخه.

## بخش ۱۰.۷: تمرینها ۵۴۳

محاسبه حساسیت نسبت به پارامتر طراحی  $x$  تقریباً شبیه محاسبه قبلی است. معادله (۱۰.۶.۱۱) به شکل زیر در می آید:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_a^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2^*}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (n)$$

از آنجا که فن کاهشی تعامل آتروالاستیک را تقریب می زند، لازم نیست که در محاسبات هر زمینه خاصی تقریب به کار ببریم. بعد از یافتن  $\mathbf{q}$  و  $\mathbf{f}_a^*$  از تحلیل جفت شده، لازم نیست که برای محاسبه تغییر مکانها از معادله (g) استفاده کنیم. از آن طرف، می توانیم نیروهای آترو دینامیکی واقعی  $\mathbf{f}_a$  مربوط به تغییر مکانهای  $\mathbf{Uq}$  را محاسبه کنیم، و آن گاه تغییر مکانها را از تحلیل کامل سازه، معادله (c)، محاسبه می کنیم. ...

## ۱۰.۷ تمرینها

۱. خربای سه میله ای شکل ۱۰.۲.۲ را در نظر بگیرید. مساحتهای سطح مقطع و لنگرهای مانند سه عضو داده شده است. می خواهیم هندسه خربا را چنان بهینه کنیم که وزن آن مینیمم گردد، مشروط به این که سازه در اثر هیچ حالت بارگذاری (تسلیم و کمانش اولری را در نظر بگیرید) فرو نریزد. مسأله را به شکل جعبه ای زاویه ای رابطه سازی کنید.

۲. قاب دروازه ای شکل ۱۰.۲.۴ را در نظر بگیرید. طراحی کمترین وزن قاب را با در نظر گرفتن قیدهای تنش در حد تغییر مکان افقی ۱۰ سانتی متر رابطه سازی کنید. متغیرهای طراحی ابعاد سطح مقطع هر یک از سه تیر است. برای تبدیل مسأله به یک شکل جعبه ای زاویه ای متغیرهای طراحی فراگیر تعریف کنید.

۳. مشتقات  $g$  را نسبت به پنج شناسه دیگرش در مثال ۱۰.۲.۳ محاسبه کنید.

۴. جواب مثال ۱۰.۴.۱ را به دست آورید.

۵. مثال ۱۰.۴.۱ را با استفاده از تابع KS حل کنید.

۶. مسأله طراحی ارتجاعی خربای سه میله ای (مثال ۱۰.۲.۲) را به عنوان یک تحلیل همزمان و

مسأله طراحی رابطه سازی کنید.

- [1] Giles, G.L. "Procedure for Automating Aircraft Wing Structural Design," J. of the Structural Division, ASCE, 97 (ST1), pp. 99-113, 1971.
- [2] Sobieszczanski, J. and Loendorf, D., "A Mixed Optimization Method for Automated Design of Fuselage Structures", J. of Aircraft, 9 (12), pp. 805-811, 1972.
- [3] Barthelemy, J.-F., M., "Engineering Design Applications of Multilevel Optimization Methods," in Computer-Aided Optimum Design of Structures: Applications (eds. C.A. Brebbia and S. Hernandez), Springer-Verlag, pp. 113-122, 1989.
- [4] Sobieszczanski-Sobieski, J., James, B.B., and Dovi, A.R., "Structural Optimization by Multilevel Decomposition", AIAA J., 23, 11, pp. 1775-1782, 1985.
- [5] Thareja, R. R., and Haftka, R. T., "Efficient Single-Level Solution of Hierarchical Problems in Structural Optimization", AIAA J., 28, 3, pp. 506-514, 1990.
- [6] Thareja, R., and Haftka, R.T., "Numerical Difficulties Associated with using Equality Constraints to Achieve Multilevel Decomposition in Structural Optimization," AIAA Paper No. 86-0854CP, Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS 27th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, San Antonio, Texas, May 1986, pp. 21-28.
- [7] Schmit L.A., and Mehrinfar, M., "Multilevel Optimum Design of Structures with Fiber-Composite Stiffened Panel Components", AIAA J., 20, 1, pp. 138-147, 1982.
- [8] Kirsch, U., "Multilevel Optimal Design of Reinforced Concrete Structures", Engineering Optimization, 6, pp. 207-212, 1983.
- [9] Dantzig, G.B., and Wolfe, P., "The Decomposition Algorithm for Linear Program," Econometrica, 29, No. 4, pp. 767-778, 1961.
- [10] Dantzig, G.B., "A Decomposition Principle for Linear Programs," in Linear Programming and Extensions, Princeton Press, 1963.
- [11] Rosen, J.B., "Primal Partition Programming for Block Diagonal Matrices", Numerische Mathematik, 6, pp. 250-260, 1964.
- [12] Geoffrion, A.M., "Elements of Large-Scale Mathematical Programming", in Perspectives on Optimization (A.M. Geoffrion, editor) Addison Wesley, pp. 25-64, 1972.
- [13] Kirsch, U., "An Improved Multilevel Structural Synthesis Method", J. Structural Mechanics, 13 (2), pp. 123-144, 1985.
- [14] Barthelemy, J.-F.M., and Sobieszczanski-Sobieski, J., "Extrapolation of Optimum Designs based on Sensitivity Derivatives," AIAA J., 21, pp. 797-799, 1983.
- [15] Haftka, R.T., "An Improved Computational Approach for Multilevel Optimum Design", J. of Structural Mechanics, 12, 2, pp. 245-261, 1984.
- [16] Sobieszczanski-Sobieski, J., James, B. B., and Riley, M. F., "Structural Sizing by Generalized, Multilevel Optimization", AIAA J., 25, 1, pp. 139-145, 1987.



- [17] Fox, R. L., and Schmit, L. A., "Advances in the Integrated Approach to Structural Synthesis", J. of Spacecraft and Rockets, 3 (6), pp.858-866, 1966.
- [18] Haftka, R.T., "Simultaneous Analysis and Design", AIAA J., 23, 7, pp. 1099-1103, 1985.
- [19] Smaoui, H., and Schmit, L.A., "An Integrated Approach to the Synthesis of Geometrically Non-linear Structures," International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26, pp. 555-570, 1988.
- [20] Ringertz, U.T., "Optimization of Structures with Nonlinear Response," Engineering Optimization, 14, pp. 179-188, 1989.
- [21] Haftka, R. T., and Kamat, M. P., "Simultaneous Nonlinear Structural Analysis and Design", Computational Mechanics, 4, 6, pp. 409-416, 1989.
- [22] Chibani, L., Optimum Design of Structures. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [23] Bendsoe, M.P., Ben-Tal, A., and Haftka, R.T., "New Displacement-Based Methods for Optimal Truss Topology Design," AIAA Paper 91-1215, Proceedings, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 32nd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Baltimore, MD, April 8-10, 1991, Part 1, pp. 684-696.
- [24] Shin, Y., Haftka, R. T., and Plaut, R. H., "Simultaneous Analysis and Design for Eigenvalue Maximization", AIAA J., 26, 6, pp. 738-744, 1988.
- [25] Pedersen, P., "On the Minimum Mass Layout of Trusses", AGARD Conference Proceedings, No. 36 on Symposium on Structural Optimization, Turkey, October, 1969, pp. 11.1-11.17, 1970.
- [26] Vanderplaats, G.N., and Moses, F., "Automated Design of Trusses for Optimum Geometry", J. of the Structural Division, ASCE, 98, ST3, pp. 671-690, 1972.
- [27] Spillers, W.R., "Iterative Design for Optimal Geometry", J. of the Structural Division, ASCE, 101, ST7, pp.1435-1442, 1975.
- [28] Kirsch, U., "Synthesis of Structural Geometry using Approximation Concepts", Computers and Structures, 15, 3, pp. 305-314, 1982.
- [29] Ginsburg, S., and Kirsch, U., "Design of Protective Structures against Blast", J. of the Structural Division, ASCE, 109 (6), pp. 1490-1506, 1983.
- [30] Kirsch, U., "Multilevel Synthesis of Standard Building Structures," Engineering Optimization, 7, pp. 105-120, 1984.
- [31] Kirsch, U., "A Bounding Procedure for Synthesis of Prestressed Systems," Computers and Structures, 20 (5), pp. 885-895, 1985.
- [32] Sobieszczanski-Sobieski, J., "Sensitivity of Complex, Internally Coupled Systems," AIAA Journal, 28 (1), pp. 153-160, 1990.





## طراحی بهینه سازه‌های ساخته شده از مواد مرکب چندلایه ۱۱

مواد مرکب لایه ای تقویت شده با الیاف به سبب دارا بودن خواص مکانیکی بسیار خوب، در مقایسه با مواد ساده، کاربرد وسیعی در طراحی سازه‌ها دارند، به ویژه در طراحی سازه‌های سبکی که در عین حال سختی و مقاومت بالای مورد نظر را نیز دارا باشند. از طرفی، طراحی با مواد مرکب برای طراحان یک چالش جدی به حساب می‌آید، زیرا پارامترهای بسیاری وجود دارد که قابل تغییرند و همچنین وجود مودهای شکست چندگانه و پیچیدگی رفتار در چنین سازه‌هایی فنون تحلیل ویژه ای را طلب می‌کند. یافتن یک طراحی کارا برای سازه ای از جنس مواد مرکب که نیازهای کاربرد خاصی را برآورده سازد، نه تنها با تعیین اندازه مساحت‌های سطح مقطع و ضخامت اعضا که با تعیین خواص مصالح در اعضا و کل سازه همراه خواهد بود که از طریق انتخاب جهت، تعداد و ترتیب چیدمان لایه‌های مواد مرکب، تأمین خواهد شد. افزایش تعداد متغیرهای طراحی برای طراح از طرفی سودمند و از طرفی باعث دردسر است. از این جهت سودمند است که طراح می‌تواند سازه خود را برای تأمین شرایط مورد نظر به خوبی طراحی کند ولی این سودمندی خود در گرو این است که طراح بداند این متغیرهای طراحی را چگونه انتخاب کند. امکان به دست آوردن یک طراحی کارا که در مقابل مکانیزم‌های شکست چندگانه ایمن باشد با این دشواری گره خورده که باید مقدار یک مجموعه بزرگ از متغیرهای طراحی انتخاب گردد و همین حقیقت بهینه سازی سازه‌ها را برای طراحی سازه‌های مواد مرکب یک ابزار سودمند می‌سازد.

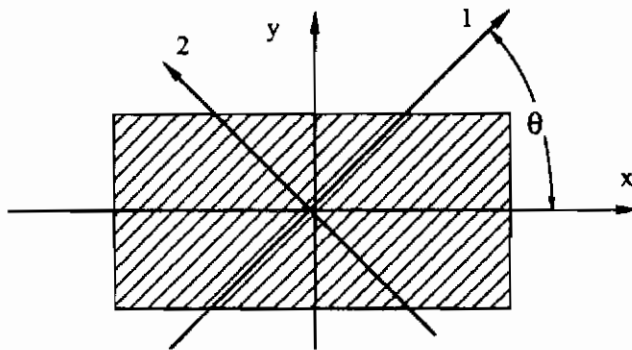
به سبب نیاز به داشتن ابزار تحلیل خاص در بیشتر کاربردهای واقعی، طراحی مواد مرکب به میزان زیادی به چگونگی ترکیب آن تحلیل‌گرها با جعبه سیاه بهینه ساز مربوط می‌شود. درک بهتر دشواریهای مربوط به بهینه سازی مواد مرکب، با مثالهای ساده حاصل می‌شود. در این فصل روی مثالهایی تأکید

۵۲۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

می کنیم که مفاهیم اساسی را بیان می کنند.

### ۱۱.۱ پاسخ مکانیکی يك لایه

هر چند مواد مرکب لایه ای برای بسیاری از کاربردهای سازه که به نسبت سختی به وزن و مقاومت به وزن بالایی نیاز دارند، یک جایگزین مناسب است، اما تحلیل و طراحی این نوع مواد به مراتب پیچیده تر از سازه های فلزی است. یکی از دشواریهای رابطه سازی تحلیل مواد مرکب لایه ای به سبب ناهمسانگردی آنهاست. زیرا برای به دست آوردن ویژگیهای پاسخ مکانیکی (رابطه تنش کرنش) مواد مرکب لایه ای به تعداد زیادی ثابت ماده نیاز است. قانون عمومی هوك برای یک ماده ناهمسانگرد ۲۱ ضریب سختی مستقل دارد و دقیقاً همین ویژگی مواد مرکب است که آنها را برای یک طراحی بهین و ویژگیهای منحصر به فرد مناسب می سازد. برای یک سازه کلی که تنش در سه بعد وجود دارد، حل معادلات حاکم بسیار دشوار است. خوشبختانه بیشتر سازه های مواد مرکب سازه های صفحه ای اند که از لایه هایی از مواد که دارای سه صفحه تقارن عمود بر هم اند (اورتوتروپیک) تشکیل شده اند و بر حسب تعداد کمتری ثابت سختی رابطه سازی می شوند. در بخش بعدی، معادلات اساسی حاکم بر پاسخ مکانیکی یک لایه اورتوتروپیک به اجمال مطرح می شوند.



شکل ۱۱.۱.۱ یک تک لایه اورتوتروپیک با جهت های اصلی مواد زاویه دار

### ۱۱.۱.۱ لایه های اورتوتروپیک

برای یک ماده اورتوتروپیک که محورهای ارتوتروپیک ۱-۲ (جهت های اصلی ماده) در جهت محورهای

### بخش ۱۱.۱: پاسخ مکانیکی یک لایه ۵۴۹

مختصات  $x-y$  قرار گرفته است ( $\theta = 0$  در شکل ۱۱.۱.۱) رابطه تنش- کرنش در جهتهای اصلی ماده توسط معادلات زیر بیان می شود که ۹ ثابت مستقل دارد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (11.1.1)$$

افزون بر این، با فرض حالت تنش صفحه‌ای در هر یک از لایه‌ها در صفحه اصلی ماده 1-2 داریم:

$$\sigma_3 = 0, \quad \tau_{23} = 0, \quad \tau_{31} = 0, \quad (11.1.2)$$

که رابطه تنش- کرنش را به شکل ساده زیر تبدیل می کند [1].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (11.1.3)$$

که  $Q_{ij}$  ها سختیهای کاهش یافته نامیده می شوند که بر حسب چهار ثابت مصالح مهندسی مستقل در جهات اصلی مواد به شکل زیرند:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & (11.1.4) \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{66} &= G_{12}. \end{aligned}$$

از آن جا که لایه های اورتوتروپیک معمولاً نسبت به محورهای مختصات مرجع در حالت زاویه دار قرار می گیرند، روابط تنش- کرنش در جهات اصلی ماده خواص یکسان، معادله (۱۱.۱.۳)، باید به این محورها تبدیل شوند. این تبدیل رابطه زیر را به وجود می آورد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (11.1.5)$$

که تبدیل سختیهای کاهش یافته  $\bar{Q}_{ij}$  توسط تساویهای زیر به  $Q_{ij}$  ها مربوط می شوند.

۵۵۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta, \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta, \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta, \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).\end{aligned}\quad (11.1.6)$$

معادلات (۱۱.۱.۶) زیر بنای نظریه لایه بندی کلاسیک را تشکیل می دهند که بعداً مورد بحث قرار می گیرند. این معادلات را می توان بر حسب زاویه قرار گرفتن جهت های اصلی ماده (۱-۲) نسبت به محورهای مختصات سیستم  $x-y$  به شکل ساده تری نوشت. شای و پاگانو<sup>۱</sup> [۲] خواص مصالح زیر را که نسبت به جهت قرار گرفتن لایه ها نامتغیرند تعریف کردند.

$$\begin{aligned}U_1 &= \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}), \\ U_2 &= \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}), \\ U_3 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}), \\ U_4 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}), \\ U_5 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}).\end{aligned}\quad (11.1.7)$$

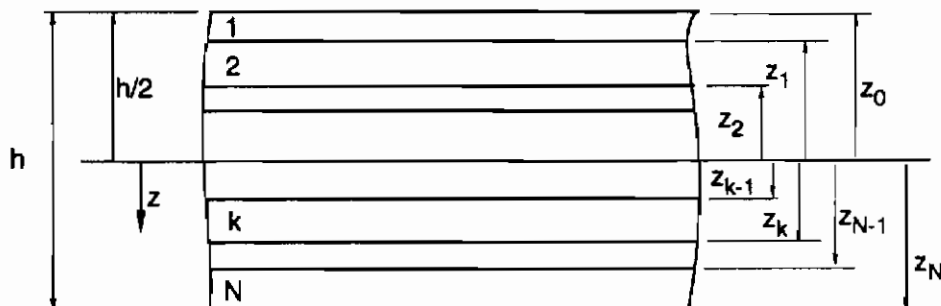
با استفاده از روابط مثلثاتی، سختیهای کاهش یافته تبدیل شده معادلات (۱۱.۱.۶) را می توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta, \\ \bar{Q}_{12} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta, \\ \bar{Q}_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta, \\ \bar{Q}_{16} &= -\frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta, \\ \bar{Q}_{26} &= -\frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta, \\ \bar{Q}_{66} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta.\end{aligned}\quad (11.1.8)$$

سختیهای کاهش یافته به شکل بالا از آنهایی که در معادلات (۱۱.۱.۶) بر حسب جهت های لایه ها نشان داده شدند ساده ترند و بنابراین، برای بهینه سازی سازه ها که به مشتقات این سختیها نسبت به

## بخش ۱۱.۱: پاسخ مکانیکی یک لایه ۵۵۱

متغیرهای جهت نیاز است مناسبتر می باشند.



شکل ۱۱.۲ قرارداد چیدمان لایه ها

## ۱۱.۱.۲ نظریه کلاسیک صفحه لایه ای

نظریه کلاسیک لایه ای (CLT) فرض می کند که  $N$  لایه ارتوتراپیک که در شکل ۱۱.۱.۲ نشان داده شده با لایه های بسیار نازک که تغییر شکل برشی نمی دهند به طور کامل به هم چسبیده اند. نظریه کریشوف<sup>۱</sup> صفحه که تغییر خطی در ضخامت را برای تغییر مکانهای در صفحه فرض می کند، در این جا استفاده می شود.

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (11.1.9)$$

در این نظریه، مؤلفه های کرنش در ضخامت صفرند، یعنی  $w = w_0$  و  $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ . بنابراین توزیع کرنش به صورت زیر است:

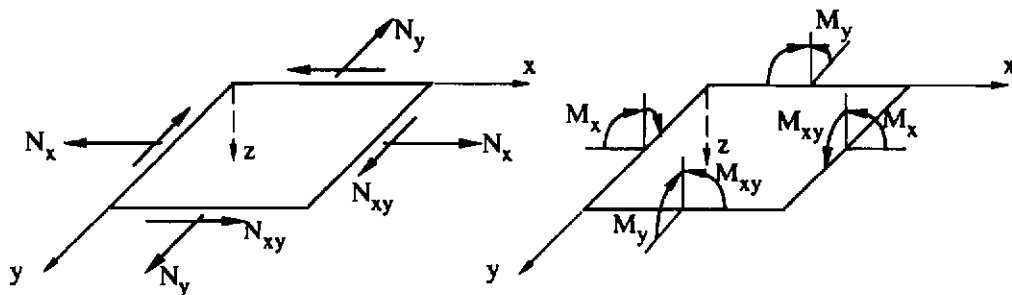
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (11.1.10)$$

که اندیس بالایی ۰ نشان دهنده 'کرنشهای صفحه میانی و انحناهای  $k$  صفحه میانی است. بنابراین، تنش در لایه  $k$ ام می تواند با جایگزینی معادله (۱۱.۱.۱۰) در رابطه تنش-کرنش (۱۱.۱.۵)، بر حسب سختیهای کاهش یافته آن لایه خاص بیان شود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left( \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right). \quad (11.1.11)$$

1) Kirchhoff

۵۵۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)



شکل ۱۱.۱.۳ تنش و گشتاور نتیجه شده در یک لایه

تنش های برآیند و گشتاورهای برآیند (زوج تنش) بر واحد طول سطح مقطع که در یک نقطه لایه اعمال می شود، شکل ۱۱.۱.۳، از انتگرال در امتداد ضخامت تنش در هر لایه به دست می آید.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad (11.1.12)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz. \quad (11.1.13)$$

با جایگزینی رابطه تنش - کرنش معادله (۱۱.۱.۱۱)، روابط حاکم لایه به شکل زیر به دست می آید:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (11.1.14)$$

و

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (11.1.15)$$

که

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}), \quad (11.1.16)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad (11.1.17)$$

بخش ۱۱.۱: پاسخ مکانیکی یک لایه ۵۵۳

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) . \quad (۱۱.۱.۱۸)$$

### ۱۱.۱.۳ همبستگی خمشی، کششی و برشی

A و D به ترتیب ماتریسهای سختی کششی و خمشی اند. ماتریس A تنش صفحه ای برآیند را به کرنش های صفحه میانی و ماتریس D گشتاورهای برآیند را به انحنا مربوط می سازند. از طرف دیگر، ماتریس B، تنش های صفحه ای برآیند را به انحناها و گشتاورهای برآیند را به کرنشهای صفحه میانی مربوط می کند، و بدین سبب ماتریس همبستگی خمشی- کششی نامیده می شود. این ماتریس همبسته در طراحی لایه ها در کاربردهای سازه ای خاصی ابزار مفیدی است. اگر تمایل به استفاده از این ماتریس نبود، با قرار دادن متقارن لایه ها با جهت های مختلف نسبت به صفحه میانی یک چند لایه، می توان از ماتریس B اجتناب کرد. با این همه، همچنان که کپرینو و کریولی - ویسکانتی<sup>۱</sup> [3] و گونینک<sup>۲</sup> [4] بیان کرده اند، تقارن یک شرط کافی برای اجتناب از پیوند است. توسط کندیل و ورچری<sup>۳</sup> [5] نشان داده شد که گروه خاصی از چند لایه ها، مانند چند لایه هایی که از دو زیر چند لایه متقارن دیگر تشکیل شده اند و تعداد تک لایه ها مساوی ولی جهت الیاف دلخواه  $\theta_1$  و  $\theta_2$  دارند و تعداد تک لایه ها حداقل هشت است  $[\theta_1/\theta_2/\theta_2/\theta_1/\theta_2/\theta_1/\theta_1/\theta_2]$ ، هیچ گونه پیوند خمشی- کششی ندارند. این موضوع از نظر بهینه سازی طراحی مهم است، زیرا چیدمان متقارن لایه ها ممکن است ترکیب مشخصی از سختیهای خمشی صفحه ای را محدود کند.

افزون بر همبستگی خمشی - کششی، درایه های مشخصی از ماتریس های A، B، و D به پاسخهای همبسته می انجامند. هنگامی که جملات  $A_{16}$  و  $A_{26}$  صفر نیستند، یک همبستگی برشی - کششی وجود خواهد داشت. وجود جملات  $D_{16}$  و  $D_{26}$  همبستگی خمشی - پیچشی ایجاد می کند و صفر نبودن جملات  $B_{16}$  و  $B_{26}$  باعث همبستگی خمشی - برشی و کششی - پیچشی می شود. باز هم با انتخاب مناسب لایه ها می توان این جملات پیوند را حذف کرد. به عنوان مثال، با استفاده از زاویه منفی لایه ها به ازای هر لایه ای بازایه مثبت زیاد در چند لایه، فرد می تواند همبستگی برشی - کششی را حذف کند. چنین لایه هایی را لایه های متوازن می گویند. در همین حال، جملاتی مشابه برای متناسب سازی پاسخ یک لایه در یک طراحی مشخص نیز به کار می رود مانند متناسب سازی آئروالاستیک<sup>۴</sup> (بخش ۲. ۴. ۱۱ را ببینید).

ماتریسهای A، B و D در متون علمی معمولاً به شکل تعریف شده در معادلات (۱۱.۱.۱۶) تا

1) Caprino and Crivelli- visconti

2) Gunnink

3) Kandil and Verchery

4) Aeroelastic



مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

(۱۱.۱.۱۸) با تعریف  $(Q_{ij})$  معادله (۱۱.۱.۶) به کار می روند. با این همه، در بعضی از روشهای طراحی، استفاده از سینوس یا کسینوس چند برابر زوایا (معادلات ۱۱.۱.۸ را ببینید) مفیدتر است به ویژه برای به دست آوردن حساسیت این ماتریسها نسبت به متغیرهای طراحی جهت های زوایه ها. به عنوان مثال با شروع از شکل انتگرالی معادلات (۱۱.۱.۱۶) تا (۱۱.۱.۱۸)

$$\{A_{11}, B_{11}, D_{11}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{11}\{1, z, z^2\} dz, \quad (11.1.19)$$

و فرض این که لایه ها از یک جنس باشند داریم:

$$\{A_{11}, B_{11}, D_{11}\} = U_1\{h, 0, \frac{h^3}{12}\} + U_2 \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta\{1, z, z^2\} dz + U_3 \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta\{1, z, z^2\} dz. \quad (11.1.20)$$

عبارات مشابهی را می توان برای سایر جملات سختی یافت که در جدول ۱۱.۱.۱ خلاصه شده اند که عبارت  $V$  ها به شکل زیر است.

جدول ۱۱.۱.۱ ماتریسهای  $A$ ،  $B$  و  $D$  بر حسب نامتغیرهای لایه ای

	$V_{0\{A,B,D\}}$	$V_{1\{A,B,D\}}$	$V_{2\{A,B,D\}}$	$V_{3\{A,B,D\}}$	$V_{4\{A,B,D\}}$
$\{A_{11}, B_{11}, D_{11}\}$	$U_1$	$U_2$	0	$U_3$	0
$\{A_{22}, B_{22}, D_{22}\}$	$U_1$	$-U_2$	0	$U_3$	0
$\{A_{12}, B_{12}, D_{12}\}$	$U_4$	0	0	$-U_3$	0
$\{A_{66}, B_{66}, D_{66}\}$	$U_5$	0	0	$-U_3$	0
$2\{A_{16}, B_{16}, D_{16}\}$	0	0	$-U_2$	0	$-2U_3$
$2\{A_{26}, B_{26}, D_{26}\}$	0	0	$-U_2$	0	$2U_3$

$$V_{0\{A,B,D\}} = \{h, 0, \frac{h^3}{12}\},$$

$$V_{1\{A,B,D\}} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta\{1, z, z^2\} dz,$$

$$V_{2\{A,B,D\}} = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 2\theta\{1, z, z^2\} dz, \quad (11.1.21)$$

$$V_{3\{A,B,D\}} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta\{1, z, z^2\} dz.$$

بخش ۱۱.۲: طراحی چند لایه ۵۵۵

$$V_{4\{A,B,D\}} = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 4\theta\{1, z, z^2\} dz .$$

انتگرالهای بالا را می توان با علامت جمع نیز جایگزین نمود.

## ۱۱.۲ طراحی چند لایه

ماتریسهای سختی چند لایه که در بخش قبل بیان شدند را می توان با تغییر تعداد لایه ها و جهتایشان تغییر داد. بنابراین، استفاده از این کمیتها به عنوان متغیرهای طراحی ما را قادر می سازد که خواص مصالح چند لایه و ضخامت آن را تغییر دهیم. در بسیاری از کاربردهای عملی، همبستگی خمشی-کششی و برشی-کششی نامطلوبند. در نتیجه، بیشتر چند لایه هایی که امروزه به کار می روند متقارن و متوازنند و هیچ گونه همبستگی ندارند. چند لایه های متقارن متوازن از نظر تحلیل نیز ساده ترند. به عنوان مثال، تحلیل یک چند لایه با همبستگی خمشی-کششی دشوار است زیرا تغییر شکلهای غیر صفحه ای مربوط به بارهای صفحه ای ممکن است بزرگ باشند و در نتیجه باید تحلیل غیر خطی انجام شود. بنابراین، بیشتر کارهای بهینه سازی تاکنون در زمینه لایه های متقارن متوازن بوده است. در ادامه این فصل، تنها چنین لایه هایی مورد نظرند.

بیشتر مواد مرکب تجاری در دسترس ضخامت تک لایه مشخص و ثابتی دارند. افزون بر این بیشتر داده های در دسترس در زمینه عملکرد چند لایه ها محدود به جهت های لایه های 0, 90 و  $\pm 45$  درجه اند. بدین سبب، طراحی چند لایه در اصل یک مسأله برنامه ریزی صحیح است. با این وجود، بیشتر نرم افزارهای بهینه سازی در دسترس برای متغیرهای طراحی پیوسته اند و کارهای قبلی در زمینه بهینه سازی چند لایه ها بر اساس استفاده از آن نوع متغیرها بوده است. ضخامت کلی تک لایه های کنار هم با جهت یکسان، به عنوان ضخامت تک لایه محسوب می شود که معمولاً به عنوان متغیرهای طراحی استفاده می شوند. جهت تک لایه ها نیز گاهی به عنوان متغیرهای طراحی استفاده می شود که جهتها مقادیر بین 0 تا 90 درجه می گیرند. ضخامتهای (یا جهتهای) نهایی لایه ها را می توان به ضرایب صحیحی از ضخامتهای لایه های تجاری در دسترس (یا جهتهای لایه های قراردادی) گرد کرد. با این وجود، هنگامی که تعداد متغیرهای طراحی زیاد است، یافتن طراحی گرد شده که هیچ قیدی را نقض نکند غالباً دشوار است. همچنین مسأله

باید برای یک ترتیب چیدمان خاص رابطه سازی شود و نه این که بهینه سازی بهترین تربیت چیدمان را بدست آورد. به این دلایل، روز به روز میزان کاربرد روشهای برنامه ریزی صحیح در طراحی چند لایه ها افزوده می شود. این فصل را با تشریح روشهایی که از متغیرهای طراحی پیوسته استفاده می کنند شروع می کنیم و توضیح روشهایی که از برنامه ریزی صحیح استفاده می کنند را به بخش ۱۱.۳ موکول می کنیم. در بهینه سازی صفحات چند لایه بسته به نوع کاربرد آنها باید به چند نکته طراحی توجه کرد. یکی از نکته های کلیدی از دیدگاه تحلیل و طراحی این است که آیا صفحه برای پاسخ صفحه ای یا خارج از صفحه طراحی می شود. برای سادگی بحث این دو حالت را به طور جداگانه مرور می کنیم.

#### ۱۱.۲.۱ طراحی لایه ها برای پاسخ صفحه ای (غشایی) داخل صفحه

متغیرهای ضخامت تک لایه ها: یکی از کارهای اولیه در زمینه طراحی چند لایه برای مقاومت و سختی صفحه ای کار اشمیت و فرشی<sup>۱</sup> [6] است که چند لایه های متقارن متوازن با جهت لایه های ثابت در نظر گرفتند. ضخامت هر لایه  $t_i, i = 1, \dots, I$  با جهت های قرار گرفتن مختلف به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته شده اند. به سبب وجود محدودیت متقارن بودن لایه ها، تنها ضخامت نصف I از تعداد کل لایه ها،  $N$  استفاده شده است. چند لایه تحت تأثیر برآیندهای نیروی  $N_{xk}, N_{yk}, N_{xyk}, k = 1, \dots, K$  قرار دارند که  $K$  تعداد حالت های بارگذاری است.

مسأله بهینه سازی به شکل زیر رابطه سازی می شود:

$$W = \sum_{i=1}^I 2\rho_i t_i \quad \text{را با قیود} \quad (11.2.1)$$

$$g_{ijk}^0 = 1 - \left( P_j^{(i)} \epsilon_{1ik} + Q_j^{(i)} \epsilon_{2ik} + R_j^{(i)} \gamma_{12ik} \right) \geq 1, \quad (11.2.2)$$

$$A_{11} \geq A_{11l}, \quad A_{22} \geq A_{22l}, \quad A_{66} \geq A_{66l}, \quad (11.2.3)$$

$$t_i \geq 0, \quad (11.2.4)$$

$$i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K, \quad \text{با} \quad (11.2.5)$$

که  $P_j^{(i)}, Q_j^{(i)}, R_j^{(i)}$  ضرایبی هستند که زامین مرز پوش شکست هر لایه  $(i)$  در فضای کرنش را تعریف

## بخش ۱۱.۲: طراحی چند لایه ۵۵۷

می کنند و  $\epsilon_{1ik}$ ,  $\epsilon_{2ik}$  و  $\gamma_{12ik}$  کرنشهای اصلی جهت های مواد در لایه  $i$  و در اثر بارگذاری اند. برای یک معیار کرنش ماکزیمم ساده، که برای مقادیر ماکزیمم کرنشها در جهات اصلی مواد، کرانهایی تعریف می کند، پوش شکست،  $\epsilon$  پیخ دارد که  $P$ ،  $Q$  و  $R$  به عنوان وارون کرنشهای شکست نرمال و برشی در جهت طولی و عرضی الیاف در کشش و فشار آن است. معادلات (۱۱.۲.۳) حد پایین  $A_{11i}$ ،  $A_{22i}$  و  $A_{66i}$  سختیهای غشایی لایه را اعمال می کنند.

رویکردی که توسط اشمیت و فرشی استفاده شد، مسأله برنامه ریزی غیر خطی تعریف شده در معادلات (۱۱.۲.۱) تا (۱۱.۲.۵) را به دنباله ای از برنامه های خطی (بخش ۶.۱ را ببینید) تبدیل می نماید. قیود نامساوی معادله (۱۱.۲.۲) که نشان دهنده معیار مقاومت است، یک تابع غیر خطی از متغیر ضخامت است و بنابراین به شکل زیر خطی می شود:

$$g_{ijkL}^*(t) = g^*(t_0) + \sum_{l=1}^I (t_l - t_{0l}) \left( P_j^{(i)} \frac{\partial \epsilon_{1ik}}{\partial t_l} + Q_j^{(i)} \frac{\partial \epsilon_{2ik}}{\partial t_l} + R_j^{(i)} \frac{\partial \gamma_{12ik}}{\partial t_l} \right), \quad (11.2.6)$$

که مشتقات کرنشهای اصلی در  $i$  امین لایه با رابطه انتقال زیر به مشتقات کرنشهای چند لایه مربوط می شوند

$$\frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial t_l} = T_i \frac{\partial \epsilon_k^0}{\partial t_l}, \quad (11.2.7)$$

که  $\epsilon_{ik} = (\epsilon_{1ik}, \epsilon_{2ik}, \gamma_{12ik})^T$  و  $T_i$  ماتریس انتقال  $i$  امین لایه است که به شکل زیر تعریف می شود

$$T_i = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_i & \sin^2 \theta_i & \cos \theta_i \sin \theta_i \\ \sin^2 \theta_i & \cos^2 \theta_i & -\cos \theta_i \sin \theta_i \\ -2 \cos \theta_i \sin \theta_i & 2 \cos \theta_i \sin \theta_i & (\cos^2 \theta_i - \sin^2 \theta_i) \end{bmatrix}. \quad (11.2.8)$$

برای بارگذاری صفحه ای  $N_k = (N_{xk}, N_{yk}, N_{zyk})^T$ ، مشتق کرنشهای چند لایه نسبت به متغیر ضخامت را می تون با دیفرانسیل گیری از معادله (۱۱.۱.۴)،  $N = A \epsilon_k^0$  به دست آورد.

$$\frac{\partial N_k}{\partial t_l} = \frac{\partial A}{\partial t_l} \epsilon_k^0 + A \frac{\partial \epsilon_k^0}{\partial t_l} = 0. \quad (11.2.9)$$

از آن جا که  $A$  ماتریس یک تابع خطی از متغیر ضخامت است (معادله ۱۱.۱.۶ را ببینید)، مشتق برابر با سختیهای کاهش یافته تبدیل شده  $i$  امین لایه است.

۵۵۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

$$\frac{\partial A}{\partial t_i} = \bar{Q}_i, \quad (11.2.10)$$

در نتیجه از معادله (۱۱.۲.۹) داریم:

$$\frac{\partial \epsilon_k^0}{\partial t_i} = -A^{-1} \bar{Q}_i \epsilon_k^0. \quad (11.2.11)$$

معادله (۱۱.۲.۶) به همراه (۱۱.۲.۷) و (۱۱.۲.۱۱) را می توان به عنوان تقریبهای خطی در هر مرحله از بهینه سازی طراحی مورد استفاده قرار داد.

اشمیت و فرشی علاوه بر تقریب قیود یک فن حذف قید را نیز مورد استفاده قرار دادند که در آن تنها قیودی که در هر مرحله تقریب سازی قیود بالقوه بحرانی اند در نظر گرفته می شدند.

جدول ۱۱.۲.۱ لایه های با وزن مینیمم با قیدهای سختی در حالت بارگذاری فشاری محوری

نوعه چیدمان و تعداد لایه ها	زاویه جهت الیاف (deg)	طراحی اولیه $t_i$ (in.)	طراحی نهایی $t_f$ (in.)	طراحی نهایی %	تعداد لایه ها (گرد شده)
$[0/\pm 45/90]_s$					
1	0°	0.032281	0.018793	28.96	4
2	+45°	0.032281	0.023048	35.52	6
3	-45°	0.032281	0.023048	35.52	6
4	90°	0.032281	0.000000	0	0
$\sum t_i$		0.129124	0.064890		
$[0/\pm 45]_s$					
1	0°	0.034194	0.012555	21.12	3
2	+45°	0.034194	0.023441	39.44	6
3	-45°	0.034194	0.023441	39.44	6
$\sum t_i$		0.102583	0.059438		

نتایج طراحی بهین برای انواع چند لایه های متداول با جهت لای 0 درجه،  $\pm 45$  درجه و 90 درجه و با ترکیب مختلف بارهای نرمال صفحه ای و بارهای برشی که در مرجع [6] ارائه شده، اهمیت انتخاب ترتیب چیدمان در طرح بهین را بازگو می کند. به عنوان مثال، برای یک چند لایه که تحت اثر تنش محوری قرار دارد و روی سختی برشی آن محدودیت وجود دارد، بین این که لایه ها را  $[0/\pm 45/90]_s$  یا  $[0/\pm 45]_s$  انتخاب کنیم، تفاوت وجود خواهد داشت؛ حتی اگر در انتهای چرخه های طراحی ضخامت لایه 90 درجه

اولین لایه حذف شود. نتیجه این لایه ها که در مرجع [6] آمده، در جدول ۱۱.۲.۱ خلاصه شده است. در طراحی نهایی اولین لایه قید مقاومت بحرانی در لایه ۹۰ درجه است. اگر آن را با لایه دوم،  $[0/ \pm 45]$  مقایسه کنیم، حدود ۹٪ به سبب لایه اضافی ۰ درجه ضخیمتر است. این لایه اضافی به سبب جلوگیری از نقض قید مقاومت در لایه ۹۰ درجه در اولین چند لایه است. بنابراین به منظور رسیدن به جواب بهین صحیح، طراح باید فرایند بهینه سازی را با تعریف لایه های متفاوت تکرار کند، به ویژه با حذف لایه هایی که به مقادیر حدی پایین خود همگرا می شوند. با این وجود، این حقیقت که یک لایه مقداری به جز حد پایین خود می گیرد، نباید این تصور را به وجود آورد که آن لایه برای طراحی بهین ضروری است. یعنی، این که اگر یک لایه با ضخامتی به جز حد پایین خود حذف شود، روش بهینه سازی می تواند سایر لایه ها را تغییر اندازه دهد تا به وزنی کمتر از آنچه بود برسد، کاملاً امکان پذیر است. این واقعیت می تواند روند طراحی را دشوار سازد، زیرا نیاز است که تمامی ترکیبهای با زوایای مشخص که قبلاً انتخاب شده اند آزمایش شوند. با این وجود، در بیشتر کاربردهای عملی، لایه هایی با الیافهای در جهت خاص (مانند الیافهای در جهت عمود بر بارگذاری) به کار می رود. بنابراین، حد پایینی که معمولاً غیر صفر است اعمال می شود و حذف لایه را به عنوان یک گزینه قرار نمی دهند. در مورد بارگذاری چند گانه نیز طراحی چنان است که حذف لایه ها امکان پذیر نیست.

**متغیرهای جهت لایه:** برای یافتن ترتیب چیدمان چند لایه که در بارگذاری مورد نظر بهترین حالت باشد، جهت قرار گرفتن لایه ها و ضخامت لایه ها باید به عنوان متغیرهای طراحی استفاده شوند. در واقع، در بسیاری از کدهای<sup>۱</sup> (برنامه های) طراحی هر دو پارامتر به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته می شود. به منظور تشریح استفاده از جهت های لایه به عنوان متغیرهای طراحی، روی مثالی با تنها متغیرهای جهت لایه متمرکز می شویم. برای مسائل بهینه سازی که برای مینیمم شدن وزن طراحی رابطه سازی شده اند، تابع هدف مستقل از جهت لایه هاست. بدین سبب در همگرایی به جواب بهین در بعضی از الگوریتمها ممکن است مشکلاتی ایجاد شود. یک گزینه جایگزین برای تابع هدف مینیمم سازی وزن، ماکزیمم سازی مقاومت لایه هاست که توسط پارک<sup>۲</sup> [7] و مسارد<sup>۳</sup> [8] تشریح شده است.

پارک [7] برای چند لایه هایی که تحت تأثیر شرایط بارگذاری صفحه ای اند  $(N_x, N_y, N_{xy})$  بر اساس تقریب پوش شکست در فضای کرنش [9] یک معیار شکست اولین لایه (FPF) درجه دوم به کار برد. این

۵۶۰ سبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

پوش شکست تقریبی عبارت است از:

$$\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + (1/2)\gamma_{xy}^2 = b_0^2, \quad (11.2.12)$$

که  $b_0$  تنها بر حسب خواص سختی در جهات ماده اصلی تعریف می شود. تابع هدف که باید مینیمم شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$f = \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + (1/2)\gamma_{xy}^2, \quad (11.2.13)$$

که بیانگر مجذور نرم بردار کرنش است. هر چه مقدار تابع هدف کوچکتر باشد، باری که می توان قبل از نقض پوش شکست به چند لایه اعمال کرد بیشتر است، بنابراین، چند لایه در FPF قوی تر است. یکی از ویژگیهای این پوش شکست کرنش تقریبی این است که در مورد کرنشهای چند لایه اعمال می شود و به محاسبات کرنش در سطح لایه ها نیازی ندارد. در مرجع [7] تنها چند لایه های متقارن متوازن مورد توجه قرار گرفتند و شش چند لایه متفاوت مورد مطالعه قرار گرفتند که پنج تای آنها زوایای قراردادی  $[-\theta, +\theta]$ ،  $[-\theta, 0, +\theta]$ ،  $[-\theta, 90, +\theta]$ ،  $[-\theta, 0, 90, +\theta]$  و  $[-\theta, -45, +45, +\theta]$  بودند. چند لایه 'ششم' یک چند لایه پیوسته نامیده می شود و فرض می شود که جهت الیاف آن از سطح بالایی تا صفحه میانی چند لایه به طور خطی تغییر می کند و محدوده ای از جهتهای  $\theta$  تا  $\theta$  درجه را می پوشاند.

نتیجه های مرجع [7] نشان داد که در شرایط بارگذاری ترکیبی، بهترین چند لایه، بر اساس معیار FPF، برای بارگذاری طولی بدون برش نوع  $[-\theta, 0, +\theta]$  است، و برای بارگذاری برشی بزرگ بدون بارگذاری طولی، بهترین چند لایه  $[-\theta, -45, +45, +\theta]$  است. زاویه بهین برای چند لایه  $[-\theta, 0, +\theta]$  بستگی به مقدار بار عرضی  $N_y$  دارد، و برای  $N_y = 0$  برابر 0 درجه بود. با افزایش بار عرضی، زاویه بهین برای  $N_y = N_x/2$  به 45 درجه رسید و برای  $N_y = N_x$  برابر 60 درجه بود. به طور مشابه برای چند لایه  $[-\theta, -45, +45, +\theta]$  (با بارگذاری برشی و بدون بار محوری)، زاویه بهین برای  $N_y = 0$ ، برابر 45 درجه بود. با افزایش بار عرضی  $N_y$ ، زاویه بهین افزایش یافته و در  $N_y = N_{xy}$  به مقدار 73 درجه می رسد. چند لایه پیوسته در مجموع بهترین عملکرد را در شرایط ترکیبی بارگذاری طولی و برشی داشته با  $N_y = 0 \pm 65$ .

نتیجه های بالا از این جهت جالب به نظر می رسند که الیافها عموماً در یک جهت موازی با بارهای

## بخش ۱۱.۲: طراحی چند لایه ۵۶۱

وارد قرار می‌گرفتند. اما چنین برداشتی ممکن است در کار با مواد مرکب همیشه به طراحی بهین نینجامد. به عنوان مثال، به مورد استفاده معیار تنش تسلیم هیل<sup>۱</sup> که توسط شای<sup>۲</sup> [10] در مواد مرکب برای پیش بینی مقاومت مواد مرکب تک جهته به شکل زیر به کار می‌رود توجه کنید.

$$f = \left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 \leq 1, \quad (11.2.14)$$

مقادیر  $X$ ،  $Y$  استحکامهای نرمال در راستای الیاف و عمود بر الیاف، و  $S$  مقاومت برشی تک لایه است. برنر<sup>۳</sup> مایر<sup>۳</sup> نشان داد [11] که اگر مقاومت عرضی نرمال  $Y$  از مقاومت برشی  $S$  کمتر باشد، جهت بهینه قرارگیری الیافها در امتداد جهت تنشهای اصلی نیست و به مقادیر کمیت‌های مقاومت و تنشهای اعمال شده بستگی دارد. این موضوع را می‌توان با بیان تنشهای اصلی بر حسب تنشهای اعمال شده  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$ ،  $\tau_{xy}$  و جهت الیافها  $\theta$ ، و برابر صفر قرار دادن مشتق معادله (11.2.14) نسبت به جهت الیاف نشان داد (تمرین ۱ را ببینید).

یک روش ترسیمی برای طراحی بهین: یک روش ترسیمی که توسط میکی<sup>۴</sup> [12,13]، برای طراحی چند لایه‌ها با خواص سختی صفحه‌ای ارائه شد ابزاری بسیار عملی در بهینه‌سازی طراحی است. این روش برای چند لایه‌هایی با زوایای تک لایه متوازن چندگانه از نوع  $[(\pm\theta_1)_{N_1}/(\pm\theta_{I-1})_{N_{I-1}}/\dots/(\pm\theta_1)_{N_1}]$  که تعداد کل لایه‌ها  $N = 2 \sum_{i=1}^I N_i$  است، مناسب است. افزون بر تعدادی لایه‌های زاویه دار متوازن، یک لایه تک جهته که محورهای اصلی مواد آن با محورهای چند لایه منطبق باشد نیز می‌توانند در چیدمان قرار داشته باشد.

کار اصلی در این روش طراحی ساخت نمودار پارامتر لایه است که ناحیه قابل قبول پارامترهای لایه  $V_1^*$  و  $V_3^*$  را تعیین می‌کند. این پارامترها از نرمال سازی مؤلفه‌های صفحه‌ای  $V_{1A}$  و  $V_{3A}$  در معادله (11.1.21) با ضخامت کل لایه‌ها به دست می‌آیند. برای یک ماده مرکب لایه‌ای با ضخامت کل  $h$ ، که در آن نسبت حجم لایه‌ها با جهت  $\pm\theta_i$  برابر  $v_i$  است، پارامترهای لایه به شکل زیر است.

$$V_1^* = \frac{V_{1A}}{h} = \sum_{k=1}^I v_k \cos 2\theta_k, \quad \text{و} \quad V_3^* = \frac{V_{3A}}{h} = \sum_{k=1}^I v_k \cos 4\theta_k, \quad (11.2.15)$$

که



۵۶۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

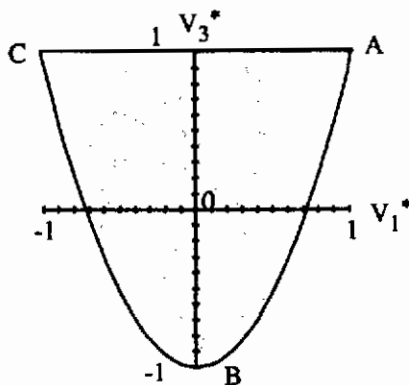
$$v_i = \frac{2(z_i - z_{i-1})}{h}, \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^I v_i = 1. \quad (۱۱.۲.۱۶)$$

به سبب نرمال سازی، مقادیر پارامترهای لایه همیشه کراندارند یعنی  $-1 \leq V_1^* \leq 1$ ، برای یک لایه با یک زاویه الیاف جهت دار، پارامترهای لایه عبارتند از:

$$V_1^* = \cos 2\theta, \quad \text{و} \quad V_3^* = \cos 4\theta, \quad (۱۱.۲.۱۷)$$

و دو پارامتر به شکل زیر به هم مربوط می شوند.

$$V_3^* = 2V_1^{*2} - 1. \quad (۱۱.۲.۱۸)$$



شکل ۱۱.۲.۱ نمودار پارامتر لایه برای یک ماده مرکب با  $[\pm\theta]$

بنابراین تمامی مقادیر ممکن ترکیبی پارامترهای لایه روی منحنی ABC در شکل (۱۱.۲.۱) قرار می گیرد که توسط رابطه (۱۱.۲.۱۸) داده می شود. توجه کنید که نقاط A، B و C به ترتیب به چند لایه هایی با زاویه تک لایه  $[\pm 45]$ ،  $[0]$ ، و  $[90]$  مربوط می شوند. برای هر نقطه روی منحنی ABC مقادیر ثابتهای ارتجاعی مهندسی می تواند به شکل زیر به دست آید.

$$E_x = \frac{1}{h} \left( \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \right),$$

$$E_y = \frac{1}{h} \left( \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}} \right), \quad (۱۱.۲.۱۹)$$

$$G_{xy} = \frac{1}{h} A_{66}, \quad \text{و} \quad \nu_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{22}},$$

بخش ۱۱.۲: طراحی چند لایه ۵۶۳

که عناصر ماتریس سختی کششی چند لایه از معادلات زیر از جدول (۱۱.۱.۱) به دست می آیند.

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \\ A_{66} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & V_{1A} & V_{3A} \\ U_1 & -V_{1A} & V_{3A} \\ U_4 & 0 & -V_{3A} \\ U_5 & 0 & -V_{3A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}, \quad (11.2.20)$$

که  $U_i$  خواص مواد نامتغیر از نظر جهت است که در معادله (۱۱.۱.۷) معرفی شد.

اگر چند لایه از دو جهت الیاف یا بیشتر تشکیل شده باشد، میکی [12] نشان داد که معادله (۱۱.۲.۱۸) یک نامعادله می شود.

$$V_3^* \geq 2V_1^{*2} - 1. \quad (11.2.21)$$

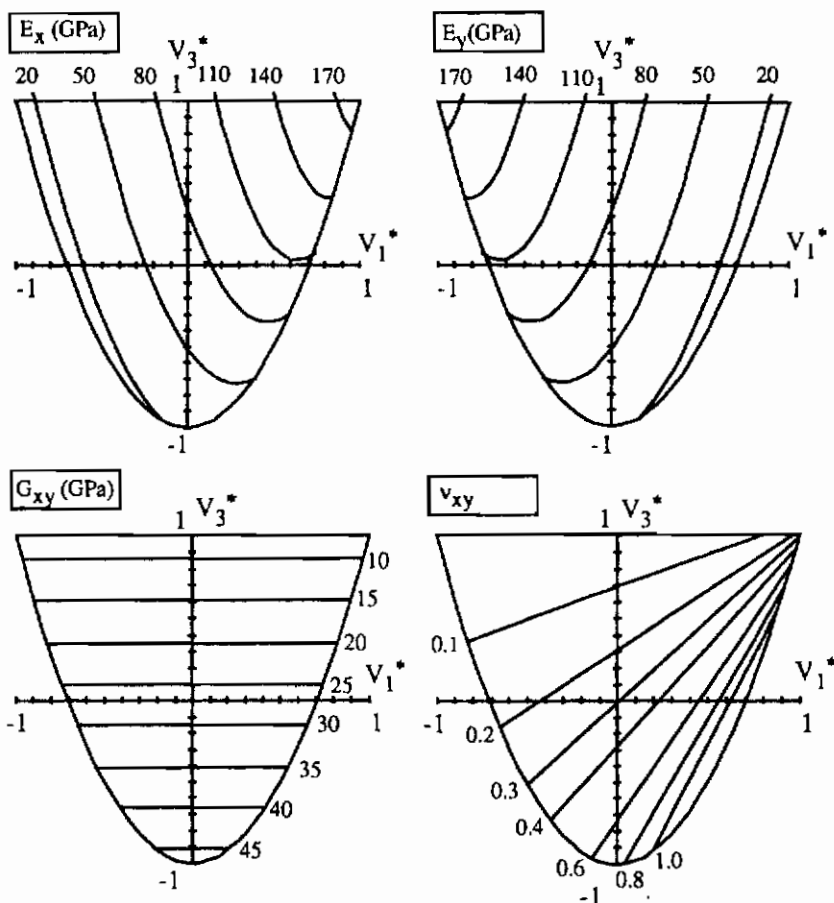
ناحیه مجاز پارامترهای لایه عبارت است از سطحی که توسط منحنی ABC در شکل ۱۱.۲.۱ محدود شده است، و به تعداد جهت های تک لایه های مختلف بستگی ندارد. بنابراین هر نقطه در داخل نمودار پارامتر لایه مربوط به چند لایه ای با دو جهت الیاف یا بیشتر می شود. از آن جا که یک نقطه با دو پارامتر تعریف می شود، این بدان معنی است که تنها دو زاویه جهت  $\theta_1$  و  $\theta_2$  برای طراحی مواد مرکب لایه ای با سختی دلخواه کافی است. برای چند لایه ای با زاویه تک لایه متوازن با بیش از دو جهت، ترکیب های متعددی از زاویه تک لایه وجود خواهد داشت که پارامترهای لایه مشابهی دارند و بنابراین خواص سختی آنها همانند است. هر نقطه در داخل فضای طراحی یک نقطه لایه نامیده می شود و به یک لایه با خواص سختی خاص مربوط می شود. محدود سازی مقادیر مجاز سختی های مهندسی مؤثر مختلف ( $\nu_{xy}$  و  $E_x, E_y, G_{xy}$ ) از طریق ترسیمی نیز امکان پذیر است. این کار با تعریف خطوط سختی های مهندسی مؤثر ثابت (کانتورها) برای هر ثابت مهندسی که از معادلات (۱۱.۲.۱۹) و (۱۱.۲.۲۰) به دست می آید انجام می شود.

$$\text{ثابت } E_x: V_3^* = \frac{U_2^2 V_1^{*2} - U_2 E_x V_1^* + E_x U_1 - U_1^2 + U_4^2}{U_3(2U_1 + 2U_4 - E_x)}, \quad (11.2.22)$$

$$\text{ثابت } E_y: V_3^* = \frac{U_2^2 V_1^{*2} + U_2 E_y V_1^* + E_y U_1 - U_1^2 + U_4^2}{U_3(2U_1 + 2U_4 - E_y)}, \quad (11.2.23)$$

$$\text{ثابت } \nu_{xy}: V_3^* = \frac{\nu_{xy} U_2^2 V_1^* - \nu_{xy} U_1 + U_4}{(1 + \nu_{xy}) U_3}, \quad (11.2.24)$$

$$\text{ثابت } G_{xy}: V_3^* = \frac{U_5 - G_{xy}}{U_3}. \quad (11.2.25)$$



شکل ۱۱.۲.۲ کانتورهای خواص ارتجاعی مهندسی مؤثر ثابت

کانتورهای خواص مهندسی مؤثر ثابت چند لایه در شکل ۱۱.۲.۲ نشان داده شده اند. شکل نشان می دهد که اگر قیود دیگری تعریف نشوند، مقادیر ماکزیمم  $E_x$ ،  $E_y$  و  $G_{xy}$  در نقاطی از مواد مرکب که در مرز فضای طراحی واقعند به دست می آیند که تنها یک زاویه دارند. همچنان که انتظار می رود، ماکزیمم برای  $E_x$  و  $E_y$  برای لایه های 0 درجه و ۹۰ درجه به دست می آیند، ماکزیمم سختی برش برای چند لایه  $\pm 45^\circ$  به دست می آید. با این وجود، به دست آوردن مقدار زاویه لایه  $\pm \theta$  که ضریب پواسن مؤثر را ماکزیمم می سازد، راحت نیست و یک تابع از خواص لایه است که توسط معادلات (۱۱.۱.۷) و (۱۱.۱.۴) تعریف شدند. به عنوان مثال، برای مواد گرافیت / اپوکسی<sup>۱</sup> T300/5208 و

1) Graphite/epoxy

## بخش ۱۱.۲: طراحی چند لایه ۵۶۵

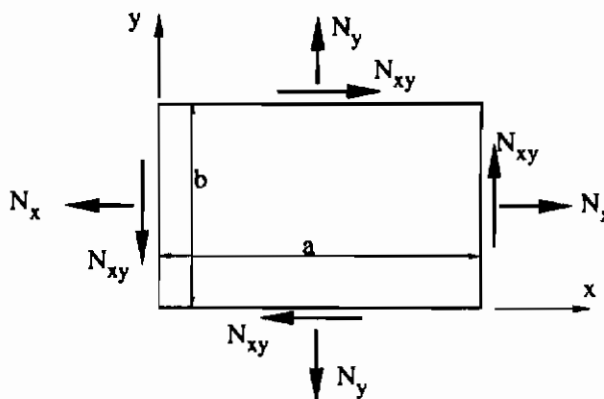
تک لایه اسکاج پلی ۱۰۰۲ اپوکسی / شیشه، لایه هایی که بیشترین ضریب پواسان را تولید می کنند به ترتیب عبارتند از  $[25]_{\pm}$  و  $[31]_{\pm}$ .

در مسائل طراحی که یک یا چند ثابت مهندسی موثر مقید است، کانتور خواص ثابت را می توان برای شناسایی فضای طراحی قابل قبول و نقطه لایه ای که خاصیت سختی مورد نظر را ماکزیمم (یا مینیمم) می سازد به کار برد (تمرین ۲ را ببینید).

## ۱۱.۲.۲ طراحی مواد مرکب لایه ای برای پاسخ خمشی

متغیرهای ضخامت تک لایه: برای صفحات مستطیلی تحت تأثیر بارهای فشاری صفحه ای، اگر ابعاد صفحه نسبت به ضخامت آن زیاد باشد، قید مقاومت بی اهمیت می شود. برای چنین صفحاتی پایداری ارتجاعی و ارتعاشات که به صلیبیت خمشی بستگی دارد، باید مورد توجه قرار گیرد. یکی از مطالعات اولیه ای که در طراحی بهینه صفحات مواد مرکب قید پایداری ارتجاعی را در نظر گرفته بود توسط اشمیت و فرشی [14] انجام شده است.

برای یک چند لایه اورتوتراپیک که به صورت متقارن متوازن لایه چینی شده باشد قید پایداری ارتجاعی فقط با استفاده از ضخامت به عنوان متغیر طراحی زیر اعمال می شود.



شکل ۱۱.۲.۳ صفحه چند لایه تحت تأثیر بارهای صفحه ای

۵۶۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

$$g_b(t) = 1 - \lambda_b(t) \geq 0, \quad (11.2.26)$$

که در آن  $t$  بردار متغیرهای طراحی و ضخامتهای هر لایه در چند لایه می باشد و  $\lambda$  ضریب بار کمانش است. برای یک چند لایه متوازن متقارن به ابعاد  $a$  و  $b$  که مرزهای آن تکیه گاه ساده است و تحت تأثیر بارهای صفحه ای است، یک تابع تغییر مکان به شکل

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (11.2.27)$$

$M \times N$  از این قیدها را می دهد که نشان دهنده  $M \times N$  مود کمانش مربوط به الگوی تغییر مکانهای عرضی است. این نوع تغییر مکانها، شرایط مرزی را به طور کامل برآورده می سازند. یک سری قطع شده را می توان برای حل تقریبی معادله دیفرانسیل حاکم بر کمانش صفحه اورتوتراپیک به کاربرد

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \lambda (N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}), \quad (11.2.28)$$

که  $N_x$ ،  $N_y$  و  $N_{xy}$  برابر با بارهای طراحی اعمال شده می باشند. با جایگزینی معادله (11.2.27) در معادله تعادل و کاربرد روش گلرکین<sup>۱</sup> برای یک مسأله مقدار ویژه به شکل:

$$\mathbf{K}\mathbf{w} = \lambda \mathbf{K}_G \mathbf{w}, \quad (11.2.29)$$

که بردار ویژه حاوی ضرایب مجهول تابع تغییر مکان  $\mathbf{w} = \{W_{11} \dots W_{1N} W_{21} \dots W_{2N} \dots W_{MN}\}^T$  است. ماتریسهای  $\mathbf{K}$  و  $\mathbf{K}_G$  به شکل زیرند:

$$\mathbf{K} = \frac{ab}{4} [\delta_{mp} \delta_{nq} f_{mn}], \quad \left\{ \begin{matrix} m, p = 1, \dots, M \\ n, q = 1, \dots, N \end{matrix} \right\}, \quad (11.2.30)$$

که

$$f_{mn} = \pi^4 \left[ D_{11} \left( \frac{m}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{m}{a} \right)^2 \left( \frac{n}{b} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{n}{b} \right)^4 \right], \quad (11.2.31)$$

و  $\delta_{mp}$  و  $\delta_{nq}$  دلتای کرانکر<sup>۲</sup> اند و

$$\mathbf{K}_G = \left[ 8N_{xy} \xi_{mnpq} - \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{b}{a} m^2 N_x + \frac{a}{b} n^2 N_y \right) \right] \left\{ \begin{matrix} m, p = 1, \dots, M \\ n, q = 1, \dots, N \end{matrix} \right\}, \quad (11.2.32)$$

که

$$\xi_{mnpq} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ اگر } p = m \text{ or } q = n \\ \frac{mnpq}{(p^2 - m^2)(q^2 - n^2)} \delta^{pm} \delta^{qn} \end{array} \right\},$$

$$\delta^{pm} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ اگر } (p+m) \text{ فرد} \\ 0 \text{ اگر } (p+m) \text{ زوج} \end{array} \right\}, \quad \delta^{qn} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ اگر } (q+n) \text{ فرد} \\ 0 \text{ اگر } (q+n) \text{ زوج} \end{array} \right\}.$$

اندیسهای  $p$  و  $q$  به عنوان شمارنده معادلات به کار می روند و  $m$  و  $n$  اندیسهای ضرایب  $W_{mn}$  ها در هر معادله است. بنابراین، در محاسبه عناصر دو ماتریس، روی اندیسهای  $m$  و  $n$  و  $p$  و  $q$  جمع بسته نمی شود. برای یک صفحه با تکیه گاه ساده تحت بارهای فشاری محوری تنها ( $N_{xy} = 0$ )، صفحه وقتی کمانش می کند که پارامتر دامنه بار  $\lambda$  به مقدار بحرانی  $\lambda_{cr}$  برسد که از رابطه زیر به دست می آید:

$$\lambda_{cr}(m, n) = \frac{\pi^2 \left[ D_{11} \left( \frac{m}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{m}{a} \right)^2 \left( \frac{n}{b} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{n}{b} \right)^4 \right]}{\left( \frac{m}{a} \right)^2 N_x + \left( \frac{n}{b} \right)^2 N_y}, \quad (11.2.33)$$

که  $m$  و  $n$  به ترتیب تعداد نیم موجهای در جهت  $x$  و  $y$  است که  $\lambda_{cr}$  را مینیمم می سازد. اشمیت و فرشی همچنان که در مورد قید مقاومت معادله (۱۱.۲.۲) انجام دادند، یک تقریب خطی برای قیدهای کمانش به شکل زیر به کار بردند:

$$g_L(t) = 1 - \lambda_b(t_0) - \sum_{i=1}^l (t_i - t_{0i}) \frac{\partial \lambda_b}{\partial t_i} \Big|_{t=t_0}. \quad (11.2.34)$$

توجه کنید که از معادله (۱۱.۲.۳۲) می توان نتیجه گرفت که  $K_G$  از متغیرهای طراحی مستقل است، و با استفاده از معادله (۷.۳.۵) می توانیم نشان دهیم که مشتقات  $k$  امین ضریب بار کمانش عبارت است از:

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial t_i} = \frac{\mathbf{w}_k^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t_i} \mathbf{w}_k}{\mathbf{w}_k^T \mathbf{K}_G \mathbf{w}_k}. \quad (11.2.35)$$

از آن جا که ماتریس  $\mathbf{K}$  تابعی از سختی خمشی است، برای مشتق  $\mathbf{K}$  نسبت به متغیرهای طراحی یک عبارت صریح می توان نوشت:

$$\frac{\partial k_{pq}}{\partial t_i} = \frac{ab}{4} \left[ \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{\partial f_{mn}}{\partial t_i} \right], \quad (11.2.36)$$

۵۶۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

که

$$\frac{\partial f_{mn}}{\partial t_i} = \pi^4 \left[ \frac{\partial D_{11}}{\partial t_i} \left( \frac{m}{a} \right)^4 + 2 \left( \frac{\partial D_{12}}{\partial t_i} + 2 \frac{\partial D_{66}}{\partial t_i} \right) \left( \frac{m}{a} \right)^2 \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \frac{\partial D_{22}}{\partial t_i} \left( \frac{n}{b} \right)^4 \right] \quad (۱۱.۲.۳۷)$$

مشتقات جزئی سختیهای خمشی را می توان به مشتقات جزئی ماتریس سختی صفحه ای  $A$  مربوط کرد. برای یک چند لایه شبه همگن که در آن از جملات پیوند خمش-پیچش  $D_{16}$  و  $D_{26}$  صرف نظر می شود (این جملات با افزایش تعداد گروه های تک لایه به صفر نزدیک می شوند)، مدولهای خمشی و صفحه ای توسط رابطه زیر بهم مربوط می شوند (صفحه ۲۰۴ مرجع [۹] را ببینید).

$$D_{ij} = \frac{h^2}{12} A_{ij}, \quad (۱۱.۲.۳۸)$$

که  $h$  ضخامت چند لایه می باشد. بنابراین مشتقات جزئی سختیهای خمشی عبارتند از

$$\frac{\partial D_{rs}}{\partial t_i} = \frac{1}{12} \left[ \left( \frac{\partial A_{rs}}{\partial t_i} \right) h^2 + 2 A_{rs} h \right], \quad r, s = 1, 2, 6, \quad (۱۱.۲.۳۹)$$

که مشتقات ماتریس  $A$  از معادله (۱۱.۲.۱۰) به دست می آیند.

بهینه سازی کمانش ترسیمی: مانند نمودار صفحه ای که قبلاً بحث شد، میکی [15] نشان داد که برای طراحی چند لایه ها برای پاسخ کمانش نیز می توان نموداری ساخت. پارامترهای چند لایه خمشی را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$W_1^* = \frac{12V_{1D}}{h^3} = \sum_{k=1}^I s_k \cos 2\theta_k, \quad \text{و} \quad W_3^* = \frac{12V_{3D}}{h^3} = \sum_{k=1}^I s_k \cos 4\theta_k, \quad (۱۱.۲.۴۰)$$

که  $I = N/2$ ، و

$$s_i = \left( \frac{2z_i}{h} \right)^3 - \left( \frac{2z_{i-1}}{h} \right)^3. \quad (۱۱.۲.۴۱)$$

میکی نشان داد [15] که رابطه ای مانند (۱۱.۲.۲۱) به دست می آید.

$$W_3^* \geq 2W_1^{*2} - 1. \quad (۱۱.۲.۴۲)$$

بنابراین، هر چند لایه زاویه ای متقارن متوازن با جهتهای چند گانه را می توان به عنوان نقطه ای از ناحیه

محصور شده با رابطه زیر فرض کرد:

$$W_3^* = 2W_1^{*2} - 1, \quad (11.2.43)$$

که طراحی در مرزها مربوط به طراحی تنها با یک زاویه لایه چینی  $[(\pm\theta)_I]$  می شود، و

$$W_1^* = \cos 2\theta, \quad \text{و} \quad W_3^* = \cos 4\theta. \quad (11.2.44)$$

نمودار پارامترهای مواد مرکب لایه ای خمشی را می توان برای طراحی چند لایه هایی با بیشترین بار کمانش تحت بارهای تک محوری یا دو محوری استفاده کرد. برای مقادیر مشخص  $m$  و  $n$  و یک نسبت بار جانبی به بار محوری ثابت، می توان با استفاده از معادله (۱۱.۲.۳۳) نشان داد که منحنیهای پارامتر بار بحرانی  $\lambda_{cr}$  ثابت در نمودار لایه های خمشی خطوط مستقیمند. با این وجود، یک مشکل در استفاده از پارامتر چند لایه خمشی در طراحی چند لایه های با ماکزیمم بار کمانشی این است که  $m$  و  $n$  به ندرت از قبل معلومند. از آن جا که این دو عدد به متغیرهای طراحی و نسبت طول به عرض<sup>۱</sup> صفحه و بار اعمال شده بستگی دارد، همیشه نمی توان آنها را دقیقاً پیش بینی کرد. برای بحث بیشتر در زمینه استفاده از پارامتر چند لایه خمشی در ماکزیمم سازی کمانش مرجع [15] را ببینید. همچنین، بحث تحلیلی زیر در مورد استفاده از متغیرهای جهت تک لایه برای مسائل کمانش، نقش  $m$  و  $n$  را توضیح می دهد.

**متغیرهای جهت تک لایه:** تعدادی از پژوهشگران روی مباحث تحلیلی بهینه سازی کمیتهای پاسخ خمشی مختلف مانند بسامد ارتعاشی [16-18]، و نرمی سازه ای [19]<sup>۲</sup> و پاسخ کمانش [20] صفحات با تکیه گاه ساده، کار کرده اند. برای صفحه ای به طول  $a$  و عرض  $b$ ، پدerson<sup>۳</sup> [20] پارامتر  $\phi$  را که متناسب با مجذور بسامد طبیعی و بار کمانشی است و به طور معکوس با تغییر مکانهای خارج از صفحه نیز متناسب است، تعریف کرد. کمیت  $\phi$  از یک ترکیب خطی از سختی خمشی یی بعد  $d_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) تشکیل شده که به شکل زیر تعریف می شود:

$$\phi = d_{11} + 2\eta^2(d_{12} + 2d_{66}) + \eta^4 d_{22}, \quad (11.2.45)$$

که  $\eta$  پارامتر مود است که به عنوان نسبت طولی و عرضی طول نیم موجها تعریف می شود



۵۷۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

$$\eta = \frac{na}{mb}, \quad (۱۱.۲.۴۶)$$

که  $m$  و  $n$  تعداد نیم موجهای مودال به ترتیب در جهتهای  $x$  و  $y$  است (معادله ۱۱.۲.۲۷ را ببینید).

سختیهای خمشی بی بعد،  $d_{ij}$  بر حسب سختیهای خمشی به شکل زیر تعریف می شوند:

$$d = \frac{8(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_1 h^3} D. \quad (۱۱.۲.۴۷)$$

برای یک چند لایه با ضخامت تک لایه ثابت، ماکزیمم سازی بار کمانش یا بسامد ارتعاشی، یا مینیمم سازی تغییر مکانها با به دست آوردن مقادیر ایستایی  $\phi$  نسبت به جهتهای تک لایه حاصل می شود.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial d_{11}}{\partial \theta} + 2\eta^2 \left( \frac{\partial d_{12}}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial d_{66}}{\partial \theta} \right) + \eta^4 \frac{\partial d_{22}}{\partial \theta} = 0. \quad (۱۱.۲.۴۸)$$

با محدود سازی چند لایه به چند لایه های زاویه ای متوازن و متقارن و صرف نظر کردن از جملات پیوند خمشی-پیچشی، می توانیم ماتریس سختی خمشی از جدول ۱۱.۱.۱ را به شکل خلاصه زیر در آوریم:

$$\begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{12} \\ D_{66} \end{bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} U_1 & W_1^* & W_3^* \\ U_1 & -W_1^* & W_3^* \\ U_4 & 0 & -W_3^* \\ U_5 & 0 & -W_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}, \quad (۱۱.۲.۴۹)$$

که  $W_1^*$  و  $W_3^*$  با معادله (۱۱.۲.۴۰) تعریف می شوند. با استفاده از معادلات (۱۱.۲.۴۰)، (۱۱.۲.۴۸) و (۱۱.۲.۴۹) داریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta_k} = \frac{2}{3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \left( [U_2(1 - \eta^4) + 4U_3(1 - 6\eta^2 + \eta^4) \cos 2\theta] \sin 2\theta \right)_k. \quad (۱۱.۲.۵۰)$$

مقادیر ایستایی  $\phi$  به ازای زوایای زیر است:

$$\theta_k = 0, \quad \text{یا} \quad |\theta_k| = 90, \quad (۱۱.۲.۵۱)$$

$$\text{یا} \quad |\theta_k| = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left( \frac{U_2 (\eta^4 - 1)}{4U_3 (1 - 6\eta^2 + \eta^4)} \right). \quad (۱۱.۲.۵۲)$$

وجود مقادیر چند گانه برای جهت الیاف که سبب ایستادن کمیت  $\phi$  می گردند نشان دهنده بهینه های محلی است. دو ریشه اول از خواص ماده و هندسه مستقل است. از طرف دیگر جواب معادله

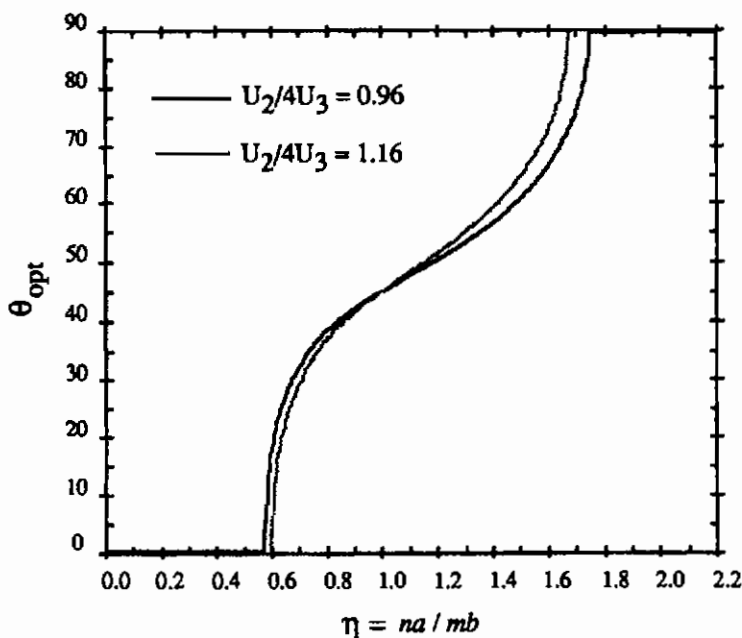
بخش ۱۱.۲: طراحی چند لایه ۵۷۱

(۱۱.۲.۵۲) شامل خواص مواد و پارامتر مود  $\eta$  است و برای محدوده  $\eta_{\min}^2 < \eta^2 < \eta_{\max}^2$  معتبر است (مرجع ماک [21] را ببینید)، که در آن به ترتیب وقتی  $\theta$  به صفر و 90 رسید داریم:

$$\eta_{\min}^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4[(U_2/4U_3)^2 - 1]}}{2[(U_2/4U_3) - 1]}, \quad \text{و} \quad \eta_{\max}^2 = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4[(U_2/4U_3)^2 - 1]}}{2[(U_2/4U_3) + 1]},$$

(۱۱.۲.۵۳)

مقادیر بهینه زوایای الیاف برای دو مقدار مختلف از  $U_2/4U_3$  معادله (۱۱.۲.۵۲) در شکل ۱۱.۲.۴ نشان داده شده است. محدوده  $U_2/4U_3$  که در شکل استفاده شده عملاً بسیاری از مواد مرکب تجاری در دسترس مانند گرافیت-اپوکسی<sup>۲</sup>، برون اپوکسی<sup>۳</sup>، شیشه اپوکسی<sup>۴</sup> و آرامید اپوکسی<sup>۵</sup> را پوشش می دهد. بدیهی است که جهت الیاف بهینه نسبت به خواص مواد حساس نیست، ولی به شدت از پارامتر شکل مود تأثیر می پذیرد. برای مقادیر کوچک و بزرگ پارامتر مود  $\eta$ ، جهت بهینه یا  $\theta_k = 0$  یا  $\theta_k = 90$  درجه است و جهت بهینه مستقل از موقعیت لایه در چند لایه است.



شکل ۱۱.۲.۴ جهت تک لایه بهین، به عنوان تابعی از پارامتر مود  $\eta$

۵۷۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

اثر پارامتر مود  $\eta$  روی مقدار جهت الیاف بهینه باید بیشتر مورد بحث قرار گیرد. مقدار مینیمم  $\phi$  که به شکل مود ارتعاشی با کمترین بار کمانشی مربوط می شود با پارامتر طول موج عرضی  $n = 1$  به دست می آید، ولی این که چه مقدار از پارامتر طول مرجع طولی  $m$  به کمترین مقدار پارامتر  $\phi$  می انجامد همیشه روشن نیست. برای نسبت های هندسی صفحه  $r = a/b$  کمتر از مقدار بحرانی  $(r_{cr})_1$ ، عدد موج  $m = 1$  کمترین مقدار را می دهد. برای  $r > (r_{cr})_1$  عدد موج چنان به دست می آید که  $\phi$  را مینیمم سازد. نقاط تقاطع منحنی  $\phi$  برای پارامترهای مود  $m$  و  $m + 1$  مقادیر بحرانی نسبت هندسی صفحه را می دهند [15].

$$(r_{cr})_m = \left[ \frac{m^2 \bar{m}^2 (U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta)}{U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (11.2.54)$$

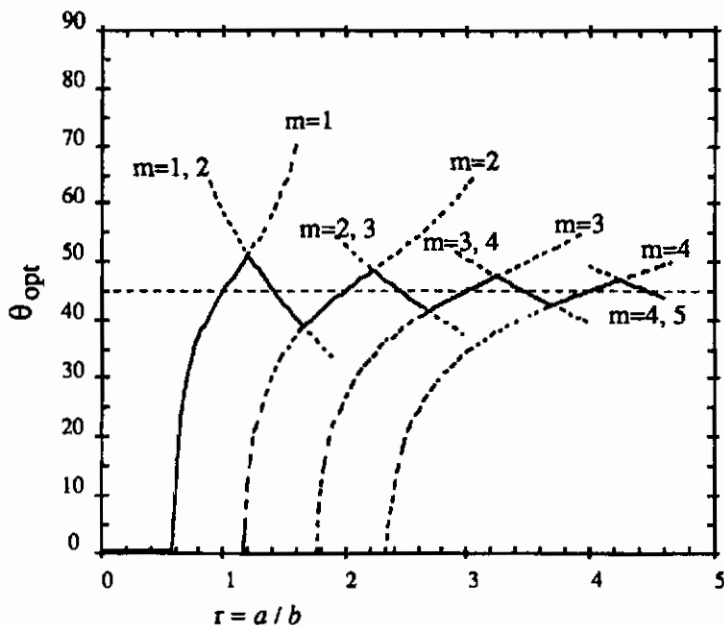
که  $\bar{m} = m + 1$  عدد موج شکل مود مجاور است. با این همه، میکی [15] توضیح داد که در محدوده،  $(r_{cr})_m < r < (r_{cr})_{m+1}$ ، چند لایه هایی که با فرض شکل مود برابر  $m$  طراحی می شوند به چند لایه ای منجر می شوند که بار کمانشی کمتری را در ارتباط با مود  $\bar{m}$  دارند. به طور مشابه، چند لایه هایی که با فرض شکل مود برابر  $\bar{m}$  طراحی می شوند، چند لایه ای را با بار کمانشی کمتر در ارتباط با مود  $m$  به وجود می آورند. این مسأله بازگو کننده این است که بارهای کمانشی در بهین مانند هم هستند. در محدوده  $r$  که دو مود متوالی به طور همزمان فعال هستند، مقدار بهینه جهت الیاف از  $\phi(m) = \phi(\bar{m})$  و از رابطه زیر به دست می آید:

$$\cos 2\theta = \frac{U_2(r^4 + m^2 \bar{m}^2) \pm \sqrt{U_2^2(r^4 + m^2 \bar{m}^2)^2 - 8U_3(U_1 - U_3)(r^4 - m^2 \bar{m}^2)^2}}{4U_3(r^4 - m^2 \bar{m}^2)}. \quad (11.2.55)$$

جهت بهین الیافها، با در نظر گرفتن تعامل مودهای مجاور، برای ماده مرکب T300/5208 گرافیت/اپوکسی به عنوان تابعی از نسبت هندسی صفحه در شکل ۱۱.۲.۵ نشان داده شده است. برای نسبت های طول به عرض بزرگتر از واحد، زاویه بهین حول 45 درجه نوسان می کند. دامنه نوسان با افزایش نسبت هندسی  $r$ ، کاهش می یابد، بنابراین، در عمل و برای نسبت های هندسی  $r > 4$  زاویه بهین را می توان  $\theta_{opt} = 45$  درجه فرض کرد.

اگر چند لایه ای تحت بارگذاری فشاری در دو محور است [20]، برای نسبت های طول به عرض کوچک،  $r < 1.5$ ، زاویه الیاف بهین مشابه حالت فشاری تک محوری است. برای نسبت های طول به عرض بزرگتر

بخش ۱۱.۲: طراحی چند لایه ۵۷۳



شکل ۱۱.۲.۵ جهت تک لایه بهین، به عنوان تابعی از نسبت طول به عرض صفحه

از ۱.۵، مقدار زاویه بهین با افزایش نسبت بار عرضی به بار محوری ( $N_y/N_x$ ) به سرعت افزایش می یابد. برای  $N_y \geq 4N_x$ ، جهت الیاف بهین ۹۰ درجه است.

اهمیت ترتیب چیدمان لایه ها: هنگامی که متغیرهای طراحی ضخامت تک لایه استفاده می شود، ترتیب چیدمان از قبل انتخاب شده است. مانند بارهای صفحه ای، طراحی بهین می تواند بسته به این که جهت تک لایه خاصی اضافه شود یا نشود، متأثر شود. با این وجود، در پاسخ خمس، ترتیب چیدمان مهمتر است، زیرا به شدت ماتریس  $D$  را تحت تأثیر قرار می دهد، در صورتی که ماتریس  $A$  را متأثر نمی کند. خوشبختانه، همچنان که در زیر نشان داده خواهد شد، طرح بهین نسبت به ترتیب چیدمان حساسیت ندارد.

اگر موقعیت نسبی مرزهای بین تک لایه ها برای یک چند لایه با  $N$  لایه  $\xi_k = z_k/h$  باشد، آن گاه:

$$-\frac{1}{2} \leq \xi_{k-1} < \xi_k < \xi_{k+1} \leq \frac{1}{2}, \quad (k = 1, \dots, N-1); \quad (11.2.56)$$

مشتق  $\phi$  نسبت به متغیر مرز تک لایه عبارت است از:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_k} = \frac{\partial d_{11}}{\partial \xi_k} + 2\eta^2 \left( \frac{\partial d_{12}}{\partial \xi_k} + 2 \frac{\partial d_{66}}{\partial \xi_k} \right) + \eta^4 \frac{\partial d_{22}}{\partial \xi_k} = 0. \quad (11.2.57)$$

۵۷۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

از آن جا که تأثیر گذاری تک لایه ها در ماتریس  $D$  کلی تنها به فاصله تک لایه با صفحه میانی بستگی دارد، مشتق ماتریس  $D$  به شکل زیر بیان می شود:

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial \xi_k} = \xi_k^2 (D_{ij_k} - D_{ij_{k+1}}) . \quad (۱۱.۲.۵۸)$$

در این جا  $D_{ij_k}$  تنها به خواص و جهت لایه  $k$  ام بستگی دارد (فرض می شود لایه های مجاور از مواد یکسانی ساخته شده اند و جملات  $U$  ثابت حذف می شوند) و به شکل زیر تعریف می شود.

$$D_k = h^3 \begin{bmatrix} U_2 \cos 2\theta_k + U_3 \cos 4\theta_k & -U_3 \cos 4\theta_k & 0 \\ -U_3 \cos 4\theta_k & -U_2 \cos 2\theta_k + U_3 \cos 4\theta_k & 0 \\ 0 & 0 & -U_3 \cos 4\theta_k \end{bmatrix} . \quad (۱۱.۲.۵۹)$$

آن گاه، همچنان که توسط چنگ کنگتنگ<sup>۱</sup> [19] نشان داده شد، مشتق تابع  $\phi$  را می توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_k} = 2(\xi_k^2) \left[ -U_2(1 - \eta^4) - 2U_3(1 - 6\eta^2 + \eta^4)(\cos 2\theta_k + \cos 2\theta_{k+1}) \right] (\cos 2\theta_k - \cos 2\theta_{k+1}) . \quad (۱۱.۲.۶۰)$$

از آن جا که علامت مشتق  $\phi$  مستقل از موقعیت مرز است، بسته به علامت مشتق، ماکزیمم یا مینیمم ضخامت را برای لایه  $k$  ام انتخاب می کنیم. به عنوان مثال، اگر  $\frac{\partial \phi}{\partial \xi_k} > 0$  باشد از  $\xi_k = \xi_{k_{\max}}$  استفاده می کنیم تا بار کمانش را ماکزیمم کنیم. افزون بر این، بعضی از ترکیبهای خاص جهت های تک لایه همسایه منجر به مقادیر ایستا برای  $\phi$  می شوند، معادله (۱۱.۲.۶۰) را ببینید، که نشان دهنده احتمال وجود مینیمم های محلی است. این ریشه ها عبارتند از:

$$|\theta_k| = |\theta_{k+1}| , \quad (۱۱.۲.۶۱)$$

$$\cos 2\theta_k + \cos 2\theta_{k+1} = \frac{1}{2} \frac{U_2 (\eta^4 - 1)}{U_3 (1 - 6\eta^2 + \eta^4)} . \quad (۱۱.۲.۶۲)$$

اگر ضخامت کل دو لایه ثابت نگه داشته شود، مشتق برای این زوایا صفر است و به محل مرز در بین لایه ها بستگی ندارد. بنابراین بار کمانش از توزیع ضخامت لایه های مجاور مستقل است. افزون بر این، برای یک چند لایه مربع شکل،  $\eta = 1$ ،  $\phi$  در

بخش ۱۱.۳: طراحی ترتیب چیدمان ۵۷۵

$$\theta_{k+1} = \frac{\pi}{2} - \theta_k, \quad (11.2.63)$$

ثابت است و به خواص ماده بستگی ندارد.

شین<sup>۱</sup> و دیگران نشان دادند [22] که برای یک چند لایه متقارن با ضخامت کل ثابت، ترتیب جهات تک لایه ها نیز می تواند به هر شکل دلخواه باشد بدون این که ماتریس D تغییر کند (تمرین ۳ را ببینید). البته ضخامت هر یک از تک لایه ها تغییر می کند. در عمل، این که تک لایه ها باید عدد صحیح باشند، ماتریس D را مجبور به تغییر می نماید، ولی اگر ضخامت کل نسبت به ضخامت زاویه تک لایه بزرگ باشد، این اثر کم خواهد بود. این موضوع در جدول ۱۱.۲.۲ که از [22] گرفته شده دیده می شود که در آن شش ترتیب چیدمان صفحه از تک لایه های 0، 90 و 45 نشان داده شده است. ضخامت کل تمامی شش ترتیب چیدمان یکسان است (که به یک نرمال سازی شده) و همگی ماتریس D و بار کماتش یکسانی دارند. اگر تعداد کل تک لایه ها 50 باشد، بارهای کماتش شش چند لایه کمتر از یک درصد تغییر می کنند (مرجع 22 را ببینید).

جدول ۱۱.۲.۲ طراحیهای بهینه ماتریس D معادل

ترتیب چیدمان	$t_1$	$(t_1^1)$	$t_2$	$(t_2^1)$	$t_3$	$(t_3^1)$
0/90/45	0.0366 (0.04)	0.1539 (0.16)	0.8095 (0.80)			
0/45/90	0.0366 (0.04)	0.2496 (0.24)	0.7139 (0.72)			
45/0/90	0.2228 (0.20)	0.0634 (0.08)	0.7139 (0.72)			
45/90/0	0.2228 (0.20)	0.3044 (0.32)	0.4729 (0.48)			
90/45/0	0.1399 (0.12)	0.3872 (0.40)	0.4729 (0.48)			
90/0/45	0.1399 (0.12)	0.0506 (0.04)	0.8095 (0.84)			

<sup>†</sup> ضخامت تک لایه ها چنان گرد شده اند که تعداد کل لایه های چند لایه برابر 50 باشد.

همچنین هر گاه مسأله استحکام مطرح باشد، عدم حساسیت طراحی به نوع ترتیب چیدمان از بین می رود. در چنین حالتی، ترتیب چیدمان بسیار مهم است و در بخش بعدی راجع به آن بحث می شود.

### ۱۱.۳ طراحی ترتیب چیدمان

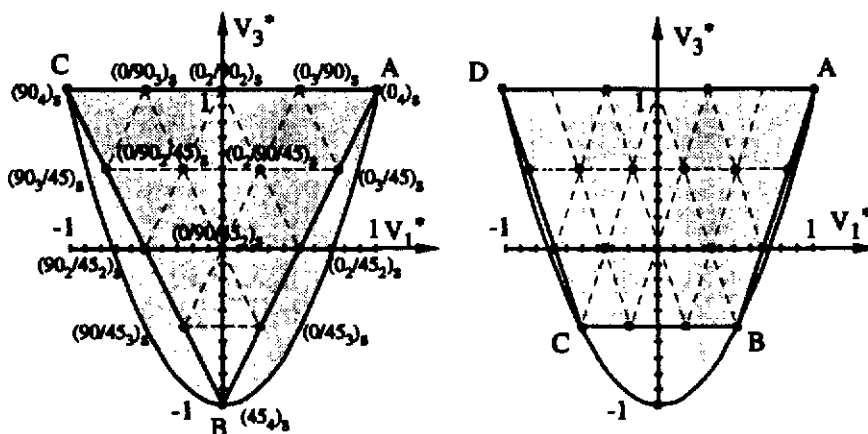
روشهایی که در بخش قبلی ارائه شدند، به نتایجی ختم شدند که برای فهم مسائل اساسی در طراحی مواد مرکب لایه ای ارزشمند بود. با این وجود، یکی از دشواریهای اساسی در یک طراحی واقعی نیاز به داشتن چند لایه است که در حالت کلی از تک لایه هایی با تنها جهتهای 0، 90 و  $\pm 45$  (و یا گاهی با جهتهایی با

1) Shin

نمر ۱۵ درجه بین ۰ و ۹۰ درجه) ساخته شده باشند، و ضخامتهای آنها ضریب صحیحی از ضخامت تک لایه ها باشد. البته، تصمیم در مورد تعداد تک لایه با جهت مشخص برای تعریف یک چند لایه کافی نیست، بلکه موقعیت آن تک لایه در ضخامت نیز باید مشخص شود. این بدین معنی است که مسأله طراحی اساسی این است که ترتیب چیدمان ماده مرکب چند لایه مشخص شود- مسأله ای که نیاز به فنون برنامه ریزی گسسته دارد. در ادامه، روشهای مختلفی که این مسأله را عنوان می کنند معرفی می کنیم.

### ۱۱.۳.۱ طراحی ترتیب چیدمان به روش ترسیمی

نمودارهای پارامتر لایه که در بخش ۱۱.۲ معرفی شدند را می توان برای طراحی چند لایه هایی با جهت زاویه تک لایه از قبل تعیین شده به کار برد. میکی و سوگیاما<sup>۱</sup> [23] نشان دادند که ناحیه قابل قبول برای چند لایه ها با زاویه تک لایه ثابت یک چند ضلعی است که نقاط رأس آن روی پوش نمودار پارامتر لایه قرار دارد. اگر نقطه طراحی در دور نمودار بود، چند لایه یک چند لایه زاویه ای با یک جهت الیاف می باشد. بنابراین، با یک مجموعه اعداد صحیح جهت تک لایه، رأسهای چند ضلعی در موقعیتهایی قرار می گیرند که مربوط به زوایای انتخاب شده می باشد. به عنوان مثال، فضای طراحی برای چند لایه ساخته شده از تک لایه های با جهت های ۰،  $\pm 45$  و ۹۰ درجه و ۰،  $\pm 30$ ،  $\pm 60$  و ۹۰ درجه به ترتیب در شکل های ۱۱.۳.۱a و ۱۱.۳.۱b نشان داده شده است. برای چند لایه هایی با تک لایه ۰،  $\pm 45$  و ۹۰



تک لایه های ۰،  $\pm 45$  و ۹۰ درجه a) تک لایه های ۰،  $\pm 60$ ،  $\pm 30$  و ۹۰ درجه b)

شکل ۱۱.۳.۱ نمودار لایه صفحه ای برای چند لایه هایی با زاویه تک لایه صحیح

## بخش ۱۱.۳: طراحی ترتیب چیدمان ۵۷۷

درجه، فضای طراحی یک مثلث با نقاط رأس A، B و C است همچنان که در شکل دیده می شود. برای جهتهای تک لایه 0،  $\pm 30$ ،  $\pm 60$  و 90 درجه، فضای طراحی یک دوزنقه است.

نقاط واقع شده در کناره ها و نقاط داخلی چند ضلعی مربوط به چند لایه هایی است که از دو جهت تک لایه یا بیشتر ترکیب شده اند و تعداد آنها از تعداد کل لایه ها در چند لایه به دست می آید. اگر تعداد کل لایه ها  $N$  و  $I = N/2$  باشد، آن گاه علاوه بر رأسها،  $I - 1$  نقطه طراحی با فاصله یکسان از هم در کناره ها و روی خطهای داخلی اتصالی دو رأس به دست می آوریم. از نقاطی که در کناره ها به دست می آوریم، خطوطی به موازات خطوط اتصالی رأسها می کشیم. اگر آن خطوط در یک نقطه طراحی گسسته دیگری در آن طرف چند ضلعی قطع شود، آن گاه با توجه به طراحیهای که در دو انتها قرار گرفته اند به سادگی می توان طراحی هایی که در داخل قرار می گیرند نام گذاری کرد. به عنوان مثال، برای یک چند لایه هشت لایه ای (در کل) با زوایای 0،  $\pm 45$  و 90 درجه (فضای طراحی مثلثی)، پنج نقطه طراحی با فاصله های یکسان از هم وجود دارد که جهت الیاف آنها به شکل نموی از یک رأس به رأس دیگر تغییر می کند، همچنان که در شکل ۱۱.۳.۱۲ دیده می شود. توجه کنید که نقاط طراحی در داخل ناحیه مثلثی یک ترکیب نموی دارند، ولی ترکیبی از سه زاویه در دسترس دارند. نقاط طراحی برای مواد مرکب چند لایه ای با شش لایه در شکل ۱۱.۳.۱۳ نشان داده شده است. نام گذاری آن طراحی ها به عهده خوانندگان گذاشته می شود (تمرین ۴ را ببینید).

دقیقاً مانند نمودار لایه چینی صفحه ای، می توان برای چند لایه ای با جهت الیاف مشخص، نمودار لایه چینی خمشی را ترسیم کرد. مرزهای فضای طراحی مانند پارامترهای صفحه ای اند، زوایای در نظر گرفته شده، روی پوش نمودار لایه قرار می گیرند و رأسهای یک چند ضلعی را تشکیل می دهند. با این وجود، در این حالت نقاط طراحی که ترکیبی از زوایای داده شده اند، با فاصله یکسان از هم قرار ندارند (هر چند ترکیب زوایای مربوط به دو رأس باز هم روی کناره ای که این رأسها را به هم متصل می کند قرار می گیرد) ولی محل قرار گرفتن آنها از رابطه (۱۱.۳.۴۰) تبعیت می کند.

## ۱۱.۳.۲ رابطه سازی تابع جریمه

طراحی کماتش: روشی که در بخش ۵.۷.۴ در مورد استفاده از تابع جریمه برای رسیدن به طرحهایی با متغیرهای طراحی گسسته تشریح شد، اینک در این بخش برای ماکزیمم سازی کماتش مواد مرکب چند

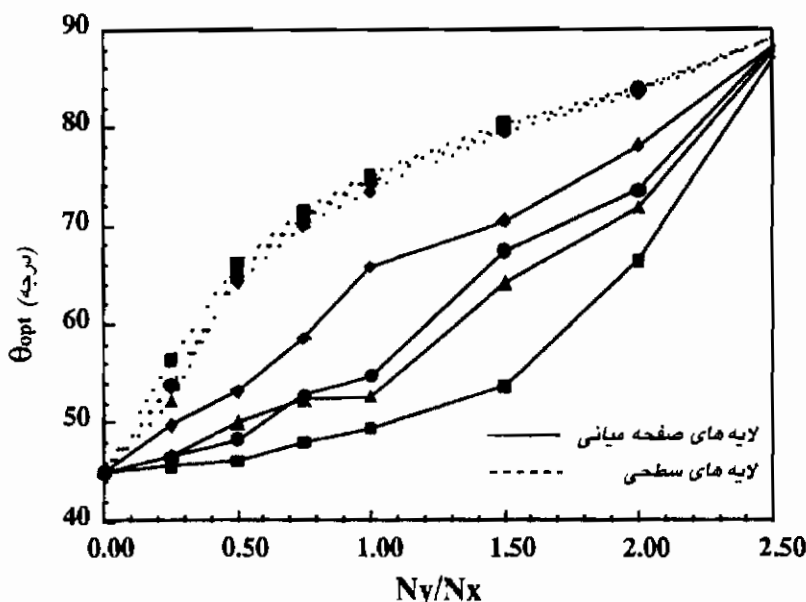


۵۷۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

لایه هایی با متغیر جهت الیاف توضیح داده می شود. به منظور داشتن نتایجی که بتوان آنها را با متغیرهای جهت تصحیح مقایسه کرد، یک سری از نتایج برای مسائل پیوسته تولید شده است، مرجع گوردال و هفتکه<sup>۱</sup> [24] را ببینید. این نتایج با در نظر نگرفتن جمله جریمه برای مقادیر غیر گسسته متغیرهای طراحی به دست آمده است.

مسائل برای صفحات مستطیلی با  $a = 20 \text{ in}$  و  $b = 10 \text{ in}$  ( $50.8 \text{ cm} \times 25.4 \text{ cm}$ ) و با تعداد مشخص تک لایه و جهت الیاف به عنوان متغیرهای طراحی حل شده اند. مقادیر ویژه بحرانی برای بار فشاری اعمال شده  $N_x = 1$  و نسبت  $N_y/N_x$  متغیر ماکزیمم شده اند.

صفحات با چهار ضخامت مختلف به صورت چند لایه هایی با ۸، ۱۲، ۱۶ و ۲۴ لایه طراحی شده اند. جهت بهین الیاف لایه سطحی (که با خط چین نشان داده شده)، و لایه های مجاور صفحه میانی (خطوط پر) در شکل ۲. ۳. ۱۱ برای هر چهار چند لایه نشان داده شده است. برای فشار تک محوری،  $N_y = 0$  یا  $N_x = 0$  (یا  $N_y/N_x > 2.5$ ) مواد مرکب لایه ای در تمام ضخامت جهت الیاف مشابهی دارند که به ترتیب  $\pm 45^\circ$  درجه و  $90^\circ$  درجه اند. برای نسبت بار میانی، زاویه الیافها در لایه های سطحی از لایه های



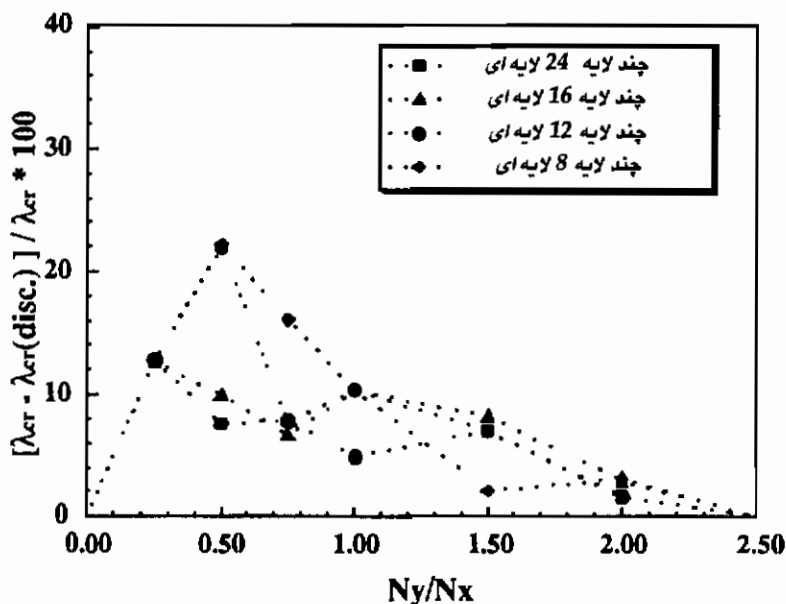
شکل ۲. ۳. ۱۱ جهت های الیاف (پیوسته) بهین برای ماکزیمم شدن بار کماتش

## بخش ۱۱.۳: طراحی ترتیب چیدمان ۵۷۹

صفحات میانی بزرگتر است و این اختلاف در چند لایه ۲۴ لایه ای بیشترین است. با این همه، جهت الیاف لایه های سطحی تنها به نسبت بار بستگی دارد و نه به ضخامت چند لایه.

سپس، همان طراحی با جهت های الیاف گسسته ۰،  $\pm 45$  و ۹۰ تکرار شده است. جوابها از روش تابع جریمه به دست آمده و توسط روش شاخه و کران که در بخش ۱۱.۳.۳ تشریح شد بررسی شده است. لایه های با زاویه  $+45$  درجه باید در مجاورت لایه های  $-45$  درجه باشند تا همبستگی خمشی- پیچشی مینیمم شود. برای روش تابع جریمه نیز بهتر است که لایه های با زاویه ۰ و ۹۰ درجه به صورت جفتی باشند. نمودارهای درصد کاهش بار کمانش یا محدودیت گسسته بودن جهت برای چهار چند لایه مختلف در شکل ۱۱.۳.۳ نشان داده شده است. طراحیهای با مقادیر گسسته، با کاهش بار کمانش، دست کم روی بخشی از محدوده نسبت بار در نظر گرفته شده، همراهند. بیشترین جریمه برای  $N_y/N_x = 0.5$  (حدود ۲۲٪ کاهش) در چند لایه های نازک ۸ و ۱۲ لایه بود. با این همه، کاهش بار کمانش مربوط به ضخامتهای مختلف کاملاً اتفاقی به نظر می رسد.

چیدمانی که برای متغیرهای طراحی با مقادیر گسسته به دست آمد برای چند لایه های ۸ و ۱۶ لایه در



شکل ۱۱.۳.۳ کاهش بار کمانش برای چند لایه هایی با لایه های ۰،  $\pm 45$  و ۹۰ درجه

### ۵۸۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

جدول ۱۱.۳.۱ و ۱۱.۳.۲ داده شده اند. در جدول ترتیب چیدمان برای متغیرهای طراحی پیوسته، متغیرهای گسسته که با استفاده از روش تابع جریمه به دست آمده، و طراحی بهینه فراگیر نیز آمده است. اگر طراحی به دست آمده از روش تابع جریمه، با طراحی بهین فراگیر یکسان باشد، در ستون مربوط به طراحی فراگیر چیزی نوشته نمی شود. روش تابع جریمه در بعضی از موارد نمی تواند به بهین فراگیر برسد به خصوص هنگامی که تعداد لایه های چند لایه زیاد باشد. در هر حالت، طراحی با متغیرهای گسسته که از روش توابع جریمه به دست آمده اند یک چیدمان مشخصی را دنبال می کنند که در آن جهت های لایه های خارجی بزرگتر از جهت های مربوط به لایه های نزدیک به صفحه میانی اند که شبیه به همان حالتی است که در طراحی با متغیر پیوسته مشاهده شد. از طرف دیگر، طراحی های بهینه فراگیر، جهت هایی که اتفاقی ترند دارند. تفاوت در بارهای کماتش تا حدود ۱۴٪ است و این تفاوت خطر جستجو برای بهین گسسته حول بهین پیوسته را گوشزد می کند.

جدول ۱۱.۳.۱ ترتیب چیدمان بهینه برای چند لایه های ۸ لایه تحت بارهای فشاری دو محوره

$\frac{N_x}{N_y}$	بهین پیوسته	روش تابع جریمه	بهین فراگیر
0.0	$[\pm 45]_{2s}$	$[\pm 45]_{2s}$	-
0.25	$[\pm 53.7 / \pm 49.8]_s$	$[\pm 45]_{2s}$	$[\pm 45/90]_{2s}$
0.50	$[\pm 64.3 / \pm 53.2]_s$	$[\pm 45]_{2s}$	$[\pm 45/90]_{2s}$
0.75	$[\pm 70.0 / \pm 58.6]_s$	$90_2 / \pm 45]_s$	-
1.00	$[\pm 73.5 / \pm 65.8]_s$	$90_2 / \pm 45]_s$	-
1.50	$[\pm 79.4 / \pm 70.5]_s$	$90_2 / \pm 45]_s$	-
2.00	$[\pm 83.4 / \pm 78.1]_s$	$90_2 / \pm 45]_s$	-
2.50	$[\pm 89.2 / \pm 88.4]_s$	$90_4]_{4s}$	-

جدول ۱۱.۳.۲ ترتیب چیدمان بهینه برای چند لایه های ۱۶ لایه ای تحت بارهای فشاری دو محوره

$\frac{N_x}{N_y}$	بهین پیوسته	روش تابع جریمه	بهین فراگیر
0.0	$[\pm 45]_{4s}$	$[\pm 45]_{4s}$	-
0.25	$[\pm 52.2 / \dots / \pm 46.5]_s$	$[\pm 45]_{4s}$	$[\pm 45_2/90_4]_s$
0.50	$[\pm 65.3 / \dots / \pm 60.0]_s$	$90_2 \pm 45_3]_s$	$[\pm 45/90]_{6s}$
0.75	$[\pm 70.9 / \dots / \pm 52.3]_s$	$90_2 / \pm 45_3]_s$	$90_2 / \pm 45_2/90_2]_s$
1.00	$[\pm 74.9 / \dots / \pm 52.6]_s$	$90_4 / \pm 45_2]_s$	$90_2 / \pm 45/90_4]_s$
1.50	$[\pm 80.0 / \dots / \pm 64.1]_s$	$90_6 / \pm 45]_s$	$90_4 / \pm 45_2]_s$
2.00	$[\pm 83.9 / \dots / \pm 71.8]_s$	$90_6 / \pm 45]_s$	$90_4 / \pm 45/90_2]_s$
2.50	$[\pm 89.2 / \dots / \pm 87.9]_s$	$90]_{8s}$	-

## ۳. ۱۱.۳. رابطه سازی برنامه ریزی خطی عدد صحیح

انتگرالهای نرمال سازی شده که در روش ترسیمی به عنوان متغیرهای طراحی استفاده شدند (معادلات (۱۱.۲.۱۴) و (۱۱.۲.۳۹) را ببینید) ممکن است یک انتخاب خوب برای مسائل طراحی کلی تر نباشند. به منظور تعریف انتگرالهایی که برای بیان ویژگیهای یک چند لایه لازم است، یک دسته از متغیرهای جدید که وجود یک لایه با جهت مشخص و یا جهت یک لایه مشخص را تعریف می کند توسط هفتکه و والش<sup>۱</sup> [25] ارائه شد. چنین متغیرهایی متغیرهای طراحی شناسایی تک لایه نامیده می شوند. به عنوان مثال، اگر امکان چهار جهت قرار گرفتن لایه ها را داشته باشیم و  $N$  تک لایه، می توانیم برای تعریف ترتیب چیدمان  $N$  متغیر طراحی که مقادیر ۱ تا ۴ می گیرند را تعریف کنیم. اگر از تقارن استفاده شود این عدد به  $N/2$  کاهش می یابد.

استفاده از متغیرهای طراحی شناسایی لایه صفر و یک نیز امکان پذیر است. به عنوان مثال، اگر لایه ها از تک لایه های ۰، ۹۰ و  $\pm 45$  درجه ساخته شده باشد، ترتیب چیدمان را می توان بر حسب چهار دسته از متغیرهای شناسایی جهت تک لایه  $n_i, o_i, f_i^p, f_i^m$  با  $i = 1, \dots, N/2$  تعریف کرد که اعداد صحیح صفر و یکند. اگر به ترتیب تک لایه ۰، ۹۰، ۴۵ یا ۴۵- در  $i$  امین لایه وجود داشته باشد، متغیرهای  $n_i, o_i, f_i^p$  یا  $f_i^m$  برابر با یکند.

مزایای استفاده از این متغیرهای شناسایی صفر و یک این است که انتگرالها، و در نتیجه ماتریسهای  $A$  و  $D$  توابع خطی از این متغیرهایند. انتگرالهای  $V_{0A}, V_{1A}, V_{3A}$  بر حسب متغیرهای شناسایی تک لایه و ضخامت یک تک لایه  $t$  به شکل زیر خواهند بود:

$$V_{0A} = \int_{-h/2}^{h/2} dz = 2t \sum_{k=1}^{N/2} (o_k + n_k + f_k^p + f_k^m),$$

$$V_{1A} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta dz = 2t \sum_{k=1}^{N/2} (o_k - n_k), \quad (11.3.1)$$

$$V_{3A} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta dz = 2t \sum_{k=1}^{N/2} (o_k + n_k - f_k^p - f_k^m).$$

برای پاسخ خمشی، انتگرالهای  $V_{0D}, V_{1D}, V_{3D}$  به شکل زیر بیان می شوند:

$$V_{0D} = \frac{2t^3}{3} \sum_{k=1}^{N/2} p_k \left[ \left( \frac{z_k}{t} \right)^3 - \left( \frac{z_{k-1}}{t} \right)^3 \right] = \frac{2t^3}{3} \sum_{k=1}^{N/2} [k^3 - (k-1)^3] (o_k + n_k + f_k^p + f_k^m),$$

$$V_{1D} = \frac{2t^3}{3} \sum_{k=1}^{N/2} p_k \cos 2\theta_k \left[ \left( \frac{z_k}{t} \right)^3 - \left( \frac{z_{k-1}}{t} \right)^3 \right] = \frac{2t^3}{3} \sum_{k=1}^{N/2} [k^3 - (k-1)^3] (o_k - n_k),$$

$$V_{3D} = \frac{2t^3}{3} \sum_{k=1}^{N/2} p_k \cos 4\theta_k \left[ \left( \frac{z_k}{t} \right)^3 - \left( \frac{z_{k-1}}{t} \right)^3 \right] = \frac{2t^3}{3} \sum_{k=1}^{N/2} [k^3 - (k-1)^3] (o_k + n_k - f_k^p - f_k^m),$$

(۱۱.۳.۲)

که  $f_k^m$  و  $f_k^p$  در عبارت  $V_{1D}$  و  $V_{3D}$  ظاهر نشده اند چون کسینوس 90 درجه برابر صفر است. متغیر  $p_k$  در

معادله (۱۱.۳.۲) اگر لایه کام اشغال شده باشد برابر واحد و اگر خالی باشد برابر صفر است.

ترتیب چیدمان برای طراحی کمانش: از آن جا که بار کمانش برای چند لایه های متقارن تحت تأثیر بارهای دو محوری یک تابع خطی از پارامتر لایه خمشی است که خود توابع خطی از متغیرهای شناسایی تک لایه اند (معادلات (۱۱.۳.۳۲) و (۱۱.۲.۴۸) را ببینید)، بنابراین مسأله یک مسأله برنامه ریزی خطی صحیح است.

رابطه سازی مسأله بهینه سازی به دو گونه امکان پذیر است. یک رابطه سازی این است که چند لایه با یک ضخامت مشخص برای ماکزیمم شدن بار کمانش بهینه سازی شود، و دومین رابطه سازی عبارت است از بهینه سازی چند لایه برای مینیمم شدن ضخامت در یک بار کمانش مشخص. برای مسأله بهینه سازی اول، پایین ترین بار کمانش  $\lambda^*$  برای مقادیر  $m$  و  $n$  ماکزیمم می شود. تابع هدف  $\lambda^*$  یک تابع هموار از متغیرهای طراحی نیست، و ابزار استاندارد (بخش ۴.۲ را ببینید) برای مرتفع کردن این مسأله این است که  $\lambda^*$  به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شود که باید کمتر یا مساوی هر  $\lambda_{cr}(m, n)$  باشد. بنابراین مسأله بهینه سازی به شکل زیر رابطه سازی می شود:

$$\begin{aligned} & \lambda^*, \quad o_i, n_i, f_i^p, f_i^m, \quad i = 1, \dots, N/2, \\ & \lambda^* \text{ باقیود} \\ & \lambda^* \leq \lambda_{cr}(m, n), \quad m = 1, \dots, m_f, \quad n = 1, \dots, n_f, \\ & o_i + n_i + f_i^p + f_i^m = 1, \quad i = 1, \dots, N/2, \quad (11.3.3) \\ & \text{و} \\ & \sum_{i=1}^{N/2} f_i^p - f_i^m = 0. \quad \text{ماکزیمم شود} \end{aligned}$$

## بخش ۱۱.۳: طراحی ترتیب چیدمان ۵۸۳

ماکزیمم سازی روی  $m$  و  $n$  با بررسی تمامی مقادیر  $m$  بین ۱ و  $m_f$  و تمامی مقادیر  $n$  بین ۱ و  $n_f$  صورت می پذیرد. قید آخر در معادله (۱۱.۳.۳) این اطمینان را به وجود می آورد که تعداد لایه های ۴۵ درجه و ۴۵- درجه یکسان باشد و به عبارت دیگر چند لایه متوازن باشد. مسأله بهینه سازی معادله (۱۱.۳.۳) یک مسأله برنامه ریزی خطی صحیح است و روش های ارائه شده در بخش ۹.۳ می تواند در مورد آنها به کار گرفته شود.

برای مسأله دوگان مینیمم سازی وزن یک چند لایه که قادر باشد بار مشخصی را بدون کمانش کردن تحمل کند، تعداد کل لایه ها باید متغیر طراحی باشد. این به نظر مغایر با استفاده از متغیرهای شناسایی تک لایه به عنوان متغیر طراحی است که در آن باید  $N$  از پیش معلوم باشد. یک چاره جویی برای این مغایرت، این است که با یک تعداد لایه به اندازه کافی زیاد شروع کرد که طراحی اولیه کمانش نکند، ولی اجازه دهد که بعضی از تک لایه ها خالی باشند ( $o_i + n_i + f_i^p + f_i^m \leq 1$ ). البته، تک لایه هایی که اجازه داده می شود خالی باشند باید لایه های خارجی چند لایه باشند تا کلیت چند لایه حفظ شود. رابطه سازی به شکل زیر خواهد بود.

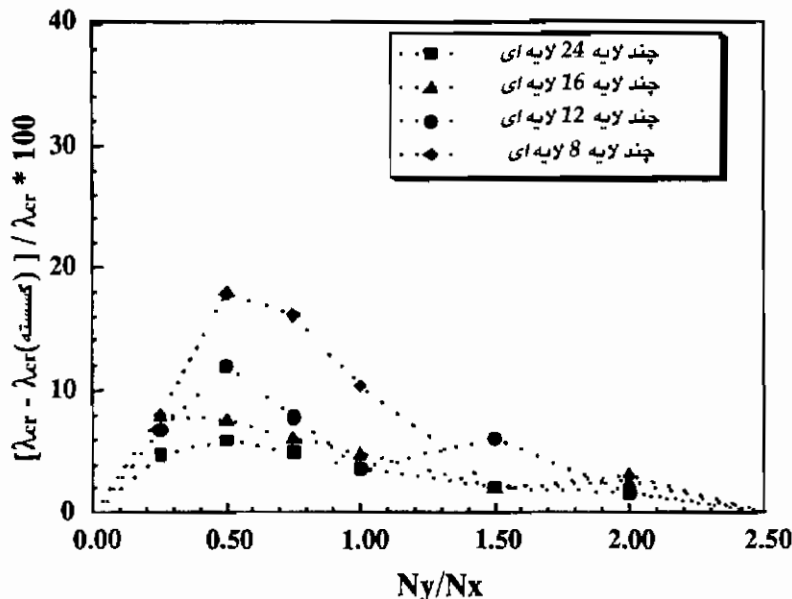
$$(11.3.4) \quad \begin{aligned} & \text{را چنان بیاید که } o_i, n_i, f_i^p, f_i^m, \quad i = 1, \dots, N/2, \\ & \text{مینیمم شود در صورتی که قیود} \quad \sum_{i=1}^{N/2} (o_i + n_i + f_i^p + f_i^m) \\ & \lambda_{cr}(m, n) \geq 1, \quad m = 1, \dots, m_f, \quad n = 1, \dots, n_f, \\ & o_i + n_i + f_i^p + f_i^m \leq 1, \quad i = 1, \dots, N/2, \\ & \sum_{i=1}^{N/2} f_i^p - f_i^m = 0, \\ & o_i + n_i + f_i^p + f_i^m \leq o_{i-1} + n_{i-1} + f_{i-1}^p + f_{i-1}^m. \end{aligned}$$

که قید آخر جهت اطمینان از این است که تک لایه خالی در لایه های خارجی چند لایه قرار داشته باشد. به طور کلی، جواب مسأله مینیمم سازی وزن یگانه نیست. برای طراحی کمترین وزن یک  $N^*$  لایه، می توان جهت الیافها را تغییر داد، به گونه ای که وزن یکسان باقی بماند ولی بار کمانش تغییر کند. خارج از طراحیهای قابل قبول، در حالت آرمانی، فرد ممکن است بخواهد آن طراحی را انتخاب کند که حاشیه امن بیشتری از نظر قید کمانش داشته باشد. این کار با کم کردن یک کسر کوچک از  $\lambda_{cr}$  تابع هدف

## ۵۸۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

امکان پذیر است که در نتیجه آن تابع هدف بهبود یافته عمل دوگانه مینیمم سازی وزن و ماکزیمم سازی بار کمانش را همزمان انجام می دهد. برای نتایج طراحیهای مینیمم سازی وزن، خواننده را به مرجع هفته و والش [25] ارجاع می دهیم. در بند بعدی، نتایج ماکزیمم سازی کمانش ارائه می شود.

برای نتایج ارائه شده در این بخش، حل معادله (۳.۳.۱۱) توسط برنامه لیندو [26] به دست آمده که از الگوریتم شاخه و کران بخش ۱.۹.۳ استفاده می کند. ابتدا حالت های بار دو محوری را که قبلاً در جدول ۱۱.۳.۱ و ۱۱.۳.۲ به عنوان بهین فراگیر گزارش شدند، ارائه می دهیم. نموداری مانند نمودار نشان داده شده در شکل ۱۱.۳.۳ برای طراحیهای بهین فراگیر که با استفاده از روش برنامه ریزی صحیح خطی به دست آمده جهت مقایسه در شکل ۱۱.۳.۴ نشان داده شده است. به طور کلی، در کاهش بار کمانش برای چند لایه ها مقدار کمی بهبود حاصل می شود. به عنوان مثال، بدترین کاهش بار کمانش (در مقایسه با متغیرهای طراحی پیوسته) برای چند لایه ۸ لایه ای برای نسبت  $N_y/N_x = 0.5$  است که ۱۸٪ در مقایسه با ۲۲٪ است. همچنین با اضافه شدن ضخامت چند لایه یک بهبود قاعده مندی



شکل ۱۱.۳.۴ کاهش بار کمانش برای چند لایه های بهینه با زوایای تک لایه ۰،  $\pm 45^\circ$  و  $90^\circ$  درجه

## بخش ۱۱.۳: طراحی ترتیب چیدمان ۵۸۵

وجود دارد. کمترین و بیشترین کاهش بار کمانش به ترتیب مربوط به چند لایه‌های 24 لایه و 8 لایه است.

هنگامی که تعداد تک لایه‌های مجاور هم با زاویه جهت یکسان زیاد است، مواد مرکب لایه‌ای ترک بر می‌دارند. بنابراین، بهتر است تعداد چنین تک لایه‌های محدود گردد. استفاده از چنین قیودی در طراحی به دست آمده برای  $N_y/N_z = 2$  را شرح می‌دهیم. با طراحی که در جدول ۱۱.۳.۲ ارائه شد شروع می‌کنیم  $[90_4 / \pm 45/90_2]$ ، که در آن قید این که تک لایه‌ها با جهات مختلف به صورت جفت ظاهر می‌شوند را اعمال کردیم. ضریب بار بحرانی برای این طراحی بهینه  $\lambda_{cr} = 36.19$  بود. اکنون این ضرورت را رها ساخته و صفحه را بار دیگر به گونه‌ای طراحی می‌کنیم که بتوانیم تک لایه‌های با جهات مختلف را در مجاورت هم داشته باشیم. این کار به طراحی که ۵ تک لایه 90 درجه دارد و  $[90_5 / +45 / -45/90]$  می‌انجامد. ضریب بار بحرانی برای این طراحی  $\lambda_{cr} = 36.84$  است که نسبت به طراحی که محدود به جفت ظاهر شدن هر جهت بود 1.8% افزایش نشان می‌دهد. این حقیقت که تک لایه‌های 45 درجه به صورت جفت ظاهر شوند، یک امر بدیهی و هماهنگ است. اکنون ضرورت مجاور بودن تک لایه‌ها را با قید زیر اعمال می‌کنیم.

$$n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 \leq 4. \quad (11.3.5)$$

طراحی به دست آمده با این قید عبارت است از  $[90_4 / +45/90_2 / -45]$  و نسبت به طراحی قبلی یک ضریب بار کمی کوچکتر دارد  $\lambda_{cr} = 36.59$ . با این همه، نسبت به طراحی جدول ۱۱.۳.۲ باز هم ضریب بار کمی بزرگتر دارد ولی این ضرورت را که زوایای زاویه دار با محور باید به صورت جفت ظاهر شوند را نقض می‌کند. با معرفی قیدی به شکل:

$$f_i^p - f_{i+1}^m = 0, \quad i = 1, 2, \dots, (I-1), \quad (11.3.6)$$

$$\text{که } f_1^m = 0, \quad \text{و } f_I^p = 0,$$

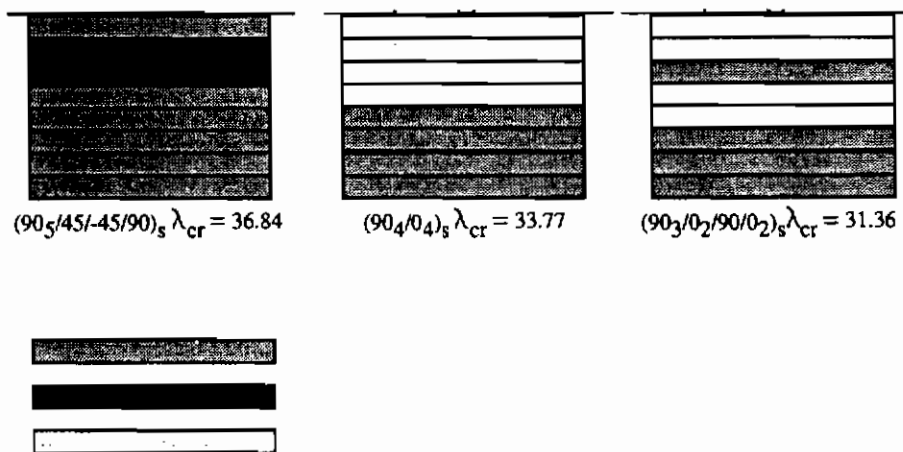
طراحی‌هایی که تک لایه 45 درجه دارند به صورت جفتهای مثبت و یا منفی می‌تواند به وجود آید بدون آن که لازم می‌باشد تک لایه‌های 0 و 90 درجه به صورت جفت باشند و تعداد تک لایه‌های با یک جهت یکسان از 4 بیشتر شود. در این حالت خاص، بار دیگر طراحی ارائه شده در جدول ۱۱.۳.۲ به دست می‌آید. طراحی سختی و کمانش: در بعضی از حالتها، لازم می‌آید که قیودی روی سختی صفحات اعمال



شود. به عنوان مثال، قیدی که لازم است مقدار مینیمم  $A_{11}$  برابر  $A_{11}^0$  باشد را می توان به شکل زیر نوشت:

$$A_{11}/A_{11}^0 - 1 \geq 0. \quad (11.3.7)$$

همان گونه که در [25] نشان داده شده، این قید را می توان به صورت یک تابع خطی از متغیرهای طراحی شناسایی تک لایه، مانند قید کمانش، نوشت. بنابراین، می توان آن را به عنوان یک قید در مسأله رابطه سازی شده به وسیله معادله (۱۱.۳.۳) استفاده کرد. اثر داشتن شرط سختی مینیمم برای  $N_y/N_x = 2$  بررسی می شود. لایه های بهین برای این حالت بیشتر از تک لایه های 90 درجه تشکیل شده و تنها ۱۶ درصد از کل لایه 0 درجه لایه سختی محوری  $A_{11}$  دارد. این شرط که  $A_{11}$  دست کم ۵۰ درصد از لایه های تک جهت باشد گذاشته شد، با در نظر گرفتن این که بیشتر از چهار لایه مجاور هم نباشند و یا باشند. نتیجه ها با طراحی اصلی در شکل ۱۱.۳.۵ مقایسه شده اند. می توان دید که شرط سختی با گذاشتن تک لایه های صفر درجه در نزدیکی صفحه تقارن که کمترین اثر را روی سختی خمشی و در نتیجه بار کمانش داشته باشد، تأمین شده است. کاهش بار کمانش حدود ۸ درصد است برای این طراحی اثر گذاشتن این شرط که بیش از ۴ تک لایه مجاور هم نباشند اثر قابل توجهی (حدود ۷ درصد) روی بار کمانش دارد.



شکل ۱۱.۳.۵ اثر شرط سختی روی طراحی مواد مرکب لایه ای

بخش ۱۱.۳: طراحی ترتیب چیدمان ۵۸۷

چیدمان برای طراحی مقاومت و کمانش: در غیاب بارهای برشی، کرنشهای لایه ها  $\epsilon_x$  و  $\epsilon_y$  را می توان (برای ضریب بار  $\lambda = 1$ ) از روابط زیر به دست آورد:

$$\epsilon_x = \frac{(A_{22}N_x - A_{12}N_y)}{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}, \quad \text{و} \quad \epsilon_y = \frac{(A_{11}N_y - A_{12}N_x)}{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}. \quad (11.3.8)$$

کرنش تک لایه تمام از انتقال زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned} \epsilon_1^k &= \cos^2 \theta_k \epsilon_x + \sin^2 \theta_k \epsilon_y, \\ \epsilon_2^k &= \sin^2 \theta_k \epsilon_x + \cos^2 \theta_k \epsilon_y, \\ \gamma_{12}^k &= \sin 2\theta_k (\epsilon_y - \epsilon_x). \end{aligned} \quad (11.3.9)$$

گرچه سختیهای کششی  $A_{ij}$  توابع خطی از متغیرهای طراحی اند، کرنشهای محاسبه شده از معادله (۱۱.۳.۸)، توابع غیر خطی از این متغیرهايند. این کرنشها آن گونه که ناگندرا<sup>۱</sup> و دیگران [27] نشان دادند با سری تیلور خطی برای  $A_{ij}$  می تواند خطی شوند. داریم:

$$\begin{aligned} \epsilon_L(\mathbf{x}) &= \epsilon(\mathbf{x}_0) + \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial A_{11}} \right)_{\mathbf{x}_0} (A_{11} - A_{11}^*) + \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial A_{12}} \right)_{\mathbf{x}_0} (A_{12} - A_{12}^*) \\ &\quad + \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial A_{22}} \right)_{\mathbf{x}_0} (A_{22} - A_{22}^*), \end{aligned} \quad (11.3.10)$$

که در آن  $\epsilon$  یک مؤلفه کرنش نمونه ( $\lambda = 1$ )،  $\epsilon_L$  تقریب خطی آن، و  $A_{ij}^*$  و  $A_{ij}$  سختیهای کششی محاسبه شده به ترتیب در نقطه طراحی اسمی  $\mathbf{x}_0$  و طراحیهای همسایه است. مشتقات کرنش نسبت به سختیهای کششی در نقطه طراحی اسمی بر حسب کرنشهای صفحه میانی و سختیهای کششی در طراحی اسمی محاسبه شده اند. بنابراین تقریب کرنش خطی می تواند در امتداد یک جهت الیاف خاص و در جهت عمود بر آن با ارزیابی کرنشهای  $\epsilon_1^k$ ،  $\epsilon_2^k$  و  $\gamma_{12}^k$  برای هر جهت (چون جهت از قبل انتخاب شده، یا 0 یا 45 درجه) بر حسب کرنشهای صفحه میانی با استفاده از معادله (۱۱.۳.۹) ساخته شود. به عنوان مثال، کرنشها در امتداد و عمود بر الیاف 45 درجه و در برش به شکل زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_2 = \frac{1}{2}[\epsilon_x + \epsilon_y] = \frac{1}{2} \left[ \frac{(A_{22} - A_{12})N_x + (A_{11} - A_{12})N_y}{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)} \right], \\ \gamma_{12} &= [\epsilon_y - \epsilon_x] = \left[ \frac{(A_{11} + A_{12})N_y - (A_{22} + A_{12})N_x}{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)} \right]. \end{aligned} \quad (11.3.11)$$

۵۸۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

مشتقاتی که برای تقریب کرنش معادله (۱۱.۳.۱۰) نیاز است را می توان از دیفرانسیل گیری معادله (۱۱.۳.۱۱) به دست آورد. به عنوان مثال، مشتق کرنش در امتداد الیاف 45 درجه نسبت به  $A_{11}$  را می توان به شکل زیر نوشت.

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial A_{11}} = \frac{1}{2} \frac{(A_{12} - A_{22})}{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)} \epsilon_x, \quad (11.3.12)$$

که  $A_{ij}$  سختیهای کششی در نقطه طراحی اسمی است. مشتقات کرنش مشابهی نسبت به  $A_{12}$  و  $A_{22}$  را می توان به دست آورد. سختیهای کششی توابع خطی از متغیرهای طراحی شناسایی لایه اند، بنابراین تقریب کرنش یک تابع خطی از متغیر شناسایی لایه است. توجه به این نکته مهم است که کرنشها ابتدا بر اساس یک مقدار مبنا برای بار محاسبه می شوند. به منظور کاربرد قید کرنش باید آنها را در مقدار ضریب بار کمانش  $\lambda_c$  که خود تابع متغیرهای طراحی است ضرب کرد

$$\lambda_c \epsilon_i \leq \epsilon_i^{ua}, \quad (11.3.13)$$

که  $\epsilon_i^{ua}$  کرنش مجاز است. قید کرنش معادله (۱۱.۳.۱۳) را می توان با انتقال  $\lambda_c$  به طرف راست معادله و بسط  $1/\lambda_c$  بر حسب سری تیلور خطی، خطی ساخت. داریم:

$$\lambda_o \epsilon_i + \frac{\lambda_c}{\lambda_o} \epsilon_i^{ua} \leq 2 \epsilon_i^{ua}, \quad (11.3.14)$$

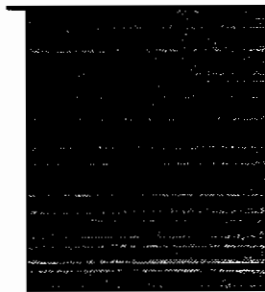
که  $\lambda_o$  ضریب بار کمانش برای طراحی اسمی است.

قید کرنش خطی معادله (۱۱.۳.۱۴) را اکنون می توان به مسئله ای که در معادله (۱۱.۳.۳) رابطه سازی شد، اضافه کرد که مسئله طراحی مواد مرکب برای مقاوم بودن در مقابل شکست کمانش و مقاومت است.

از آن جا که رابطه سازی یک تقریب خطی برای قید مقاومت است، برنامه ریزی خطی دنباله ای باید استفاده شود. در استفاده برنامه ریزی خطی دنباله ای، اعمال حدود حرکت به طور کلی توصیه می شود تا طراحیهای به وجود آمده بر اساس قیود خطی در فضای طراحی قابل قبول یا نزدیک آن قرار گیرند. در حالتی که متغیرهای شناسایی تک لایه صفر / یک اند، اعمال حدود حرکت روی متغیرهای طراحی عملی نیست. بنابراین حدود حرکت به عنوان کرانهای سختیهای کششی  $A_{ij}$  اعمال می شوند که بر حسب

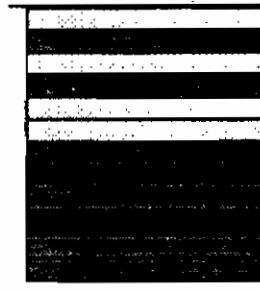
بخش ۱۱.۳: طراحی ترتیب چیدمان ۵۸۹

$N_y = 0.25 \text{ lb/in.}$



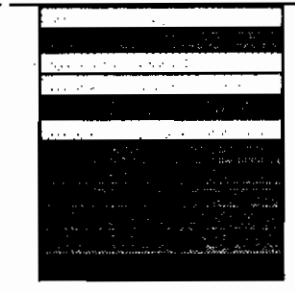
$$(\pm 45_4/90_2/\pm 45/90_2/90_{10})_s$$

$$\lambda_{cr} = 13441.85$$



$$(\pm 45_2/90_2/\pm 45_3/0_4/\pm 45/0_2/\pm 45/0_2)_s$$

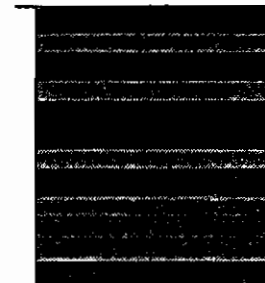
$$\lambda_{cr} = 12622.44$$



$$(90_2/\pm 45_5/0_2/\pm 45/0_4/\pm 45/0_2)_s$$

$$\lambda_{cr} = 12674.84$$

$N_y = 0.5 \text{ lb/in.}$



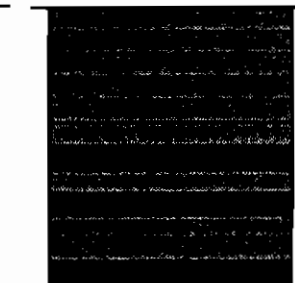
$$(90_2/\pm 45_3/90_2/\pm 45/90_4/\pm 45/90_2/\pm 45/90_2)_s$$

$$\lambda_{cr} = 9999.13$$



$$(90_2/\pm 45_2/90_2/\pm 45/90_2/\pm 45_6)_s$$

$$\lambda_{cr} = 9998.18$$



$$(90_2/\pm 45_2/90_2/\pm 45/90_2/\pm 45_6)_s$$

$$\lambda_{cr} = 9998.18$$

کلید



شکل ۱۱.۳.۶ طراحیهای براساس بار کمانشی ماکزیمم، با قیدهای مقاومت

متغیرهای شناسایی تک لایه است. این کار شش قید دیگر را به مسأله اضافه می کند

$$A_{ij}^L \leq A_{ij} \leq A_{ij}^U, \quad i, j = 1, 2. \quad (11.3.15)$$

طراحی با قیدهای مقاومت، برای مواد مرکب لایه ای که از مواد مرکب حالت قبل ضخیمتر است به

#### ۵۹۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

دست آمده، در نتیجه بارهای کماتشی بیشتر قیدهای شکست کرنشی را می خواهند نقض کنند. نتیجه های طراحی برای یک ماده مرکب ۴۸ لایه تحت دو نوع بار ترکیبی دو محوری ( $N_y/N_x = 0.25$ ) و ( $N_y/N_x = 0.5$ )، برای  $N_x = 0.25 \text{ lb/in}$  ( $175 \text{ N/m}$ ) به همراه نتایج طراحی بدون قید کرنش در شکل ۱۱.۳.۶ ارایه شده است. از آن جا که روش استفاده شده تقریبهای محلی دارد، طراحی نهایی ممکن است یک طراحی بهین محلی باشد. برای اطمینان بیشتر از به دست آوردن بهین فراگیر، استفاده از یکی از الگوریتمهای جستجوی احتمالاتی در مسائل برنامه ریزی غیر خطی با متغیرهای طراحی با مقادیر گسسته (فصل ۴ را ببینید) توصیه می شود. آخرین طراحی در هر یک از حالت های بارگذاری ارائه شده در شکل ۱۱.۳.۶ با استفاده از الگوریتم ژنتیکی که در بخش ۴.۴.۲ بحث شد به دست آمده و طراحی بهین فراگیر بودن آنها تأیید شده است. در مقایسه با طراحی بدون در نظر داشتن قید شکست مقاومت، ضریب بار شکست برای  $N_y = 0.25$  به میزان 6.05% کاهش یافته است. گرچه طراحی در این حالت بارگذاری تنها یک ماکزیمم محلی بود، ضریب بار نسبت به طراحی بهین فراگیر تنها کسری از درصد تفاوت می کند. برای نسبت بار 0.5، طراحی بدون قید کرنش، مقاومت برشی را 7% نقض می کند. طراحی به دست آمده از برنامه ریزی خطی صحیح دنباله ای نیز بهین فراگیر بود.

#### ۱۱.۳.۴ روشهای جستجوی احتمالاتی

روشهای جستجوی احتمالاتی مانند سرد شدن تدریجی شبیه سازی شده و الگوریتم ژنتیکی پارامترهای دارند که می توان آنها را برای مسأله موجود تنظیم کرد. در روش سرد شدن تدریجی شبیه سازی شده، این پارامترها عبارتند از: درجه حرارت اولیه و سرعت سرد شدن. برای الگوریتم ژنتیکی پارامترهای تنظیمی عبارتند از: احتمالات عملگرهای مختلف ژنتیکی مانند جهش، اندازه جمعیت و معیار همگرایی. طراحی مواد مرکب سخت نشده با استفاده از نظریه لایه بندی کلاسیک مسأله خوبی برای تنظیم این پارامترهاست، زیرا از نظر محاسباتی بهینه سازی آن کم هزینه است.

لومباردی<sup>۱</sup> [28] اثر درجه حرارت اولیه و سرعت سرد شدن را در روش سرد شدن تدریجی شبیه سازی شده، روی عملکرد الگوریتم برای مسأله ماکزیمم سازی بار کماتش که در بخش گذشته بحث شد مطالعه کرد. عملکرد الگوریتم از دو نظر مورد قضاوت قرار گرفت: هزینه محاسبات و میزان اطمینان از یافتن

1) Lombardi

## بخش ۱۱.۴: کاربردهای طراحی ۵۹۱

بهین فراگیر. مسأله جوابهای زیادی (چیدمان) دارد که بارهای کمانشی مشابهی دارند. به این دلیل، موفقیت برای جوابی تعریف شد که در 0.1% بار ماکزیمم کمانش باشد. نتیجه ها برای صفحه ۳۲ لایه که لایه ها در گروههای 0، 90 درجه یا  $\pm 45$  دسته بندی شده بودند به دست آورده شد. برای لایه بندی متقارن، این تقسیم بندی مستلزم تعریف ۸ چیدمان و در کل  $8! = 6561$  احتمال است. الگوریتم سرد شدن تدریجی شبیه سازی شده برای قابلیت اطمینان بالا ۱۰۰۰ تحلیل نیاز داشت که یک کسر بزرگ از فضای طراحی است. با این وجود، هنگامی که تعداد تک لایه ها از ۳۲ به ۶۴ افزایش می یابد، تعداد تحلیل مورد نیاز تنها حدود ۳۰۰۰ افزایش پیدا می کند، در صورتی که تعداد طراحیهای ممکن به  $3^{16} = 43$  میلیون می یابد.

لریچ و هفته<sup>۲</sup> [29] مسأله کمانش مشابهی را برای مواد مرکب ۴۸ و ۶۴ لایه با استفاده از الگوریتمهای ژنتیکی حل کردند. تنظیم احتمالات عملگرهای ژنتیکی و اندازه جمعیت می تواند به طور چشمگیری تعداد تحلیل مورد نیاز را کاهش دهد. به عنوان مثال، برای ماده مرکب ۴۸ لایه تعداد تحلیل مورد نیاز ۲۰۰ تا ۳۰۰ بود. یک مزیت الگوریتم ژنتیکی این است که به چندین طراحی بهین نزدیک به هم می انجامد و نه به یک بهین. به عنوان مثال برای یک صفحه با  $a = 20\text{in}$ ،  $b = 5\text{in}$ ،  $N_x = 1\text{lb/in}$  و  $N_y = 0.5\text{lb/in}$  دو مورد از بهترین طراحی ها عبارتند از:

$[90_2, \pm 45_2, 90_2, \pm 45_2, 90_2]$  و  $[\pm 45_3, 90_2, \pm 45_3, 90_2, \pm 45_3]$ . اولین ماده مرکب بار کمانش  $\lambda_c = 9998$  دارد در حالی که دومی در  $\lambda_c = 9976$  کمانش می کند. برای طراحی، تفاوت بین مواد مرکب لایه ای، مانند وجود تک لایه های  $\pm 45$  درجه در لایه خارجی، یا درصد کاهش یافته از تک لایه های 90 درجه در دومین ماده مرکب ممکن است از تفاوت 0.2% در بارهای کمانشی آنها بسیار مهمتر باشد.

## ۱۱.۴ کاربردهای طراحی

## ۱۱.۴.۱ طراحی صفحات سخت

صفحات لایه ای که با اعضای طولی یا عرضی سخت شده باشند، یکی از عمومی ترین اعضای

1) Le Riche and Haftka

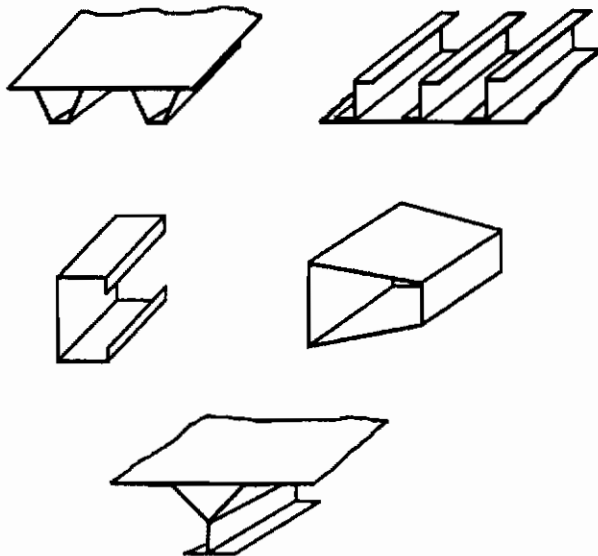
۵۹۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

سازه ای اند. استفاده از سخت کننده ها مسبب می شود که صفحه در مقابل بارهای در آن جهت خاص مقاومت بالایی داشته و مسیرهای بارگذاری چند گانه ای را دارا باشد که تحت بارهای فشاری و کششی در مقابل شکست و رشد ترک مقاوم باشد. بیشترین مزیت سخت کننده ها عبارت است از افزایش سختی - خمشی با حداقل افزایش ماده که آن را برای بارگذاریهای خارج از صفحه و متوازن سازی بارهای فشاری مناسب می سازد. افزون بر قرار دادن سخت کننده ها جهت مقاومت در مقابل بارهای جهت خاص، استفاده از مواد مرکب این امکان را به وجود می آورد که خواص سختی و مقاومت اجزای خاصی از یک صفحه سخت شده افزایش یابد (مانند جان، بال و پوسته) تا نیازهای مختلف سازه ای را تأمین کند. این افزایش مقاومت محلی از راه انتخاب جهت تک لایه ها و ضخامت قسمتهای مختلف یک صفحه تأمین می شود. همچنین استفاده از مواد مرکب این امکان را به وجود می آورد که سطح مقطعیهای محکمتری را داشت که تولید آنها با استفاده از مواد فلزی هزینه بر است.

با این وجود، عملکرد پیچیده صفحات مرکب سخت شده، اختیار کردن فرضهای ساده کننده که در لایه های تخت استفاده می شد و غالباً به جوابهای دقیق می انجامید، با دشواری مواجه می سازد. بنابراین، بهینه سازی طراحی چنین صفحاتی معمولاً نیاز به الگوریتمهای عددی دارد. در این بخش ما طراحی صفحات مرکب سخت شده را که تحت بارگذاری فشاری و برشی اند و عموماً قیدهای کماتشی دارند بحث می کنیم.

در یکی از مطالعات اولیه طراحی بهین صفحات سخت شده، استرود و آگرانوف<sup>۱</sup> [30] صفحه سخت شده در جهت طولی را که از اجزای صفحه ای اورتوترایپک تشکیل شده بود مورد مطالعه قرار دادند. شکل صفحات موج دار و کلاه مانند بودند، ولی روش استفاده شده در مرجع [30] می تواند برای شکلهای هندسی دیگر مانند آنچه در شکل ۱۱.۴.۱ نشان داده شده نیز به کار رود. تحلیل ساده سازی شده مربوط به کماتش صفحات اورتوترایپک با شرایط مرزی تکیه گاههای ساده بود. هر دو مود فراگیر و محلی کماتش در نظر گرفته شدند. تحلیل کماتش فراگیر صفحه سخت شده را به عنوان یک صفحه اورتوترایپک با سخت کننده های چسبی در نظر می گیرد و فرض می کند که مانند یک ستون پهن کماتش می کند. برای کماتش محلی، هر جزء از صفحه به عنوان یک صفحه نواری بار یک اورتوترایپک با شرایط مرزی تکیه گاه ساده در امتداد اتصال اجزای مجاور هم در نظر گرفته شد. یعنی، از مقاومت چرخشی بین

1) Stroud and Agranoff



شکل ۱۱.۴.۱ مثالهایی از مفاهیم صفحات سخت شده نمونه

اجزای صفحه مانند سخت کننده و پوسته صرف نظر شده، و پیوستگی بین شکل مودهای اجزای مختلف در نظر گرفته نمی شود. معادلات بارهای کمانشی حاصل از این فرضیات برای صفحاتی که با بارهای فشاری و برشی بارگذاری شده اند، در جدول ۱۱.۴.۱ ارائه شده است.

معادلات کمانش محلی جدول به هر جزء صفحه به عرض  $b$  و طول  $L$  اعمال می شود. در هر دو نوع بارگذاری طولی فشاری و برشی طول  $L$  هر جزء بسیار بزرگتر از عرض آن جزء فرض می شود.  $D_{ij}$  ها ضرایب سختی خمشی (معادله ۱۱.۱۸) جزء صفحه اند. برای کمانش فراگیر تحت فشارهای طولی، صفحه به عنوان یک ستون پهن که لبه های بارگذاری آن تکیه گاه ساده و لبه های بدون بار آزادند در نظر گرفته می شود. سختی طولی ستون برابر با سختی طولی چسبی صفحه،  $El$  است. برای حالت بارگذاری برشی، صفحه سخت شده به عنوان یک ماده مرکب چند لایه اورتوتروپیک با ضخامت یکنواخت (که خواص اورتوتروپیک چسبی  $D_1$ ،  $D_2$  و  $D_3$  که در امتداد عرضی بی نهایت بلند و در لبه های بارگذاری شده تکیه گاه ساده اند، مدل می شود. عبارتهای سختی چسبی  $(El, D_1, D_2, D_3)$  در رابطه های کمانش فراگیر به شدت به شکل سطح مقطعی سخت کننده ها بستگی دارند. محاسبه این سختیهای چسبی برای شکلهای هندسی پیچیده صفحات اجتناب ناپذیر است و فرضیات سینماتیکی مختلفی را بسته



جدول ۱۱.۴.۱ معادلات کلی و محلی کمانش از مرجع [30]

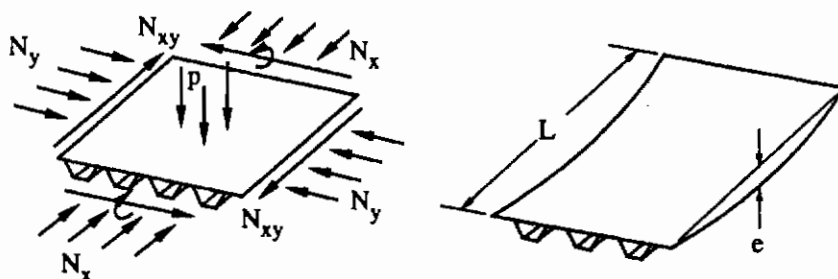
مرجع	معادله	بارگذاری
<b>کمانش فراگیر</b>		
Eq. (92), [31] Eq. (3), [32]	$N_{x,cr} = \frac{\pi^2 EI}{pL^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{2L^2 b_2 A_{66_2}}}$	فشاری در امتداد طول
Eqs. (2.2.2-21), (2.2.2-22), [33]	$\zeta = \frac{\sqrt{D_1 D_2}}{D_3}$ $N_{xy,cr} = \left(\frac{2}{L}\right)^2 (D_1^3 D_2)^{\frac{1}{4}} \left(8.125 + \frac{5.05}{\zeta}\right)$	برشی برای $\zeta > 1$ ,
pp. 468-471, [34]	$N_{xy,cr} = \left(\frac{2}{L}\right)^2 \sqrt{D_1 D_3} (11.7 + 0.532\zeta + 0.938\zeta^2)$	برای $\zeta < 1$ ,
Eq. (105.8), [34]	$\frac{N_x}{N_{x,cr}} + \left(\frac{N_{xy}}{N_{xy,cr}}\right)^2 = 1$	ترکیبی
<b>کمانش محلی</b>		
Eq. (92), [31] Eq. (3), [32]	$N_{x,cr} = \frac{2\pi^2}{b^2} \left[ (D_{11} D_{22})^{\frac{1}{2}} + D_{12} + 2D_{66} \right]$	فشاری در امتداد طول
Eqs. (2.2.2-21), (2.2.2-22), [33]; pp. 468-471, [34]	$\zeta = \frac{\sqrt{D_{11} D_{22}}}{D_{12} + 2D_{66}}$ $N_{xy,cr} = \left(\frac{2}{b}\right)^2 (D_{11} D_{22}^3)^{\frac{1}{4}} \left(8.125 + \frac{5.05}{\zeta}\right)$ $N_{xy,cr} = \left(\frac{2}{L}\right)^2 \sqrt{D_{22} (D_{12} + 2D_{66})} (11.7 + 0.532\zeta + 0.938\zeta^2)$	برشی برای $\zeta > 1$ , برای $\zeta < 1$ ,
Eq. (105.8), [34]	$\frac{N_x}{N_{x,cr}} + \left(\frac{N_{xy}}{N_{xy,cr}}\right)^2 = 1$	ترکیبی

به نوع بار اعمالی لازم دارد. به دست آوردن بعضی از عبارات سختی چسبی برای صفحات موج دار و کلاهی شکل در مرجع [30] تشریح شده است.

مسئله طراحی مرجع [30] به عنوان یک مسئله برنامه ریزی ریاضی که جرم صفحه بر واحد عرض آن تابع هدف است، رابطه سازی شده است. متغیرهای طراحی عرض اجزاء و ضخامت لایه هایی است که اجزای سازه سازند. قیود طراحی بار کمانش، محدودیتهای مقاومت و سختی و کرانه های بالا و پایین بعضی از ابعاد صفحه است. یک برنامه بهینه سازی جامع [35] AESOP، که بر اساس رابطه سازی تابع جرمه خارجی است، برای بهینه سازی طراحی استفاده شده است.

## بخش ۱۱.۴: کاربردهای طراحی ۵۹۵

یک روش طراحی اساسی تر [36] بر مبنای کد تحلیل کمانش و ارتعاش صفحه سخت شده [37, 38] VIPASA و یک کد برنامه ریزی ریاضی بر اساس روش الگوریتم جهت‌های قابل قبول (بخش ۵.۶ را ببینید) [39] CONMIN معرفی شده، تا بعضی از فرضیات مرجع [30] را بهبود بخشد. کد تحلیل VIPASA قادر است بارهای کمانش سازه‌هایی که از اجزای صفحه‌ای مستطیلی که در امتداد طول خود به هم متصل شده‌اند را محاسبه نماید. برخلاف روش استفاده شده در مرجع [30]، با برقرار بودن پیوستگی شبکه کمانش در تقاطع اجزای صفحات همسایه، تحلیل اتصال فیزیکی بین اجزای مجاور را مورد نظر قرار می‌دهد. حل کمانش بر اساس معادلات دقیق صفحات نازک با جملات سختی غیر ایزوتروپیک (ناهمسانگرد)  $D_{26}$  و  $D_{16}$  است؛ در نتیجه پیوند خمشی-چرخشی مجاز است. اجزای صفحه به تنهایی ممکن است ایزوتروپیک (همسانگرد)، اورتوتروپیک، یا غیر ایزوتروپیک (ناهمسانگرد) باشند. با این وجود، صفحاتی که اجزا را تشکیل می‌دهند باید چیدمان متقارن متوازن داشته باشند به گونه‌ای که پیوندهای خمشی-کشش و کشش-برش از بین برود. محدودیت دیگر، تحلیل شرایط مرزی کمانش است. گرچه لبه‌های طولی غیر متصل ممکن است شرایط مرزی مختلفی داشته باشند، شرایط مرزی لبه‌های بارگذاری شده محدود به شرایط تکیه گاه ساده است. هر ترکیبی از بارهای طولی، عرضی و برشی که در امتداد طول صفحه ثابتند را می‌توان اعمال کرد (شکل ۱۱.۴.۲ را ببینید). با این وجود، در حالت بارهای برشی محدودیت شرایط مرزی تکیه گاه ساده در لبه‌های بارگذاری شده ممکن است باعث به وجود آمدن عدم دقت در محاسبات بار کمانش شود که درباره آن در آینده بحث



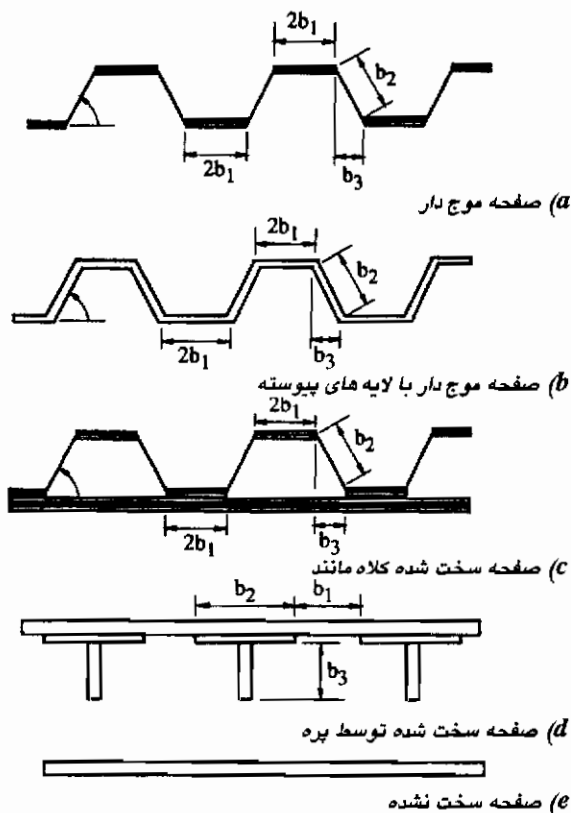
شکل ۱۱.۴.۲ شرایط بارگذاری و شرایط اولیه ناکامل

خواهیم کرد.

سرانجام برنامه تحلیل VIPASA توسط استرود و آندرسون<sup>۱</sup> به عنوان اساس یک کد طراحی به نام PASCO[40, 41] که بیشتر برای طراحی اولیه سازه های صفحه ای سخت شده تک محوری استفاده می شود، مورد استفاده قرار گرفت. PASCO برای بهینه سازی از کد برنامه ریزی ریاضی غیر خطی CONMIN[39] استفاده می کند. مسأله طراحی به شکل مینیمم سازی جرم صفحه برای یک حالت بارگذاری رابطه سازی می شود. قیدها عبارتند از کرانهای بالا و پایین روی متغیرهای طراحی، کران پایین برای مقاومت ماده و بار کماتش، کران بالا و پایین روی سختی های خمشی، کششی و برشی، و کران پایین برای بسامدهای ارتعاشی. افزون بر شرط طراحی که در تحلیل VIPASA بیان شد  $(N_x, N_y, N_{xy})$ ، PASCO نیز دارای بارگذاری گشتاور خمشی  $(M_x)$ ، فشار جانبی  $(p)$ ، خمیدگی کمان مانند اولیه و درجه حرارت می باشد.

اثر کرنشهای خمشی که در اثر اعمال گشتاور خمشی، فشار، خمیدگی اولیه یا درجه حرارت به وجود می آید در تحلیل شکست کرنش با ترکیب آنها با کرنشهای یکنواخت حاصل از بارهای صفحه ای، در نظر گرفته می شود. کرنشهای خمشی حاصل از فشار و خمیدگی کمان مانند بر اساس یک روش تیر-ستون[42] با محاسبه گشتاور خمشی مربوط در میانه طولی صفحه محاسبه می شوند. این گشتاور خمشی ماکزیمم با فرض محافظه کارانه ای فرض می شود که روی تمامی طول صفحه اعمال می شود. این روش مانند ضرورت ثابت بودن توزیع تنش در امتداد طول در VIPASA است. برای بحث بیشتر در مورد گشتاورهای خمشی مرجع [40] را ببینید. در PASCO استفاده از چند مجموعه شرایط طراحی نیز مجاز است. مجموعه متغیرهای طراحی عبارتند از عرضها،  $b$ ، ضخامت تک لایه ها،  $t$  و جهت های  $\theta$  هر جزء صفحه که صفحه را تشکیل می دهند. کاهش تعداد متغیرهای طراحی از راه ایجاد پیوند بعضی از ابعاد اجزا یا جهت های تک لایه با تعریف روابط خطی نیز امکان پذیر است. PASCO همچنین قادر است برای قیدهای کماتش و ارتعاشات از طریق بسط سری تیلور مرتبه اول برای آنها و تعریف محدوده حرکت برای متغیرهای طراحی، مسأله را به شکل تقریب حل کند. این جنبه از کد آنها را از نظر محاسباتی کارآ و برای طراحی اولیه بسیار ارزشمند می سازد و به طراح این امکان را می دهد که مفاهیم طراحی مختلف را با روش کم هزینه ای مقایسه کند.

1) Stroud and Anderson



شکل ۱۱.۴.۳ شکافهای مختلف طراحی

این مثال که توسط سوانسون و گوردال<sup>۱</sup> [43] ارائه شده، مقایسه ای است از راندمان سازه ای شکل بهینه صفحه کناری بال که از مواد مرکب ساخته شده است، که نمونه ای از بال مرکزی مربوط به مخزن سوخت یک هواپیمای باری بزرگ است. ابعاد رینگ عبارت است از 28 اینچ ارتفاع و 80 اینچ عرض. ساختار صفحه به گونه ای انتخاب شده که عملی و از نظر تولید مقرون به صرفه باشد. این شکلهای در شکل ۱۱.۴.۳ نشان داده شده اند که عبارتند از صفحه موجدار، و صفحه موجدار که لایه ها در سرتاسر طول و عرض به صورت پیوسته قرار دارند و یک صفحه که به وسیله شکلهای کلاه مانند سخت شده است. صفحه موجدار از نظر تولید نسبتاً ساده است، زیرا لایه های پیوسته ای دارد که در سرتاسر آن قرار دارد و

1) Swanson and Gurdal

## ۵۹۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

باعث ایجاد سختی می شود و نیازی به بستن آنها نیست. آنها همچنین برای فرایند شکل دهی حرارتی در مواد ترموپلاستیک که از نظر تولیدی اساساً کم هزینه تر است مناسبند. در شکل همچنین صفحاتی که با پره سخت شده اند وجود دارند که از این مفهوم بیشتر در رینگ بالها استفاده می شود و در انتها یک صفحه سخت نشده صاف که برای مبنای مقایسه استفاده می شود.

قیدهایی که در این مثال در نظر گرفته شده اند عبارتند از: محدودیتهای مقاومت، کمانش و هندسی. معیار شکست مصالح، معیار شکست کرنش ماکزیمم انتخاب شده است. معیار کمانش بر مبنای طراحی سازه های بال است که اجازه نمی دهد در بارهای حدی طراحی، کمانش رخ دهد. بنابراین، طراحی رینگ بال هیچ گونه توانایی تحمل بار پس از کمانش را برای صفحه در نظر نمی گیرد.

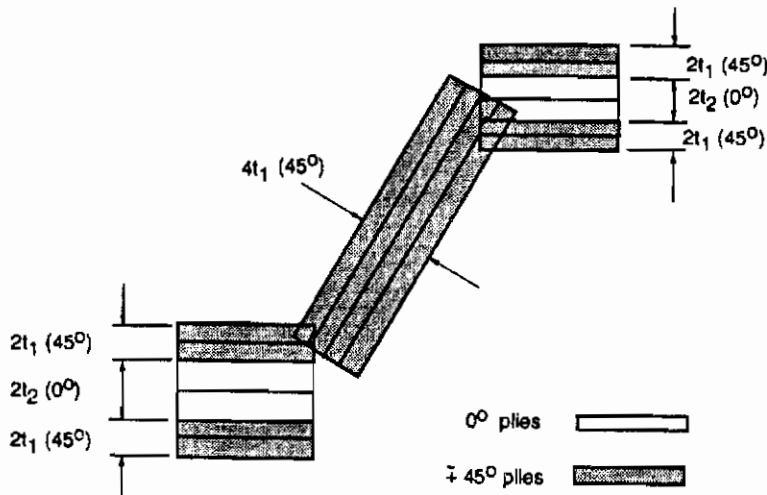
متغیرهای طراحی ضخامت تک لایه های با جهت های مختلف در سطوح مختلف صفحه اند. زوایای تک لایه معمول  $\pm 45^\circ$  و  $0^\circ$  و  $90^\circ$  درجه انتخاب شده اند. همچنین ابعاد سطح مقطع برای متغیرهای اندازه ای در نظر گرفته شده اند تا بهترین هندسه سطح مقطع به دست آید. هرکولس<sup>۱</sup> AS4/3502 که با نوار گرافیت-اپوکسی<sup>۲</sup> آغشته شده به عنوان ماده گرافیت-اپوکسی نمونه انتخاب شده است.

هندسه اجزای تکراری عموماً با متغیرهای طراحی عرض اجزای صفحه ای  $b_1$  تا  $b_4$  مانند شکل ۱۱.۴.۳ تعریف می شوند. به عنوان مثال، برای صفحه موجدار، کلاهکهای موج بالا و پایین به خاطر تقارن هم عرض می شود. عرضهای اجزای صفحه  $b_2$  و  $b_3$  زوایای جان صفحه موجدار را تعریف می کنند. جان صفحه تنها از تک لایه های  $\pm 45^\circ$  درجه تشکیل شده اند، شکل ۱۱.۴.۴ که به طور پیوسته در سرتاسر عرض سطح مقطع قرار دارند. چنین تک لایه های پیوسته هزینه های ساخت را کاهش داده و تمرکز تنش را که می تواند در نقاط انتهایی تک لایه  $\pm 45^\circ$  اتفاق بیفتد، از بین می برد. در اجزای صفحه ای که کلاهکها را می سازند، تک لایه های  $0^\circ$  درجه بین لایه های الیاف  $\pm 45^\circ$  درجه قرار دارند. بنابراین، ماده مرکب لایه ای با دو متغیر طراحی ضخامت  $t_1$  و  $t_2$  که به ترتیب مربوط به تک لایه های  $45^\circ$  و  $0^\circ$  درجه اند تعریف می شود. مشخصات سایر سطح مقطعه را می توان از مرجع [43] به دست آورد.

بارهای در نظر گرفته شده در مرجع [43] عبارتند از: ترکیبی از بارهای فشار محوری صفحه ای ( $N_x$ )، برش ( $N_{xy}$ ) و فشار ( $p$ )، با مقادیر واقعی که به عنوان نمونه در رینگ بالای مخزن سوخت یک هواپیمای باری بزرگ وجود دارد. در این مثال یک نماد بار  $N_x/L$  استفاده می شود که  $L$  طول صفحه است و مقادیر

1) Hercules

2) Graphite- epoxy



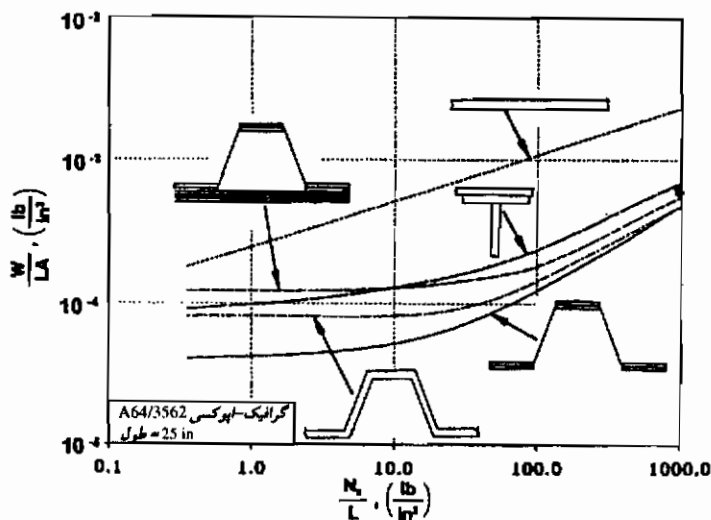
شکل ۱۱.۴.۴ مدل صفحه موج دار

این نماد بین 0.3 تا  $1000 \text{ lb/in}^2$  است. این محدوده شامل بارهای پایین تر و بالاتر از بارهای رینگ نمونه می شود، در نتیجه طراحی صفحه سایر اجزا مانند پوسته بال را نیز در بر می گیرد.

اثر شدت بار فشاری محوری روی راندمان سازه و هندسه صفحه مورد مطالعه در شکل ۱۱.۴.۵ نشان داده شده است. مفهوم صفحه موجدار با لایه های مختلف در تاج موجدار و جان، از نظر سازه ای بهترین راندمان را دارد. مفهوم صفحه موجدار با لایه های پیوسته از نظر راندمان سازه ای در مرتبه دوم و مفهوم صفحه سخت شده توسط پره ها، مفهوم صفحه سخت شده کلاه مانند و صفحه تخت سخت نشده در مرتبه های بعدی قرار دارند (شکل ۱۱.۴.۵ را ببینید). اختلاف وزن این محدوده از بار بیشتر به مدلسازی لایه ها که هندسه صفحه را تعریف می کنند بستگی دارد. هر شکل به گونه ای مدلسازی می شود که برای تعریف هندسه حداقل تعداد تک لایه لازم باشد و این تعداد برای هر مدل متفاوت است. برای شدت بار محوری کم، در تمام شکلهای، به جز صفحه تخت سخت نشده، قید حداقل ضخامت 0.005 اینچ در تمامی لایه ها در نظر گرفته شده است. بنابراین، وزن یک صفحه تقریباً با تعداد لایه های سطح مقطع متناسب است و از شدت بار مستقل است. •••

یک عیب PASCO عدم دقت احتمالی در مدلسازی شرایط مرزی بارهای پرشی است. شرایط مرزی انتهایی صفحه ای عمود بر سخت کننده ها فرض می شود که تکیه گاه ساده است و نمی تواند تغییر یابد.

۶۰۰ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)



شکل ۱۱.۴.۵ راندمان سازه ای یک صفحه که با بارهای فشاری محوری بارگذاری شده است

بدون بارهای برشی، شبکه کمانش از یک سری از خطوط گره ای مستقیم تشکیل شده که بر بارهای لبه صفحه منطبقند. هنگامی که برش به صفحه اعمال شود، شبکه کمانشی از یک سری از خطوط گره ای انحراف یافته تشکیل شده و بار کمانش محاسبه شده برای این حالت بار ممکن است از بار کمانش یک صفحه با تکیه گاه ساده متفاوت باشد. به ویژه، اگر یک نیم موج کمانش تنها به طول  $\lambda$  در امتداد طول صفحه،  $L$ ، تشکیل شود، تحلیل PASCO ممکن است بار کمانش را کمتر پیش بینی نماید. در PASCO برای حالت  $\lambda = L$ ، یک گزینه جواب سختی چسبی [38] وجود دارد تا هنگامی که بار برشی وجود دارد جوابی دقیقتر بدهد. در مرجع [44] نشان داده شده که روش سختی چسبی یک جواب بهبود یافته است ولی همیشه یک جواب محافظه کارانه نیست. افزون بر این، برای به دست آوردن یک ساختار صفحه سخت شده بهینه، جزئیات سطح مقطع باید برای کمانش سخت کننده محلی در نظر گرفته شود و در همان حال در لبه های بارگذاری شرایط مرزی تکیه گاه ساده است. حل سخت کننده چسبی در PASCO برای چنین جزئیاتی تدوین نشده است. یک تحلیل بهبود یافته در برنامه VICON (VIPASA مقید) [45، 46] وجود دارد که تحلیل کمانش VIPASA را برای شرایط تکیه گاه در جای دلخواه در امتداد طول صفحه با استفاده از ضربگرهای لاگرانژ بهبود می بخشد. با مشخص کردن تکیه گاهها در بازه هایی که مربوط به

## بخش ۱۱.۴: کاربردهای طراحی ۶۰۱

دو انتهای طول صفحه دلخواه می شود، برای هنگامی که برش اعمال می شود، می توان در لبه های صفحه شرایط مرزی تکیه گاه ساده را در نظر گرفت. تحلیل VICON اخیراً توسط بوتلر و ویلیامز<sup>۱</sup> [47] در کد طراحی VICONOPT گنجانده شده است.

طراحی که در آن در بارهای حدی کمانش صفحه را اجازه نمی دهند، برای بال و صفحه پوشش دم هواپیما مناسب است، زیرا باید جنبه های غیر سازه ای مانند یک سطح آئرو دینامیکی خوب مورد توجه باشد. با این وجود، صفحات سازه های فلزی هواپیما در قسمت اصلی بدنه معمولاً به گونه ای طراحی می شوند تا در پایین تر از بار نهایی کمانش کنند. در گذشته اطلاعات ناکافی از پاسخ بعد از کمانش صفحات مواد مرکب سبب می شد که از این فلسفه طراحی استفاده ای نشود. با توجه به احتمال صرفه جویی در وزن، انگیزه طراحی صفحات با پس کمانش در سالهای اخیر تقویت شده است (به مراجع دیکسون<sup>۲</sup> و دیگران [48, 49] و شین<sup>۳</sup> و دیگران [50] مراجعه کنید). یک نظریه غیر خطی برای پیش بینی رفتار صفحات سخت شده که به طور محلی غیر سختند توسط بوشنل<sup>۴</sup> در برنامه بهینه سازی طراحی PANDA2 ارائه شده است [51]. با این وجود، به دلیل پیچیدگی و هزینه های محاسباتی بالا در تحلیل پس کمانش سازه های صفحه ای سخت شده، طراحی بهین چنین صفحاتی از سطح یک کار معمولی فراتر است.

## ۱۱.۴.۲ متناسب سازی آئرو الاستیکی

یکی دیگر از زمینه های اصلی کاربردهای بهینه سازی طراحی متناسب سازی آئرو الاستیکی سازه های بال هواپیماست که در آن قیدهای آئرو الاستیک وجود دارد. متناسب سازی آئرو الاستیکی عبارت است از استفاده از تغییر شکل های سازه ای، جهت بهبود بخشیدن به خواص سازه ای و آئرو دینامیکی یک صفحه در حال صعود. یک تعریف استاندارد ارائه شده عبارت است از [52]:

متناسب سازی آئرو الاستیک عبارت است از به کارگیری سخت کننده های جهتی در طراحی سازه های هواپیما، به منظور کنترل تغییر شکل های آئرو الاستیک، ایستایی یا دینامیکی، به گونه ای که عملکرد سازه ای و آئرو دینامیکی آن هواپیما به شکل مفیدی تغییر یابد.

خواص رفتاری مفید، خواصی مانند پیش آئرو الاستیک، خمیدگی آئرو الاستیک، لرزش توسعه یافته و سرعتهای واگرا، افت کنترل غلطش آئرو الاستیک، و مقاومت افزایش یافته را گویند [53].

1) Butler and Williams

2) Dickson

3) Shin

4) Bushnell



۶۰۴ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

موضوع متناسب سازی آئروالاستیکی در دهه گذشته شهرت فزاینده ای یافته زیرا رشته بهینه سازی سازه ها پیشرفت کرده و استفاده از مواد مرکب در سازه های هواپیما نیز افزایش یافته است. طراحی بالها از جنس مواد مرکب اغلب از نوع فلزی آن، انعطاف پذیرتر است و باعث مناسب بودن آنها در اثرات آئروالاستیکی می شود. بیشتر مواد مرکب برای طراح این موقعیت را فراهم می کنند که با متناسب سازی پاسخ مواد، با استفاده از متغیرهای طراحی ضخامت و جهت تک لایه ها، اثرات آئروالاستیک دلخواه را به وجود آورند و رفتار آئرودینامیکی را بهبود بخشند. هر چند با متناسب سازی طراحی انعطاف پذیری افزایش می یابد، افزایش تعداد متغیرهای طراحی و پیچیدگی خواص پاسخ در مواد مرکب مسأله دشوار طراحی بال را مشکلتر می سازد [54, 55]. این حقیقت لزوم استفاده از فنون بهینه سازی پیشرفته را روشن می سازد. استفاده از الگوریتمهای بهینه سازی در مدلهای سازه ای سطوح در حال صعود رسیدن به بهبود مورد نظر در عملکرد آن را امکان پذیر می سازد، هر چند این کار هزینه بر است. بیشتر مطالعات اولیه مبتنی بر ساده سازی مدل سازه بودند تا هزینه طراحی را کاهش دهند. این ساده سازی ها در بعضی از حالتها مدلهای تیر برای سازه بوده است. مروری بر کاربرد فنون بهینه سازی سازه ها در مسائل طراحی با قیدهای آئروالاستیک توسط هفته که [56] ارائه شده است.

یکی از تلاشهای اولیه در کاربرد بهینه سازی سازه ها در متناسب سازی آئروالاستیک برنامه TSO است که توسط مک کولرز و لینچ<sup>۱</sup> [57] تدوین شده است. برنامه ابتدا تحت نام WASP<sup>۲</sup> (روش ستنز آئروالاستیک بال) [58] بود و از روش برنامه ریزی ریاضی مبتنی بر رویکرد جریمه (بخش ۷.۵ را ببینید) برای تبدیل مسأله مقید به تعدادی مسأله نامقید استفاده می کند. مینیم سازی نامقید از راه الگوریتم دیویدان-فلتچر-پاول<sup>۳</sup> (بخش ۴.۲ را ببینید) انجام می شود. مدلسازی سازه بال بر اساس تحلیل صفحه با فن حل ریتز<sup>۴</sup> انجام می شود. تابع هدف می تواند هر ترکیبی از وزن، شیب منحنی صعود، مؤثر بودن سطح کنترل، سرعت لرزش، بسامد طبیعی اصلی یا تغییر مکانها باشد. متغیرهای طراحی ضرایب چند جمله ای که جهت تک لایه های مختلف و ضخامتها را کنترل می کند است. استفاده از شکل چند جمله ای برای پارامترهای طراحی و روش ریتز کاربرد در روش برنامه ریزی ریاضی را برای بهینه سازی مناسب می سازد. برنامه TSO در طراحیهای مختلفی در کاربردهای متناسب سازی آئروالاستیکی برای

1) McCullers and Lynch

2) Wing Aeroelastic Synthesis Procedure

3) Davidon- Fletcher- powell

4) Ritz

هواپیماهای موجود به کار رفته است [54, 58, 59].

برنامه مشهور دیگر برای طراحی سطوح در حال صعود که دارای قیدهای مقاومت و آتروالاستیکند برنامه اجزای محدود FASTOP است که توسط گرومن<sup>۱</sup> [60] ارائه شد. برنامه روشهای معیار بهینگی (فصل ۹ را ببینید) را به کار می گیرد و قادر است قیود لرزش را هم در بر بگیرد. روشهای معیار بهینگی برای طراحیهایی که تنها یک قید دارند، بسیار کارایند. بنابراین، با وجود تحلیل اجزای محدود که هزینه بر است، هزینه بهینه سازی با استفاده از روش دنباله ای برای قیود، در سطح قابل قبولی نگاه داشته می شود. ابتدا با یک طراحی تمام تنیده (FSD، بخش ۹.۱ را ببینید) غیر بهینه قیود تنش در نظر گرفته می شوند، و به دنبال آن برای هر یک از قیدهای آتروالاستیک یک معیار بهینگی «مؤثر بودن هزینه ای یکنواخت» (بخش ۹.۳) در نظر گرفته می شود. فرایند با قیود مقاومت و آتروالاستیک تکرار می شود تا همگرایی حاصل شود. متغیرهای طراحی ضخامت و مساحت سطح مقطع هایند و جهت تک لایه ها در طول طراحی باید بدون تغییر بمانند.

یک برنامه طراحی جدید دیگر که بر مبنای اجزای محدود است ASTROS (سیستمهای بهینه سازی سازه ای خودکار) [61] است که توسط نورث روپ<sup>۲</sup> و ضمن یک قرارداد با نیروی هوایی تدوین شد. ASTROS به طور خودکار طراحی شده تا نقش چند کاره بودن آن در طراحی مقدماتی سازه های هوا-فضا به خوبی ایفا شود. بخش تحلیل سازه ای ASTROS از نسخه عمومی اجزای محدود NASTRAN گرفته شده و هسته اصلی روش را تشکیل می دهد. بخش تحلیل سازه ای برای به دست آوردن پاسخ سازه به بارهای مکانیکی، ثقلی، آترودینامیکی، حرارتی و وابسته به زمان استفاده می شود. قیدهای طراحی می تواند حدودی روی تنش، کرنش، تغییر مکان، بسامدهای مودال، پاسخ لرزش، مؤثر بودن صعود آتروالاستیک و مؤثر بودن بالچه کنترلی هواپیما باشد. متغیرهای طراحی که می توانند در فرایند استفاده شوند عبارتند از: مساحتها و ضخامتهای اجزا، ماندهای سازه ای و جرم های متمرکز. اجزای غشایی و خمشی که در تحلیل سازه به کار می روند توان مدل سازی کامل ماده مرکب را فراهم می سازند. ضخامت تک لایه ها را می توان به عنوان متغیر طراحی استفاده کرد، اما متغیرهای طراحی جهت تک لایه ها مجاز نیست. به منظور کاهش تعداد متغیرهای طراحی و حصول اطمینان از معنی دار بودن فیزیکی ابعاد، پیوند متغیرهای طراحی استفاده می شود. پیوند متغیرهای طراحی به همراه روشی که متغیرهای طراحی را به دو

1) Grumman

2) Northrop

۶۰۲ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

گروه فراگیر و محلی تقسیم می کند پیاده سازی و اجرا می شود. یک متغیر طراحی فراگیر عبارت است از جمع وزنی تعدادی از متغیرهای طراحی محلی. مشابه TSO، برای تعریف شکل ها، مانند یک تغییر ضخامت هموار (ملایم) در امتداد جهت دهانه، پیوند تابع شکل گونه می تواند استفاده شود. بخش بهینه سازی طراحی که در ASTROS استفاده می شود برنامه<sup>۱</sup> ADS (سنتز طراحی خودکار) [62] است. تمامی حساسیتهای تابع هدف و قیدها بر حسب مشتقات تحلیلی محاسبه می شود. هر دو روش مستقیم و متغیر مجاورتی (به فصل ۷ مراجعه کنید) در دسترس است.

### ۱۱.۵ عدم اطمینان های طراحی

گرچه مواد مرکب آزادی و اختیار وسیعی، که شاید تاکنون از همه آنها استفاده نشده، در متناسب سازی پاسخ سازه برای نیاز طراح فراهم می کنند، اما از طرف دیگر، مسائل خاصی را نیز به وجود می آورند که در مصالح معمولی اتفاق نمی افتد. سازه های بهینه نسبت به تغییرات شرایط بارگذاری و هر گونه نقص حساسند. به دلیل تعداد زیاد متغیرها که طراح را قادر می سازد طرح را متناسب و نزدیکتر به ویژگیهای مورد نظر طراحی کند، این حساسیت برای سازه های مواد مرکب شدیدتر است. ساده ترین مثال حساسیت به تغییرات شرایط بارگذاری، ماده مرکب لایه ای است که برای بارهای تک محوری طراحی شده است [63]. برای این کاربرد، به راحتی می توان نشان داد که بهترین طراحی عبارت است از طراحی که تمامی لایه ها در امتداد جهت بار باشد. همچنین بدیهی است که این طراحی برای تحمل بارهای عرضی عمود بر جهت الیاف در امتداد جهت بار باشد. همچنین بدیهی است که این طراحی برای تحمل بارهای عرضی عمود بر جهت الیاف به شدت ضعیف است. بنابراین هر تغییری در جهت بار اعمال شده به احتمال زیاد باعث شکست خواهد شد، در صورتی که یک طرح مشابه که از مصالح ایزوتراپیک ساخته شده باشد، قادر است بار عرضی را به اندازه بار طراحی اصلی تحمل کند.

پیچیدگی دیگر در طراحی سازه های مواد مرکب بهینه این است که گاهی شناسایی و اعمال قیود مقاومتی مناسب دشوار است. نه تنها بار و توزیع تنشها توابعی از متغیرهای ضخامت تک لایه ها و جهت الیاف است، بلکه خواص مقاومتی نیز به این متغیرها وابسته اند. از بین رفتن مواد مرکب بیشتر به سبب تنشهای محلی بالاست. تعداد مودهای شکست محلی ممکن بالاست و این مودهای شکست معمولاً ریز مکانیکی

1) Automated design synthesis

بخش ۱۱.۵: عدم اطمینان های طراحی ۶۰۵

و پیچیده اند. شکست الیاف، ترک برداشتن زمینه، جدا شدن الیاف از زمینه، و جدا شدن لایه های مختلف می تواند باعث ترک در سطح و در عمق ضخامت، تکه شدن، و جدا شدن لایه ها گردد. تحت بارهای فشاری، حتی ناپایداری الیافها در مقیاس میکرو و سکویی (که اغلب به عنوان ریز کمانش الیاف خوانده می شود) به عنوان یک شکست ساز و کار مطرح شده، اگر چه بنا بر مطالعات جدیدتر، شکستهای فشاری برای مواد مرکب با عملکرد بالا یک شکست مقاومتی شناخته شده است. افزون بر این، مودهای شکست می توانند بر یکدیگر تأثیر گذارده و پیش بینی مقاومت را دشوارتر سازند.

بعضی از فرضهای اساسی که برای ساده سازی تحلیل تنشهای مواد مرکب به کار می رود و طبیعت سه بعدی مواد مرکب را به دو بعد کاهش می دهد، نیز ممکن است سبب از دست رفتن اطلاعاتی شود که برای پیش بینی شکست مهمند. روشن است که صفحات مواد مرکب لایه ای در هر نقطه یک حالت تنش سه بعدی دارند. بیشتر مثالهای این اثرات سه بعدی، تنشهای لبه های آزاد، و تنشهای بین لایه ای در فصل مشترک پوسته سخت کننده در صفحات سخت شده اند. طراحان باید هنگام رابطه سازی مسأله بهینه سازی از این اثرات موضعی آگاه باشند و قیدهای مناسبی را برای در نظر گرفتن این اثرات در نظر بگیرند.

اگر ادعا شود که بعضی از مسائل مربوط به طراحی در شکست مواد مرکب به خوبی شناخته نشده اند، سخنی گزاف نیست. گاهی کمیتهای مقاومتی که برای در نظر گرفتن قیود تنش خاصی مورد نیاز است، در دسترس نیستند. به عنوان مثال، بر اساس تجربه از مصالح فلزی، طراحان اغلب به دنبال یک حد برای مقاومت فشاری موادند که بتوانند در مسأله بهینه سازی آن را در نظر بگیرند. می توان گفت که مقاومت شکست فشاری یک کمیت به شدت وابسته به مسأله است تا این که وابسته به پارامتر مقاومتی مصالح. در بعضی از کاربردها، عدم اطلاع و یا در دسترس نبودن مدلهای پیش بینی برای یک طراحی خاص، ممکن است کار طراحی را با مشکل مواجه کند. به عنوان مثال، بر خلاف مصالح فلزی، مواد مرکب در مقابل ضربه های با سرعت پایین نیز حساسند. در حال حاضر، یک مدل پیش بینی که بتواند به طور واقع بینانه ای برای طراحی مواد مرکب تحت تأثیر شرایط خرابی ضربه ای استفاده شود وجود ندارد. بعضی از این موضوعها هنوز در دست مطالعه اند و تلاش زیادی را در زمینه مکانیک مواد مرکب می طلبند.

با این مشکلات، طراحان اغلب به سوی توصیه های عملی سوق داده می شوند. به جای استفاده از زاویه تک لایه به عنوان متغیر طراحی، طراحان اغلب آنها را در زوایای معمول  $0$ ،  $\pm 45$  و  $90$  ثابت در نظر می گیرند. حتی اگر بار وارد شده بیشتر در یک جهت خاص باشد، مانند صفحه تحت بارگذاری محوری،

۶۰۶ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

وجود تک لایه هایی در غیر امتداد بار، باعث افزایش ایمنی برای شرایط باری غیر طراحی، مانند بارهای غیر قابل پیش بینی عرضی، می گردد. به منظور حصول اطمینان از حذف نشدن متغیرهای طراحی ضخامت مربوط به تک لایه هایی که بر اساس توصیه های شهودی قرار داده شده اند، یا کران پایینی برای آن ضخامتها استفاده می شود و یا بارهای اضافی تعریف می شوند. به عنوان مثال، کاربرد درصد معینی از بار محوری به عنوان بار برشی به ضخامت غیر صفر لایه های  $\pm 45$  می انجامد هر چند کران پایین برای آن لایه ها صفر باشد.

انتخاب چیدمان در ماده مرکب نیز از تجربیات شهودی تعیین می شود. به عنوان مثال، استفاده از تک لایه های  $\pm 45$  درجه به عنوان لایه های خارجی یک ماده مرکب لایه ای به خاطر تحمل صدمات مفید است. توصیه عملی دیگر این است که تعداد تک لایه های متصل یکسان بیش از ۴ نباشد. این توصیه سبب می شود تنشهای بین تک لایه ها با جهت های مختلف کاهش پیدا کند. به منظور برآورده سازی چنین قواعد چیدمان، از یک روش تکراری مانند آنچه در مرجع [46] عنوان شده می توان استفاده کرد. اگر الگوریتم شاخه و کران با متغیر شناسایی تک لایه استفاده شود، این خصوصیت را می توان به سادگی با استفاده از معادله (۵. ۳. ۱۱) اعمال کرد همان گونه که قبلاً تشریح شد.

## ۱۱.۶ تمرینها

۱. برای یک ماده مرکب لایه ای تک جهت که تحت اثر تنشهای یکنواخت  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  قرار دارد، نشان دهید که مقادیر ایستای تابع تئای-هیل<sup>۱</sup>

$$f = \left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2, \quad (11.6.1)$$

با معادلات زیر حاصل می شود

$$a \cos 2\theta + \sin 2\theta = 0,$$

$$a \sin 2\theta - \cos 2\theta = b,$$

$$a = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y} - 1, \quad \text{و} \quad b = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{\sigma_y - \sigma_x} \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2 - 1}, \quad \text{که}$$

1) Tsai and Hill

## بخش ۱۱.۶: تمرینها ۶۰۷

$$\alpha = X/Y, \quad \text{و} \quad \beta = X/S, \quad \text{و}$$

که  $X$  و  $Y$  مقاومت‌های عمودی موازی با جهت‌های الیافها و عمود بر آن است و  $S$  مقاومت برشی است.

۲. با استفاده از روش ترسیمی بخش ۲، جهت و نسبت ضخامت یک تک لایه متقارن با زاویه متوازن

$[(\pm\theta_1)_{v_1}/(\pm\theta_2)_{v_2}]$  لایه گرافیت اپوکسی T300-5208 با بیشترین سختی برشی مؤثر  $G_{xy}$  را به دست آورید. ماده مرکب باید شرایط سختی‌های زیر را نیز دارا باشد:

$$E_x \geq 17.5 \cdot 10^6 \text{ psi}, \quad E_y \geq 5.8 \cdot 10^6 \text{ psi}, \quad \text{و} \quad 0.1 \geq \nu_{xy} \geq 0.3.$$

خواص مهندسی مصالح T300-5208 گرافیت اپوکسی و جهت‌های اصلی مصالح آن عبارتند از:

$$E_1 = 26.25 \cdot 10^6 \text{ psi}, \quad E_2 = 1.49 \cdot 10^6 \text{ psi}, \quad G_{12} = 1.04 \cdot 10^6 \text{ psi}, \quad \text{و} \quad \nu_{12} = 0.28.$$

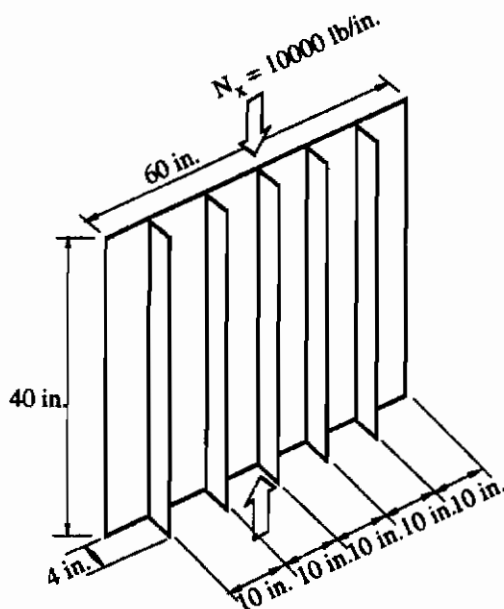
۳. نشان دهید یک ماده مرکب شبه ایزوتروپیک  $[0^\circ, 90^\circ, -45^\circ, +45^\circ]$  را می‌توان با

$[90^\circ, 0^\circ, -45^\circ, +45^\circ]$  یک ماتریس واحد  $D$  جایگزین کرده، در صورتی که  $z$  و  $k$  به گونه ای باشند که

$$z + k = 2i \quad (\text{توجه: } z \text{ و } k \text{ ممکن است غیر صحیح باشند}).$$

۴. برای یک ماده مرکب که از تعداد صحیحی تک لایه با جهت‌های  $0^\circ, -30^\circ, \pm 60^\circ$  و  $90^\circ$  درجه

تشکیل شده و فضای طراحی در شکل ۱۱.۳. ۱b نشان داده شده



شکل ۱۱.۳. ۱ یک صفحه سخت شده توسط پره که تحت تأثیر فشارهای محوری است

۶۰۸ مبانی بهینه سازی سازه ها (فصل ۱۱: طراحی بهینه سازه های ساخته شده از مواد مرکب چند لایه)

الف) شکل را با قرار دادن چیدمان لایه ها در نزدیکترین نقطه طراحی گسسته مناسب در شکل کامل کنید.

ب) اگر ماده مرکب بخواهد ضریب پواسان  $\nu_{xy}$  بزرگتر از 0.3 داشته باشد، چیدمانی را که مدول عرضی  $E_y$  را ماکزیمم می سازد به دست آورید.

۵. لایه پوسته یک صفحه با تکیه گاه ساده که با پرده سخت شده در شکل ۱۱.۶.۱ نشان داده شده

که ساختاری  $[45_n]$  دارد و سخت کننده ها از لایه های تک جهته ساخته شده اند. سختی چسبی طولی  $EI$  را که می توان برای محاسبات بار کمانش فراگیر جدول ۱۱.۳.۱ استفاده کرده به دست آورید. با فرض این که ضخامت تک لایه ها متغیرهای پیوسته اند، طراحی با وزن مینیمم را برای فشار محوری  $N_x = 10000 \text{ lb/in}$  به دست آورید. تنها قیود کمانش را در نظر بگیرید.

## ۱۱.۷ مراجع

- [1] Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill Book Co., New York, pp. 45-57, 1975.
- [2] Tsai, S. W., and Pagano N. J., "Invariant Properties of Composite Materials," in *Composite Materials Workshop*, (Eds. Tsai, S.W., Halpin, J.C., Pagano, N.J.) Technomic Publishing Co., Westport, pp. 233-253, 1968.
- [3] Caprino, G., and Crivelli-Visconti, I., "A Note on Specially Orthotropic Laminates," *J. Comp. Matls.*, 16, pp. 395-399, 1982.
- [4] Gunnink, J. W., "Comment on A Note on Specially Orthotropic Laminates," *J. Comp. Matls.*, 17, pp. 508-510, 1983.
- [5] Kandil, N., and Verchery, G., "New Methods of Design for Stacking Sequences of Laminates," *Proceedings of the International Conference on "Computer Aided Design in Composite Material Technology"*, Eds. Brebbia, C. A., de Wilde, W. P., and Blain, W. R., pp. 243-257, 1988.
- [6] Schmit, L. A., and Farshi, B., "Optimum Laminate Design for Strength and Stiffness," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 7, pp. 519-536, 1973.
- [7] Park, W. J., "An Optimal Design of Simple Symmetric Laminates Under the First Ply Failure Criterion," *J. Comp. Matls.*, 16, pp. 341-355, 1982.
- [8] Massard, T. N., "Computer Sizing of Composite Laminates for Strength," *J. Reinf. Plastics and Composites*, 3, pp. 300-345, 1984.
- [9] Tsai, S. W., and Hahn, H. T., *Introduction to Composite Materials*, Technomic Publishing Co., Inc., Lancaster, Pa., pp. 315-325, 1980.
- [10] Tsai, S. W., "Strength Theories of Filamentary Structures," in R. T. Schwartz and H. S. Schwartz (eds.), *Fundamental Aspects of Fiber Reinforced Plastic*, Wiley Interscience, New York, pp. 3-11, 1968.



- [11] Brandmaier, H. E., "Optimum Filament Orientation Criteria," J. Composite Materials, 4, pp. 422-425, 1970.
- [12] Miki, M., "Material Design of Composite Laminates with Required In-Plane Elastic Properties," Progress in Science and Engineering of Composites, Eds., T. Hayashi, K. Kawata, and S. Umekawa, ICCM-IV, Tokyo, Vol. 2, pp. 1725-1731, 1982.
- [13] Miki, M., "A Graphical Method for Designing Fibrous Laminated Composites with Required In-plane Stiffness," Trans. JSCM, 9, 2, pp. 51-55, 1983.
- [14] Schmit, L. A., and Farshi, B., "Optimum Design of Laminated Fibre Composite Plates," Int. J. Num. Meth. Engng., 11, pp. 623-640, 1977.
- [15] Miki, M., "Optimum Design of Laminated Composite Plates Subject to Axial Compression," Composites' 86: Recent Advances in Japan and the United States, Eds., Kawata, K., Umekawa, S., and Kobayashi, A., Proc. Japan-U.S. CCM-III, Tokyo, pp. 673-680, 1986.
- [16] Bert, C. W., "Optimal Design of a Composite-Material Plate to Maximize its Fundamental Frequency," J. Sound and Vibration, 50 (2), pp. 229-237, 1977.
- [17] Rao, S. S., and Singh K., "Optimum Design of Laminates with Natural Frequency Constraints," J. Sound and Vibration, 67 (1) pp. 101-112, 1979.
- [18] Mesquita, L., and Kamat, M. P., "Optimization of Stiffened Laminated Composite Plates with Frequency Constraints," Eng. Opt., 11, pp. 77-88, 1987.
- [19] Cheng Kengtung, "Sensitivity Analysis and a Mixed Approach to the Optimization of Symmetric Layered Composite Plates," Eng. Opt., 9, pp. 233-248, 1986.
- [20] Pedersen, P., "On Sensitivity Analysis and Optimal Design of Specially Orthotropic Laminates," Eng. Opt., 11, pp. 305-316, 1987.
- [21] Muc, A., "Optimal Fiber Orientation for Simply-Supported, Angle-Ply Plates Under Biaxial Compression," Comp. Struc., 9, pp. 161-172, 1988.
- [22] Shin, Y. S., Haftka, R. T., Watson, L. T., and Plaut, R. H., "Design of Laminated Plates for Maximum Buckling Load", J. Composite Materials, 23, pp. 348-369, 1989
- [23] Miki, M., and Sugiyama, Y., "Optimum Design of Laminated Composite Plates Using Lamination Parameters," Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 32nd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Baltimore, MA., Part I, pp. 275-283, April, 1991.
- [24] Gürdal, Z. and Haftka, R. T., "Optimization of Composite Laminates," presented at the NATO Advanced Study Institute on Optimization of Large Structural Systems, Berchtesgaden, Germany, Sept. 23 - Oct. 4, 1991.
- [25] Haftka, R.T., and Walsh, J.L., "Stacking-Sequence Optimization for Buckling of Laminated Plates by Integer Programming, AIAA Journal (in Press).
- [26] Schrage, L., Linear, Integer and Quadratic Programming with LINDO, 4th Edition, The Scientific Press, Redwood City CA., 1989.



- [27] Nagendra, S., Haftka, R. T., and Gürdal, Z., "Optimization of Laminate Stacking sequence with Stability and Strain Constraints," submitted for presentation at the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 33rd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Dallas, TX., April, 1992.
- [28] Lombardi, M., "Ottimizzazione di Lastre in Materiale Composito con l'uso di un Metodo di Annealing Simulato," Tesi di Laurea, Department of Structural Mechanics, University of Pavia, 1990.
- [29] Le Riche, R., and Haftka, R.T., "Optimization of Laminate Stacking-Sequence for Buckling Load Maximization by Genetic Algorithm," submitted for presentation at the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 33rd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Dallas, TX., April, 1992.
- [30] Stroud, W. J., and Agranoff, N., "Minimum-mass Design of Filamentary Composite Panels Under Combined Loadings: Design Procedure Based on Simplified Buckling Equations," NASA TN D-8257, 1976.
- [31] Timoshenko, S., Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York, 1936.
- [32] Stein, M., and Mayers, J., "Compressive Buckling of Simply Supported Curved Plates and Cylinders of Sandwich Construction," NACA TN 2601, 1952.
- [33] Advanced Composites Design Guide. Vols. I-V, Third Edition, U.S. Air Force, Jan. 1973.
- [34] Lekhnitskii, S. G., Anisotropic Plates. Translated by Tsai, S. W., and Cheron, T., Gordon and Breach Sci. Publ., Inc., New York, 1968.
- [35] Hague, D. S., and Glatt, C. R., "A Guide to the Automated Engineering and Scientific Optimization Program, AESOP," NASA CR-73201, April 1968.
- [36] Stroud, W. J., Agranoff, N., and Anderson, M. S., "Minimum-Mass Design of Filamentary Composite Panels Under Combined Loads: Design Procedure Based on a Rigorous Buckling Analysis," NASA TN D-8417, July 1977.
- [37] Wittrick, W. H., and Williams, F. W., "Buckling and Vibration of Anisotropic or Isotropic Plate Assemblies Under Combined Loadings," Int. J. Mech. Sci., 16, 4, pp. 209-239, April 1974.
- [38] Plank, R. J., and Williams, F. W., "Critical Buckling of Some Stiffened Panels in Compression, Shear and Bending," Aeronautical Q., XXV, Part 3, pp. 165-179, August 1974.
- [39] Vanderplaats, G. N., "CONMIN - A Fortran Program for Constrained Function Minimization, User's Manual," NASA TM X-62, 282, 1973.
- [40] Stroud, W. J., and Anderson, M. S., "PASCO: Structural Panel Analysis and Sizing Code, Capability and Analytical Foundations," NASA TM 80181, November 1981.
- [41] Anderson, M. S., Stroud, W. J., Durling, B. J., and Hennessy, K. W., "PASCO: Structural Panel Analysis and Sizing Code, User's Manual," NASA TM 80182, November 1981.

- [42] Giles, G. L., and Anderson, M. S., "Effects of Eccentricities and Lateral Pressure on the Design of Stiffened Compression Panels," NASA TN D-6784, June 1972.
- [43] Swanson, G. D., and Gürdal, Z., "Structural Efficiency Study of Graphite-Epoxy Aircraft Rib Structures," *J. Aircraft*, 27 (12), pp. 1011-1020, 1990.
- [44] Stroud, W.J., Greene, W.H., and Anderson, M.S., "Buckling Loads of Stiffened Panels Subjected to Combined Longitudinal Compression and Shear: Results Obtained With PASCO, EAL, and STAGS Computer Programs," NASA TP 2215, January 1984.
- [45] Williams, F.W., and Kennedy, D., "User's Guide to VICON, VIPASA with Constraints," Department of Civil Engineering and Building Technology, University of Wales Institute of Science and Technology, August, 1984.
- [46] Williams, F.W., and Anderson, M.S., "Incorporation of Lagrangian Multipliers into an Algorithm for Finding Exact Natural Frequencies or Critical Buckling Loads," *Int. J. Mech. Sci.*, 25, 8, pp. 579-584, 1983.
- [47] Butler, R., and Williams, F.W., "Optimum Design Features of VICONOPT, an Exact Buckling Program for Prismatic Assemblies of Anisotropic Plates," *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 31st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Long Beach, CA, Part 2*, pp. 1289-1299, 1990.
- [48] Dickson, J. N., Cole, R. T., and Wang, J. T. S., "Design of Stiffened Composite Panels in the Postbuckling Range," In *Fibrous Composites in Structural Design*, Eds. Lenoc, E. M., Oplinger, D. W., and Burke, J. J., Plenum Press, New York, pp. 313-327, 1980.
- [49] Dickson, J. N., and Biggers, S. B., "Design and Analysis of a Stiffened Composite Fuselage Panel," NASA CR-159302, August 1980.
- [50] Shin, D.K., Gürdal, Z., and Griffin, O. H. Jr., "Minimum-Weight Design of Laminated Composite Plates for Postbuckling Performance, *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 32nd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Baltimore, Maryland, Part I*, pp. 257-266, 1991.
- [51] Bushnell, D., "PANDA2 — Program for Minimum Weight Design of Stiffened, Composite, Locally Buckled Panels," *Comput. Struct.*, 25 (4), pp. 469-605, 1987.
- [52] Shirk, M. H., Hertz, T. J., and Weisshaar, T. A., "Aeroelastic Tailoring — Theory, Practice, and Promise," *J. Aircraft*, 23 (1), pp. 6-18, 1986.
- [53] Lynch, R. W., and Rogers, W. A., "Aeroelastic Tailoring of Composite Materials to Improve Performance," *Proceedings of the AIAA/ASME/SAE, 17th Structures Structural Dynamics and Materials Conference, King of Prussia, PA., May 5-7*, pp. 61-68, 1976.
- [54] McCullers, L. A., "Automated Design of Advanced Composite Structures," *Proceedings of the ASME Structural Optimization Symposium, AMD-7*, pp. 119-133, 1974.
- [55] McCullers, L. A., and Lynch, R. W., "Dynamic Characteristics of Advanced Filamentary Composite Structures," *AFFDL-TR-73-111*, vol. II, Sept. 1974.

- [56] Haftka, R. T., "Structural Optimization with Aeroelastic Constraints: A Survey of US Applications," Int. J. of Vehicle Design, 7 (3/4), pp. 381-392, 1986.
- [57] McCullers, L. A., and Lynch, R. W., "Composite Wing Design for Aeroelastic Tailoring Requirements," Air Force Conference on Fibrous Composites in Flight Vehicle Design, Sept. 1972.
- [58] Fant, J. A., "An Advanced Composite Wing for the F-16," paper presented at the 22nd National SAMPE Symposium and Exhibition, San Diego, pp. 773-783, April 1977.
- [59] Gimmestad, D., "Aeroelastic Tailoring of a Composite Winglet for KC-135," AIAA Paper No. 81-0607, presented at the AIAA/ASME/ASCE/AHS 22nd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Atlanta, GA., Part 2, pp. 373-376, April 1981.
- [60] Wilkinson, K., Markowitz, J., Lerner, E., George, D., and Batill, S. M., "FASTOP: A Flutter and Strength Optimization Program for Lifting Surface Structures," J. Aircraft, 14 (6), pp. 581-587, 1977.
- [61] Neill, D.J., Johnson, E.H., and Canfield, R., "ASTROS—A Multidisciplinary Automated Structural Design Tool," J. Aircraft, 27, 12, pp. 1021-1027, 1990.
- [62] Vanderplaats, G. N., "ADS — A Fortran Program for Automated Design Synthesis," NASA-CR-177985, Sept. 1985.
- [63] Stroud, W. J., "Optimization of Composite Structures," NASA TM 84544, August 1982.
- [64] Nagendra, S., Haftka, R. T., Gürdal, Z., and Starnes, J. H., Jr., "Design of a Blade-Stiffened Composite Panel with a Hole," Composite Structures, Vol. 18 (3), pp. 195-219, 1991.

## واژه نامه فارسی - انگلیسی

offset	انحراف		<b>الف</b>
specific energy	انرژی ویژه	aeroelastic	آئروالاستیک
reflection	انعکاس	trial and error	آزمون و خطا
contraction	انقباض	primal	ابتدایی
perturb	ایجاد اختلال کردن - تغییرات کوچک	random	اتفاقی
stationary	ایستا	probabilistic	احتمالاتی
		survival of the fittest	اصل بقای لایقترین
	<b>ب</b>	subsidiary	اضافی
limit load	بارحد	distortion	اعوجاج
pseudo load	بار مجازی و کاذب	partition	افراز
ultimate load	بار نهایی	extermun	اکسترمم
collapse load	بار فروریختگی	extermization	اکسترمم سازی
aileron	بالچه' کنترلی هواپیما	adjoint	الحاقی - مجاورتی
domain	بخش	genetic algorithm	الگوریتم ژنتیکی
adjoint vector	بردار الحاقی		الگوریتم شاخه و کران
coupling vector	بردار جفت کننده	branch and bound algorithm	
magnitude	بزرگی	fiber	الیاف
crystalline	بلوری	expansion	انبساط

transformation	تبدیل	fathom	به انتها رسیده
	تبدیل دوباره مقیاس بندی شده 'تصویری		بهره برداری از لاغری ماتریسها
Projective rescaling transformation		exploiting sparsity	
decomposition	تجزیه ای	update	بهنگام
cumulative	تجمعی	rank-one updates	بهنگامهای رتبه 'یک
transpose	ترانپازه		بهینه سازی چند سطحی
decision making	تصمیم سازی	multilevel optimization	
thermal equilibrium	تبادل حرارتی	bit string	بیت رشته
overall finite difference	تفاضل محدود کلی	absurdity	بیهوده
crossover	تقاطع		
discretized	تقسیم بندی شده		پ
univariate	تک تغییری	transition parameter	پارامتر انتقال
unimodal	تک حالتی		پارامتر وسعت بخشیدن گام
iterative	تکراری	step expansion parameter	
periodic	تناوبی	double- dogleg	پاسگی دو برابر
steepest descent	تندترین کاهش	conservative	پایستار
robust	توانمند	constraint qualification	پذیرش قید
reproduction	تولیدمثل	post-tensioned	پس-کششی
		postbuckling	پس کمانش
	ج	plastic	پلاستیک (خمیری شکل)
dislocation	جابجایی	plane-tapered	پله ای صفحه ای
backtracking	جای گذاری پسینی	envelope	پوش
back-substitution	جایگذاری پسین		
line-search	جست وجوی خطی		ت
univariate search	جست وجوی یک تغییری	tableau	تابلو - جدول
eigen pairs	جفتهای ویژه	graph theory	تئوری گراف

واژه‌نامه فارسی-انگلیسی ۶۱۵

amplitude	دامنه	kinematics	جنبشی - سینماتیک
quadratic	درجه دوم	exact solution	جواب دقیق
interpolation	درونیابی	occasional mutation	جهش گاه به گاه
cubic interpolation	درونیابی درجه سه		
exact	دقیق		ج
bisection	دو بخشی	roulette wheel	چرخ رولت
binary	دو تایی	ductile	چکشخوار
perimeter	دور و محیط	multidisciplinary	چند منظوره ای
dual	دو گان		ح
bay	دهانه ساختمان		
		steady-state	حالت پایا
	ر	bound	حد
rank	رتبه	safeguarded	حفاظت شده
chromosom strings	رشته های کروموزوم	domain	حوزه
	روش تغییر مکان مودی		
mode displacement method			خ
substitution method	روش جایگذاری	crush	خرد شدن - له شدن
	روش شتاب مودی	tolerance	خطا (تولرانس)، تحمل (رواداری)
mode acceleration method		truncation error	خطای برش
fixed mode approach	رویکرد مود ثابت	camber	خمیدگی
microstructure	ریز ساختار	rib	خمیده (استخوان دنده)
		self canceling	خود لغو شونده
	ز		
acute angle	زاویه حاده		۵
obtuse angle	زاویه منفرجه		دارای خواص یکسان در سه جهت متعامد -
redundancy	زاید	orthotropic	اورتوتروپیک

		مبانی بهینه سازی سازه ها	
mode shape	شکل مود	scheduling	زمان بندی
intuitive	شهودی	cooling schedule	زمان بندی سرد شدن
		surplus	زیادی
	ص	subordinate	زیر جهت ده
	صفحات مرکب لایه ای		
laminated composite plates			ژ
closed form	صورت کامل - حل دقیق	hemstitching	ژوردوزی
	ض		س
cross product	ضرب برداری	configuration	ساختار
Lagrange multiplier	ضربگر لاگرانژ	mechanism	سازوکار
			سازوکار مایل (با حرکت جانبی)
	ط	sway mechanism	
fully stressed desing	طراحی تمام تنیده	skeletal structure	سازه اسکلتی
practical design	طراحی کاربردی	substructure	سازه زیر مجموعه
move distance	طول حرکت	ground structure	سازه پایه
	ظ		سرد شدن تدریجی شبیه سازی شده (تابکاری شبیه سازی شده)
dummy	ظاهری	simulated annealing	
		series	سری ها
	ع	push-off	سوق دهنده
generic	عام	undamped system	سیستم نامیرا
thrust	عامل جلو برنده		
factorization	عامل گیری		ش
load scaling factor	عامل مقیاس بندی بار	niche	شانس بقا
condition number	عدد شرطی	lattice	شبکه

واژه نامه فارسی- انگلیسی ۶۱۷

deflation	کاهش	passive member	عضو غیرفعال
shrinkage	کاهش	structural performance	عملکرد سازه ای
traction	کشش سطحی		
slack	کمزور		غ
least squares	کمترین مربعات	dominance	غلبه یافتگی
auxiliary	کمکی		
lightly- redundancy	کمی اضافه وزن داشتن		ف
minor	کهاد	gap	فاصله، تهی
		overdetermined	فرامعین
	ل	coordination process	فرایند جهت دهی
ply	لایه - تا	extreme	فرین
flutter	لرزشی	extrema	فرین ها- اکسترمم ها
			فن گرادیان مزدوج دوباره شروع شده
	م	restarted conjugate gradient technique	
projection matrix	ماتریس تصویر	transcendental	فوق العاده
non- sparse matrix	ماتریس غیر لاغر	superlinear	فوق خطی
nested	متداخل- تودرتو		
slack variable	متغیر کمزور		ق
variable metric	متغیر متریک	portal frames	قابهای سردر
intervening variable	متغیرهای مانع	compliance	قبول، موافقت- وادادگی، نرمی
adjoint	مجاورتی	chord	قوس-زه
state of the art	مدرن و پیشرفته	envelope constrain	قیدپوش
second order	مرتبه دوم		
first order	مرتبه اول		ک
Q- conjugate	مزدوج Q		کاملاً ارتجاعی- خمیری
directional derivative	مشتق سویی	elastic- perfectly plastic	



		مبانی بهینه سازی سازه ها	
bifurcation point	نقطه شاخه	artificial	مصنوعی
stationary point	نقطه ایستا	cutting value	مقدار برش
saddle point	نقطه زینی	facet	مقطع (برشی از سطح کریستال)
regular point	نقطه منظم	large- scale	مقیاس بزرگ
increment	نمو	complementarily	مکملی
flow chart	نمودار جریان	singular	منفرد
		ad-hoc	موضعی - ارتجالی
		میدان تغییر مکان قابل قبول	
		legitimate displacement field	
		illegitimate field	
		میدان غیر قابل قبول	
		و	
		inversion	
		واژگونی - وارونگی	
		ه	
		analogy	
		همانندی	
		isotropic	
		همسانگرد	
		smooth	
		هموار	
		ن	
		spatial discontinuities	
		ناپیوستگی فضایی	
		inconsistent	
		ناسازگار	
		nonsingular	
		نامنفرد	
		Euclidean norm	
		نرم اقلیدسی	
		aspect ratio	
		نسبت ابعاد - نسبت ظاهر	
		tunneling	
		نفوذ زنی	
		ی	
		flat	
		یکدست	
		monotonic	
		یکنواخت	

## واژه نامه انگلیسی - فارسی

### A

absurdity                      بیهوده

acute angle                      زاویه حاده

ad-hoc                      موضعی - ارتجالی

adjoint                      الحاقی - مجاورتی

adjoint vector                      بردار الحاقی

aeroelastic                      آئروالاستیک

aileron                      بالچه کترلی هواپیما

amplitude                      دامنه

analogy                      همانندی

artificial                      مصنوعی

aspect ratio                      نسبت ابعاد - نسبت ظاهر

auxiliary                      کمکی

### B

back-substitution                      جایگذاری پسین

backtracking                      جایگذاری پسینی

bay                      دهانه ساختمان

bifurcation point                      نقطه شاخه

binary                      دوتایی

bisection                      دویخشی

bit string                      بیت رشته

bound                      حد

branch and bound algorithm                      الگوریتم شاخه و کران

### C

camber                      خمیدگی

chord                      قوس - زه

chromosom strings                      رشته های کروموزوم

closed form                      صورت کامل - حل دقیق

collapse load                      بار فروریختگی

complementarily                      مکملی

compliance                      قبول ، موافقت - وادادگی ، نرمی

condition number                      عدد شرطی

configuration                      ساختار

۶۲۰ سبانی بهینه سازی سازه ها

conservative	پایستار	ductile	چکشخوار
constraint qualification	پذیرش قید	dummy	ظاهری
contraction	انقباض		
colling schedule	زمانبندی سرد شدن	E	
coordination process	فرایند جهت دهی	eigen pairs	جفتهای ویژه
coupling vector	بردار جفت کننده	elastic-perfectly plastic	
cross product	ضرب برداری		کاملاً ارتجاعی - خمیری
crossover	تقاطع	envelope	پوش
crush	خرد شدن - له شدن	envelope constrain	قید پوش
crystalline	بلوری	Euclidean norm	نرم اقلیدسی
cubic interpolation	درونیابی درجه سه	exact	دقیق
cumulative	تجمعی	exact solution	جواب دقیق
cutting value	مقدار برش	expansion	انبساط
		exploiting sparsity	
<b>D</b>			بهره برداری از لاغری ماتریسها
decision making	تصمیم سازی	extermization	اکسترم سازی
decomposition	تجزیه ای	extermum	اکسترم
deflation	کاهش	extrema	فرین ها - اکسترم ها
directional derivative	مشتق سویی	extreme	فرین
discretized	تقسیم بندی شده		
dislocation	جابجایی	F	
distortion	اعوجاج	facet	مقطع (برشی از سطح کریستال)
domain	حوزه	factorization	عامل گیری
dominance	غلبه یافتگی	fathom	به انتها رسیده
double-dogleg	پاسگی دو برابر	fiber	الیاف
dual	دو گان	first order	مرتبه اول

واژه نامه انگلیسی-فارسی ۶۲۱

fixed mode approach	رویکرد مود ثابت	<b>K</b>	
flat	یکدست	kinematics	جنبشی - سینماتیک
flow chart	نمودار جریانی	<b>L</b>	
flutter	لرزشی	Lagrange multiplier	ضربگر لاگرانژ
fully stressed design	طراحی تمام تنیده	laminated composite plates	صفحات مرکب لایه ای
<b>G</b>		large- scale	مقیاس بزرگ
gap	فاصله، تهی	lattice	شبکه
generic	عام	least square	کمترین مربعات
genetic algorithm	الگوریتم ژنتیکی	legitimate displacement field	میدان تغییر مکان قابل قبول
graph theory	تئوری گراف	lightly- redundancy	کمی اضافه وزن داشتن
ground structure	سازه، پایه	limit load	بارحد
<b>H</b>		line- search	جست و جویی خطی
hemstitching	ژوردوزی	load scaling factor	عامل مقیاس بندی بار
<b>I</b>		<b>M</b>	
illegitimate field	میدان غیر قابل قبول	magnitude	بزرگی
inconsistent	ناسازگار	mechanism	ساز و کار
increment	نمو	microstructure	ریز ساختار
interpolation	درونیابی	minor	کهاد
intervening variable	متغیرهای مانع	mode acceleration method	روش شتاب مودی
intuitive	شهودی	mode displacement method	
inversion	واژگونی - وارونگی		روش تغییر مکان مودی
isotropic	همسانگرد	mode shape	شکل مود
iterative	تکراری	monotonic	یکنواخت

move distance	طول حرکت	plane- tapered	پله ای صفحه ای
multidisciplinary	چند منظوره ای	plastic	پلاستیک (خمیری شکل)
multilevel optimization	بهینه سازی چند سطحی	ply	لایه - تا
		portal frames	قابهای سردر
<b>N</b>		post- tensioned	پس - کششی
nested	متداخل - تو در تو	postbuckling	پس کمانش
niche	شانس بقا	practical design	طراحی کاربردی
non- sparse matrix	ماتریس غیر لاغر	primal	ابتدایی
nonsingular	نامفرد	probabilistic	احتمالاتی
		projection matrix	ماتریس تصویر
<b>O</b>		projective rescaling transformation	
obtuse angle	زاویه 'منفرجه		تبدیل دوباره مقیاس بندی شده 'تصویری
occasional mutation	جهش گاه به گاه	pseudo load	بار مجازی و کاذب
offset	انحراف	push-off	سوق دهنده
orthotropic			
	دارای خواص یکسان در سه جهت متعامد -	<b>Q</b>	
	اورتوتروپیک	Q-conjugate	مزدوج Q
overall finite difference	تفاضل محدود کلی	quadratic	درجه دوم
overdetermined	فرامعین		
<b>P</b>		<b>R</b>	
partition	افراز	random	اتفاقی
passive member	عضو غیر فعال	rank	رتبه
perimeter	دور و محیط	rank-one updates	بهنگامهای رتبه 'یک
periodic	تناوبی	redundancy	زیاید
perturb	ایجاد اختلال کردن - تغییرات کوچک	reflection	انعکاس
		regular point	نقطه 'منظم

واژه نامه انگلیسی-فارسی ۶۲۳

reproduction	تولیدمثل	steady-state	حالت پایا
restarted conjugate gradient technique		steepest descent	تندترین کاهش
	فن گرادینان مزدوج دوباره شروع شده	step expansion parameter	
rib	خمیده (استخوان دنده)		پارامتر وسعت بخشیدن گام
robust	توانمند	structural performance	عملکرد سازه ای
roulette wheel	چرخ رولت	subordinate	زیرجهت ده
		subsidiary	اضافی
<b>S</b>		substitution method	روش جایگذاری
saddle point	نقطه زینی	substructure	سازه زیر مجموعه
safeguarded	حفاظت شده	superlinear	فوق خطی
scheduling	زمان بندی	surplus	زیادی
second order	مرتبه دوم	survival of the fittest	اصل بقای لایقترین
self canceling	خود لغو شونده	sway mechanism	
series	میری ها		سازه و کار مایل (با حرکت جانبی)
shrinkage	کاهش		
simulated annealing		<b>T</b>	
	سرد شدن تدریجی شده (تابکاری شبیه سازی شده)	tableau	تابلو- جدول
singular	منفرد	thermal equilibrium	تبادل حرارتی
skeletal structure	سازه اسکلتی	thrust	عامل جلو برنده
slack	کمبود	tolerance	خطا (تولرانس)، تحمل (رواداری)
slack variable	متغیر کمبود	traction	کشش سطحی
smooth	هموار	transcendental	فوق العاده
spatial discontinuities	ناپیوستگی فضایی	transformation	تبدیل
specific energy	انرژی ویژه	transition parameter	پارامتر انتقال
state of the art	مدرن و پیشرفته	transpose	ترانهاده
stationary	ایستا	trial and error	آزمون و خطا

truncation error	خطای برش	univariate	تک تغییری
tunneling	نقب زنی	univariate search	جست وجوی یک تغییری
		update	بهنگام
<b>U</b>			
ultimate load	بارنهایی	<b>V</b>	
undamped system	سیستم نامیرا	variable metric	متغیر متریک
unimodal	تک حالتی		

## نمایه

### الف

الگوریتمهای شبه نیوتن یا متغیر متریک ۱۸۸

انبساط ۱۷۰

اندازه گام ۳۳۶

انرژی پتانسیل مینیمم ۷۷

انرژی داخلی ذخیره شده ۷۶

انرژی کرنشی ارتجاعی ویژه ۷۷

انعکاس ۱۷۰

انقباض ۱۷۰

اورتوتراپیک ۵۴۸، ۵۹۲

اولر - برنولی ۸۶، ۴۰۱

اولر - لاگرانژ ۵۲

ایزوتراپیک ۶۰۴

ایمنی ۱۰۵

### ب

بار بحرانی ۲۰۹

بار حدی کمانش ۴۲۳

بار فرو ریختگی ۱۰۳

بار کمانشی ۴۳۴

بار نهایی ۱۱۲، ۱۱۴

بار حد ۱۰۳

آبروالاستیک ۳۸۰

اجزای ایزوپارامتریک ۴۴۵

آرامید اپوکسی ۵۷۱

ارتعاشات نامیرا ۳۷۲

ارتعاشات هارمونیک آزاد ۴۳۲

از نظر ایستایی معین ۴۵، ۷۰، ۱۱۶، ۱۵۴،

۲۸۲، ۳۰۷، ۴۶۴

اصل بقای انرژی ۷۶

اکستروم ۵۱، ۶۰

اکستروم سازی ۱۰۱

الگوریتم دی اف پی ۱۷۳

الگوریتم ژنتیکی ۱۹۹، ۲۰۴، ۵۹۰

الگوریتم مرد شدن تدریجی شبیه سازی شده ۱۹۹،

۵۹۰

الگوریتم سیمپلکس ۱۳۹

الگوریتم شاخه و کران ۱۴۱، ۱۵۵، ۶۰۶

الگوریتم کارمارکار ۱۳۹

الگوریتم گرادیان مزدوج فلتچر - ریوز ۱۸۲

الگوریتم متروپلیس ۲۰۰

الگوریتمهای جست و جوی چند متغیره ۲۰۴



برنامه' پارس (PARS) ۳۲۰	بارهای حدی ۳۵۹
برنامه' پراس (PROSS) ۳۲۰	بارهای حرارتی ۴۶۱
برنامه' تی اس او (TSO) ۳۲۰ ، ۶۰۲	بارهای فرو ریختگی ۵۳۳
برنامه' دات (DOT) ۳۲۱	بارهای مرده و زنده ۱۱۴
برنامه' داک (DOC) ۳۲۱	باز توزیع مصالح ۲۹۶
برنامه' دی ساپ (SESAP) ۳۲۰	بازه' عدم اطمینان ۱۶۵ ، ۱۶۸
برنامه' ژنسیس (GENESIS) ۳۲۱	بال هواپیما ۵۳۹
برنامه' شپ (SHAPE) ۳۲۱	بتن پیش تنیده ۱۱۴
برنامه' فستاپ (FASSTOP) ۳۲۰	بردار الحاقی ۳۵۹ ، ۳۹۴
برنامه' کان مین (CONMIN) ۳۲۰ ، ۲۴۷	بردار گرایان ۴۴
برنامه' اوپتیم (OPTIMUM) ۳۲۰	بردار ویژه ۳۶۲ ، ۳۶۸
برنامه' نسترن (NASTRAN) ۳۲۱	برنامه' اپتیم (OPTIMUM) ۳۲۰
برنامه' نیسا اپت (NISAOPT) ۳۲۱	برنامه' اجزای محدود ۲۷۷
برنامه' نیسای دو (NISAIH) ۳۲۱	برنامه' اس یو ام تی جدید (NEWSUMT) ۳۲۲
برنامه' واسپ (WASP) ۳۲۰	برنامه' اسپار (SPAR) ۳۲۰
برنامه ریزی خطی ۲۸ ، ۱۰۱	برنامه' استارز (STARS) ۳۲۰
برنامه ریزی خطی به شکل استاندارد ۱۲۳	برنامه' آستراس (ASTROS) ۳۲۱
برنامه ریزی خطی عدد صحیح ۱۴۴ ، ۵۸۱	برنامه' استروپت (STROPT) ۳۲۱
برنامه ریزی خطی عدد صحیح مخلوط ۱۴۵	برنامه' اکسس (ACCESS) ۳۲۰
برنامه ریزی درجه دوم دنباله ای ۲۶۹	برنامه' اوپ استت (OPTSTAT) ۳۲۰
برنامه لیندو ۵۸۴	برنامه' اوپت (OPT) ۳۲۲
برنامه ریزی خطی دنباله ای ۱۰۲ ، ۲۷۹ ، ۳۰۳	برنامه' اوپت سیس (OPTSYS) ۳۲۱
برنامه ریزی خطی صحیح دنباله ای ۵۹۰	برنامه' اوپت کومپ (OPTCOMP) ۳۲۰
برنامه ریزی ریاضی ۴۶۵	برنامه' ای ال (EAL) ۳۲۰
برون اپوکسی ۵۷۱	برنامه' ای اس اوپ (ASOP) ۳۲۰
برون یابی خطی ۳۷۲	برنامه' ای دی اس (ADS) ۳۲۱ ، ۶۰۴
بزرگی مشتق ۳۴۳	برنامه' آی دیاس (I DEAS) ۳۲۱
بسامد ارتعاشی ۴۳۳	برنامه' ای دیزاین (IDESIGN) ۳۲۲

نمایه ۶۲۷

پاسخ ایستایی خطی ۲۹۴	بسامد طبیعی ۳۶۶
پاسخ پیش کمانش ۴۲۸	بسامدهای اصلی ۸۸ ، ۹۵
پاسخ گذرا ۳۸۲	بسامدهای طبیعی ۴۳۴
پایداری ۴۶	بسته های نرم افزاری بهینه سازی ۳۱۹
پایداری ارتجاعی ۵۶۵	بسط بینم ۴۹۶
پایستار ۳۶۱	بهنگام برویدن ۱۸۹
پیخ ۵۵۷	بهنگام های رتبه دو ۱۸۹
پس کمانش ۶۰۱	بهنگام های رتبه یک ۱۸۹
پلاستیسیته ۱۰۵	بهین فراگیر ۸۵ ، ۵۹۰
پهنای نوار قطری ۵۳۴	بهین محلی ۷۵ ، ۸۵ ، ۵۹۰
پیش کمانشی ۴۳۵	بهینه سازی ادج ورث پارتو ۲۳
	بهینه سازی اندازه ۳۱۶ ، ۵۳۶
ت	بهینه سازی پارامتر ۱۹
تابع پوش ۵۳۲	بهینه سازی متداخل ۴۶۹
تابع تک حالتی ۱۶۱	بهینه سازی تقریبی دنباله ای ۲۷۷
تابع جریمه ۵۷۷	بهینه سازی تقریبی غیر خطی دنباله ای ۳۱۳
تابع جریمه برداری ۵۳۱	بهینه سازی چند معیاری ۲۲ ، ۲۴
تابع جریمه خارجی ۲۵۱ ، ۲۵۵ ، ۲۷۵ ، ۵۲۹	بهینه سازی دو سطحی ۵۱۲
تابع جریمه داخلی ۲۵۵ ، ۲۶۰ ، ۲۷۵ ، ۳۲۰	بهینه سازی ساختار ۳۱۶ ، ۳۱۸ ، ۵۳۵
تابع جریمه داخلی گسترش یافته ۲۶۰ ، ۲۶۳	بهینه سازی شکل ۲۷۹ ، ۳۱۶
تابع جریمه داخلی گسترش یافته درجه دوم ۲۵۷	بهینه سازی کمانش ترسیمی ۵۶۸
تابع جریمه داخلی لگاریتمی ۲۵۶	بهینه سازی مقید ۲۱۵
تابع جریمه وارون ۲۵۶	بهینه سازی نامقید ۱۵۷
تابع دیرالک ۳۸۷	
تابع گرین ۳۸۸ ، ۳۹۰ ، ۳۹۷	پ
تابع گشتاور مانند تیر ۶۲	پارامتر بار بحرانی ۸۳
تابع لاگرانژ ۲۲۸	پارامتر مسیر ۴۲۰
تابع لاگرانژین افزایش یافته ۲۶۶	پارامترسازی دامنه ۴۴۱ ، ۴۴۵

۶۲۸ مبانی بهینه سازی سازه ها

تابع محدب ۲۲۵	تقاطع ۲۰۴
تابع هدف ۲۲	تقاطع دو نقطه ای ۲۰۷
تابع هدف افزایش یافته ۲۶۲	تقاطعهای چند نقطه ای ۲۰۷
تابعی ۵۰ ، ۶۰	تقریب پوش شکست ۵۵۹
تابعی انرژی پتانسیل ۵۳	تقریب خطی ۲۴۱ ، ۲۷۸
تابلو سیمپلکس ۱۲۹	تقریب درجه دو ۲۸۷
تانسور عمومی تنش ۴۰۴	تقریب دو جمله ای ۹۳
تبدیل دوباره مقیاس بندی شده تصویری ۱۴۳	تقریب دو نقطه ای ۲۹۲
تبدیل مختصات ۱۴۲	تقریب دی ای بی ۳۰۲
تجزیه ۵۱۱ ، ۵۱۳	تقریب محافظه کارانه ۲۸۳
تحدب ۴۶۹	تقریب مودال ۳۸۸
تحدب تابع ۷۵	تقریب همیان ۱۸۸
تحلیل آتروالاستیکی ۵۳۹	تقریب وارون ۲۸۳ ، ۳۱۵ ، ۳۲۸ ، ۴۷۸ ، ۴۸۱
تحلیل ایستایی ۴۱۹	تقریبهای صریح ۲۷۸
تحلیل ایستایی خطی ۴۰۳	تقریبهای عام ۲۸۰
تحلیل حد ۱۰۳ ، ۱۰۶	تقریبهای فراگیر ۲۸۰ ، ۲۹۰
تحلیل و طراحی همزمان ۳۰ ، ۵۱۲ ، ۵۳۳	تقریبهای کاهش ۳۸۸
ترازهای تابع هدف ۱۲۱	تقریبهای محلی ۲۷۸ ، ۲۸۰ ، ۳۱۴
ترتیب چیدمان برای طراحی کمانش ۵۸۲	تقریبهای مرتبه اول ۴۷۸
ترتیب چیدمان لایه ها ۵۷۳	تقریبهای میانه ۲۹۲
ترتیب چیدمان لایه های مواد مرکب ۵۴۷	تمام تنیده ۴۵
تعادل حرارتی ۲۰۱	تندترین کاهش ۱۷۹
تغییرات کوچک ۵۰	تنش غشایی ۴۶۵
تفاضل محدود کلی (OFD) ۴۵۷	توابع جریمه گسسته ۲۶۲
تفاضل پیش رو ۱۹۶ ، ۳۳۶ ، ۳۵۳	توابع هدف چندگانه ۲۳
تفاضل محدود ۱۹۶ ، ۳۳۵ ، ۳۵۳ ، ۴۳۱ ، ۵۲۱ ، ۵۴۲	توزیع مساحت بهین ۶۳
	تولید مثل ۲۰۴
تفاضل مرکزی ۳۳۶	تیر اولر - برنولی ۹۳

جواب دوگان ۱۳۴

جواب یگانه ۱۲۴

جوابهای سری ۹۰

### چ

چرخه ای نقطه ثابت ۵۴۰

چگالی انرژی کرنشی ۴۶۶

چند ضلعی محدب ۱۲۱

چند وجهی محدب ۱۲۲

### ح

حالت تباهیده ۱۲۲

حدود حرکت ۲۷۸ ، ۳۰۳

حساب تغییراتی ۱۹ ، ۴۳ ، ۵۰ ، ۶۰ ، ۹۳

حساسیت جواب بهین ۲۳۳

حساسیت شکل ایستایی ۴۴۱

حل ترسیمی ۱۰۷ ، ۱۲۰

### خ

خارج قسمت ریلی ۷۸ ، ۸۶ ، ۹۴

خاصیت پایانی درجه دوم ۱۷۴

خرپای بیست و پنج میله ای ۳۲۴

خرپای پنج میله ای ۱۰۸

خرپای چهار میله ای ۱۱۹ ، ۲۲۵ ، ۲۴۳ ، ۲۴۹ ،

۳۰۷ ، ۲۷۱

خرپای ده میله ای ۲۰۳ ، ۳۱۴ ، ۳۲۲

خرپای دو میله ای ۲۶۴ ، ۴۲۹ ، ۴۷۳

خرپای سه میله ای ۲۳ ، ۲۸ ، ۱۰۴ ، ۱۰۶ ، ۲۸۵ ،

تیر بتنی پیش تنیده ۱۵۳

تیر پله ای صفحه ای ۶۲

تیر مستطیلی ۲۵

تیر یکسر گیردار ۱۷۵

تیر پس - تنشی ۱۱۵

تیرهای لایه ای ۸۹

ثابت بولتزمن ۲۰۰

### ج

جا به جایی پذیر ۴۴۴

جست و جوی احتمالاتی ۱۹۸ ، ۵۹۰

جست و جوی بخش طلایی ۱۶۳ ، ۱۶۸

جست و جوی تک تغییری ۱۷۴

جست و جوی خطی یک بعدی ۳۳

جست و جوی فیبوناچی ۱۶۱

جست و جوی یک بعدی ۲۴۲

جفت شده ۵۴۰

جمعیت ۲۰۶

جمله جریمه ۲۶۲

جهت حرکت ۱۴۰

جهت دهی ۵۲۶

جهت قابل استفاده ۲۲۱

جهت مزدوج پاول ۱۶۸

جهتهای جست و جو ۳۰۳

جهتهای مزدوج Q ۱۷۳

جهش ۲۰۴

جهشهای گاه به گاه ۲۰۴

جواب اصلی ۱۲۴

۶۳۰ مبانی بهینه سازی سازه ها

رتبه ماتریس ۱۲۴	۳۹۵ ، ۴۲۹ ، ۴۷۳ ، ۴۹۸ ، ۵۱۶ ،
رشته های بیتی ۲۰۵	۵۲۸ ، ۵۳۱ ، ۵۴۳
رشته های کروموزومی ۲۰۴	خرپای هفتاد و دو میله ای ۳۲۵
رهیافت تودرتو ۵۳۵	خزش ۱۱۴
رهیافت رویه پاسخ ۲۹۰	خطای برش ۳۳۶
رهیافت کمترین مربعات ۲۳۰	خطای تقریب ۳۰۶
رواداری ۲۵۳ ، ۲۶۳ ، ۳۰۶ ، ۳۴۰	خطای شرطی ۳۳۷
روش الحاقی ۳۴۷ ، ۳۸۰ ، ۳۹۷	خطای قطع کردن ۱۹۶
روش بار ظاهری ۳۴۷	خطای گرد کردن ۱۹۶ ، ۳۳۷
روش بار مجازی ۵۷	خطای نسبی ۳۴۵ ، ۳۵۸
روش بهبود یافته پاول ۱۷۴	
روش بهینه سازی تودرتو ۵۲۶	د
روش تحلیل و طراحی همزمان ۳۵	درخت تصمیم شاخه و کران ۱۴۸
روش تصویر گردایان ۳۳ ، ۲۳۶ ، ۲۷۴ ، ۴۸۸	درخت شمارش ۱۴۶
روش تغییر مکان مودی ۳۹۲	درون یابی چند جمله ای حفاظت شده ۱۶۸
روش تندترین کاهش ۲۴۰	درون یابی درجه دوم ۱۵۹ ، ۱۶۷
روش جهت های قابل قبول ۲۴۶	دوگان فالک ۵۰۶
روش جهت های مزدوج - پاول ۱۷۳ ، ۱۷۶ ، ۱۷۸	دوگانی ۴۵۹
روش حالت شکست همزمان ۴۶۶	دینامیک سازه های خطی ۳۹۱
روش حجم کنترل ۴۴۱	ر
روش حذف متغیر ۵۶	رابطه بهنگام دی اف پی ۱۹۰
روش درون یابی درجه سوم دیویدان ۱۶۵	رابطه بی اف جی اس ۱۹۰
روش دو بخشی ۱۶۵	رابطه شبه نیوتن ۱۸۸
روش دوگان ۴۹۰	رابطه بهنگام دیویدان - فلتنچر - پاول ۱۹۰
روش زوتندیک ۱۰۲	رابطه سازی استاندارد ۲۷
روش سیمپلکس ۱۰۲ ، ۱۲۵	رأس مجموعه قید ۳۰۷
روش شبه نیوتن ۱۹۴ ، ۲۵۹ ، ۲۶۱	راهبرد پاسگی دو برابر ۱۹۸
روش شتاب مودی ۳۹۵	راهبرد سی پی آر ۱۹۷

رویه قید ۱۴۱	روش فن جست و جوی یک تغییری ۱۵۸
ریز ساختار ۳۱۷	روش کاهش مودال ۳۹۲
ریز کمانش ۶۰۵	روش گلرکین ۵۶۶
ریز مکانیکی ۶۰۴	روش گوس- نیوتن ۲۶۰
ز	روش لاگرانژی تصویر شده پاول ۲۷۰
زمان بندی سرد شدن ۲۰۱	روش مجاورتی ۴۱۰، ۴۲۲، ۴۳۲، ۴۳۹
زنجیر ۵۴	روش محصور کردن ۱۵۹
ژ	روش مرتبه دوم دیویدان- فلتنچر- پاول ۱۷۳
ژاکوبین ۳۵۸، ۵۲۳، ۵۳۹، ۵۴۰، ۵۴۱	روش مرتبه دوم ۱۶۷
ژاکوبین اولری ۴۴۶	روش مقید مودال ۳۶۳
س	روش مودال بهبود یافته ۳۹۴
ساختار درخت باریک ۵۱۲	روش نیمه تحلیلی ۳۵۳
ساختار درخت پهن ۵۱۱	روش نیوتن ۱۸۶، ۲۶۰، ۳۵۹، ۴۸۰، ۴۸۲
ساز و کار ترکیبی ۱۱۳	۵۲۳، ۵۳۶، ۵۴۰
ساز و کار تیر ۱۱۳	روشهای تابع جریمه ۲۵۰
ساز و کار فرو ریختگی ۱۱۳، ۱۵۲	روشهای تحلیل تقریبی ۳۰۳
ساز و کار مایل ۱۱۳	روشهای تغییراتی ۴۳
سازه پایه ۳۱۸	روشهای تکراری ۳۴۰
سازه تانژانتی ۴۴۰	روشهای جست و جوی مستقیم ۴۵۹
سازه دو میله ای ۴۶۲	روشهای دوگان ۲۸۴، ۴۶۷
سازه مجاورتی ۴۲۲	روشهای ضرایب ۲۶۶، ۲۷۵
سازه های اسکلتی ۳۱۶	روشهای لاگرانژین تصویر شده ۲۶۹
سازه های تلفیقی ۳۲۰	روشهای مرتبه اول ۱۵۸، ۱۶۵، ۱۷۸
ستونهای اولر- برنولی ۷۸، ۹۴	روشهای مرتبه دوم ۱۵۸
سخت کننده ها ۵۹۲	روشهای مرتبه صفر ۱۵۸، ۱۶۸
	روشهای معیار بهینگی ۴۵۹
	روشهای معیار بهینگی شهودی ۴۶۰
	رویکرد مود بهنگام ۳۷۴

## ۶۳۲ مبانی بهینه سازی سازه ها

ص	سختی چسبی ۵۹۳
صفحات نازك ۸۴	سختیهای کاهش یافته ۵۵۰
صفحات نازك ارتعاشی ۸۹	سرعت همگرایی ۵۳۴
صفحه میانی ۵۵۱	سری تیلور ۲۸۰ ، ۲۸۵ ، ۳۰۳ ، ۵۳۶ ، ۵۸۸
	سریهای فوریه ۹۰
ض	سطح بالا ۵۱۱
ضرایب سختی خمشی ۵۹۳	سطح زیر ۵۱۱
ضریبگرهای لاگرانژ ۳۲ ، ۵۶ ، ۷۹ ، ۲۱۸ ، ۲۲۸ ،	سیمپلکس دنباله ای ۱۶۸
۲۲۹ ، ۲۶۶ ، ۴۱۱ ، ۴۳۸ ، ۴۸۳ ، ۴۸۷ ، ۴۹۷ ،	سیستم جرم - فنر ۳۶۵
۶۰۰	سیستم فرعی ۵۳۷
ضریب انبساط دمایی ناهمسانگرد ۴۱۸	سیستمهای گسسته ۳۳۵
ضریب بار بحرانی ۵۸۵	ش
ضریب بار کماتش ۵۸۸	شانس بقا ۲۰۸
ضریب جرمه ۲۵۲ ، ۲۵۴ ، ۲۶۲	شرایط بهینگی ۲۷۹ ، ۴۵۹
ضریب مقیاس بندی ۴۹۵	شرایط کان - تاکر ۳۱ ، ۲۱۸ ، ۲۷۲ ، ۴۶۹ ،
ط	۴۸۷
طراحی ترتیب چیدمان ۵۷۵	شرایط لازم ۳۱
طراحی تمام تنسیده ۳۵ ، ۳۲۲ ، ۴۶۰ ، ۵۱۴ ،	شرایط لازم کان - تاکر ۳۱
۶۰۳	شرایط لازم و کافی بهینگی ۷۵
طراحی چند منظوره ای ۵۳۷	شرایط مرزی سینماتیکی ۵۰
طراحی حد ۵۳۳	شرایط مرزی طبیعی ۵۳
طراحی خرابها ۱۱۶	شرط کافی بهینگی ۲۲۲
طرح حذفی گوس ۱۲۶	شرط مکملی ۶۹
طول قوس کابل ۵۳	شرط نرمال سازی ۳۶۴ ، ۳۶۶
ع	شکل کانونی ۱۲۶ ، ۱۲۹
عاملهای «سوق دهنده» ۲۴۷	شکل مود ۳۶۲
	شیشه اپوکسی ۵۷۱

نمایه ۶۳۳

عدد شرطی یک ماتریس ۱۸۰	قید بحرانی ۵۰۳
عدد موج ۵۷۲	قید پوش ۳۸۳
عمل کاهش ۱۷۱	قید نقض شده ۳۲
عملگر خطی دو سوبه ۴۱۹	قیدهای تغییر مکان ۳۲۳
	قیدهای فعال ۳۲ ، ۲۱۹ ، ۲۳۷
غ	قیمت های قیود ۱۳۷
غلبه یافتگی ۲۰۸	قیود بحرانی ۳۱۱
	قیود تساوی ۲۷
ف	قیود جانبی ۲۷
فاصله تهی دوگان ۴۷۶	قیود لرزش ۶۰۳
فاصله حرکت ۱۴۴	قیود معادل ۳۸۲
فرو ریختگی پلاستیک ۳۱۹	قیود نامساوی ۲۷
فن کاهش ۵۴۱	ک
فن گرادیان مزدوج ۵۳۴	کار خارجی ۷۶ ، ۱۱۳
فن گرادیان مزدوج دوباره شروع شده بیل ۱۸۴	کار مجازی ۱۱۳
فن نسبت تنش ۴۶۴ ، ۴۹۷ ، ۵۱۴	کار مجازی مکمل ۵۸
فنون آزمون و خطا ۷۶	کاهش مصرف سوخت خودروهای آمریکایی ۲۵۰
فنون باز تحلیل سریع ۲۹۴	کرنش مجازی ۴۱۸
فنون برنامه ریزی ریاضی ۷۵	کمانش اولری ۵۰۶
فنون حذفی گوسی ۵۳۴	کهاد ۳۶۳
	کهادهای اصلی ۴۴
ق	گ
قاب سردر ۱۱۲ ، ۱۲۱ ، ۱۳۵ ، ۵۲۱	گرادیان کاهش یافته ۲۳۸
قانون هوك ۴۰۴ ، ۴۲۳ ، ۴۲۹ ، ۴۴۹	گرافیت - اپوکسی ۵۶۴ ، ۵۷۱ ، ۶۰۷
قرار دادن چیدمان لایه ها ۵۵۱	گره های زنده ۱۴۹
قضیه کران پایین ۱۰۵	گسسته سازی فضایی ۳۳۵
قطعه به قطعه خطی ۱۱۹	گشتاور ماند ۲۸۲ ، ۳۲۸
قید انتگرالی ۶۰ ، ۷۶	



ل

متغیرهای مجاورتی ۴۱۱	لاغری ماتریسها ۱۹۴
متغیرهای محلی ۵۱۵، ۵۱۷، ۵۲۲، ۶۰۴	لاگرانژین ۲۲۳، ۲۲۸، ۲۳۷، ۲۴۹، ۲۶۶، ۳۱۱،
متغیرهای مصنوعی ۱۲۴، ۱۳۱، ۲۲۹	۴۶۹
متناسب سازی آتروالاستیک ۵۵۳، ۶۰۱	لایه های متوازن ۵۵۳
مجموعه غیر فعال ۴۸۸	
مجموعه فعال ۳۳	

م

مجموعه قیدهای فعال ۳۱۱	مؤسسه مهندسی وی ام ای (VMA) ۳۲۱
محدب ۳۲۷	ماتریس استهلاك ۳۷۸
مدل اجزای محدود ۵۳۴	ماتریس جرم ۳۶۱
مدول حساسیت بار ۴۲۱	ماتریس سختی تانژانت ۳۵۸، ۴۲۲
مزدوج Q ۱۹۳	ماتریس سختی جزء ۳۴۹
مسائل ILP دو تایی ۱۴۶	ماتریس سختی کلی ۳۴۹
مسائل ILP صفر یا یک ۱۴۵	ماتریس سختی مصالح ۴۰۴
مسائل ابتدایی ۸۹	ماتریس هسیان ۴۴، ۱۸۰
مسائل برنامه ریزی درجه دوم ۲۲۷	متغیر شبه زمان ۴۴۳
مسائل برنامه ریزی گسسته ۱۴۵	متغیر طراحی محلی ۶۰۴
مسائل جدایی پذیر ۴۷۰	متغیرهای جهت لایه ۵۵۹
مسائل چند سطحی درخت باریک ۵۳۳	متغیرهای زیادتی ۱۲۳
مسائل غیر خطی ۴۶۸	متغیرهای ضخامت تک لایه ۵۵۶، ۵۶۵
مسائل محدب ۲۲۴، ۲۸۴	متغیرهای طراحی ۲۰
مسائل مقدار ویژه غیر خطی ۳۸۰	متغیرهای طراحی پیوسته ۲۰
مسائل مقدار ویژه غیر هرمیتی ۳۷۱	متغیرهای طراحی گسسته ۲۰، ۴۷۲
مسائل مقید غیر خطی ۱۰۲	متغیرهای طراحی نرمال شده ۲۸۶
مسأله ابتدایی ۱۳۴	متغیرهای طراحی هندسی ۵۳۶
مسأله بهینه سازی محدب ۲۲۵	متغیرهای فراگیر ۵۲۲، ۶۰۴
مسأله جعبه ای زاویه ای ۵۱۵	متغیرهای کمبود ۱۲۳
مسأله جعبه ای قطری ۵۱۴	متغیرهای مانع ۲۸۱
مسأله جفت شده ۵۳۹	

مودهای شکست ۴۶۷	مسأله دو سطحی ۵۲۷
مودهای شکست محلی ۶۰۴	مسأله دوگان ۸۸
مؤسسه مهندسی وی ام ای (VMA) ۳۲۱	مسأله مقدار ویژه ۲۹۹
میان یابی ۵۴۰	مشتق سویی ۱۷۹، ۲۳۷، ۳۶۲، ۳۶۹
میدان تنش مجاورتی ۴۱۱	مشتق لگاریتمی ۳۴۳، ۳۷۷
میدان کرنش مجاورتی ۴۱۱	مشتق مادی ۴۴۱، ۴۵۲
میدانهای مجاورتی ۴۳۸	مضالح چکش خوار ۱۰۳
مین ماکز ۶۸	مضالح کاملاً ارتجاعی - خمیری ۱۰۳
مینیم سازی توابع چند متغیره ۱۶۸	معادله اولر - لاگرانژ ۵۲، ۵۴، ۴۵۹
مینیم سازی توابع یک متغیره ۱۵۷	معادله پایداری ۹۱
مینیم سازی نامقید ۲۵۹	معادله حساسیت فراگیر ۵۳۸
مینیم محلی ۱۹۸، ۴۶۸	معیار بهینگی ۶۰۳
مینیم فراگیر ۱۹۸	معیار تنش تسلیم هیل ۵۶۱
	معیار شکست اولین لایه ۵۵۹
ن	معیار همگرایی ۲۵۳
ناحیه قابل قبول ۳۲، ۱۲۱	معین مثبت ۴۴، ۲۲۸
نامتغیرهای لایه ای ۵۵۴	معین منفی ۴۴
نامعین ۴۵	مقادیر ویژه حقیقی ۳۶۱
نامفرد ۱۲۴	مقدار ویژه ۳۹۶
ناهمسانگرد ۵۴۸	مقدار ویژه کمانش ۴۳۹، ۵۰۴
نرخ همگرایی خطی ۱۷۸	مقعر ۴۷۸
نرم اقلیدسی ۲۶، ۱۷۵، ۱۷۹، ۱۸۶، ۲۳۰	مقیاس بندی ۱۸۲
نرمال سازی ۳۱، ۴۸۱، ۵۰۴	مقیاس بندی کلی ۲۹۶
نرمال سازی قیدها ۲۱۶	مقیاس بندی وارون ۵۰۲
نسبت ریلی ۳۰۱، ۴۳۳، ۴۳۵، ۵۳۵	مکانیزم های شکست چندگانه ۵۴۷
نظریه بقای لایقترین داروین ۲۰۴	مواد مرکب لایه ای ۵۴۸
نظریه لایه بندی کلاسیک ۵۵۰	مود ارتعاش ۳۷۳
نقاط رأس ۱۲۱	مود کمانشی ۴۳۵

۶۳۶ مبانی بهینه سازی سازه ها

و	نقاط فرین ۱۲۲
وارون هسیان ۱۸۸	نقطه منظم ۲۱۸
واژگونگی ۲۰۴	نقطه ایستا ۴۴
هـ	نقطه دو شاخه ۳۶۰
همبستگی خمشی - کششی ۵۵۳	نقطه زینی ۴۵
همبستگی خمشی - پیچشی ۵۷۹	نمو کاهش ۲۰۳
همگرایی فراگیر ۱۹۸	نمودار جریان الگوریتم سیمپلکس دنباله ای ۱۷۲
ی	نیروهای آثرو دینامیک ۳۷۱
یکتایی جواب ۸۵	نیروی پیش تنیدگی ۱۱۴
یکنوا ۳۴۰ ، ۳۵۹	نیمه معین مثبت ۴۵ ، ۲۲۸
	نیمه معین منفی ۴۵